Н. И. ЛОБАЧЕВСКИЙ

ПОЛНОЕ СОБРАНИЕ СОЧИНЕНИЙ

ПОД ОБЩЕЙ РЕДАКЦИЕЙ

В. Ф. КАГАНА, А. Н. КОЛМОГОРОВА
А. П. НОРДЕНА, И. Г. ПЕТРОВСКОГО
В. В. СТЕПАНОВА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

В. Ф. КАГАН

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА — ЛЕНИНГРАД
1951

Н. И. ЛОБАЧЕВСКИЙ

ТОМ ПЯТЫЙ

СОЧИНЕНИЯ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ, ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, МЕХАНИКЕ И АСТРОНОМИИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА—ЛЕНИНГРАД
1951

СОДЕРЖАНИЕ [1])

[1]) Здесь указана первая страница соответствующего отдела тома. Подробное содержание каждого отдела помещено на обороте указываемой здесь страницы.



Н. И. Лобачевский.
С портрета художника Л. Д. Крюкова.

К стр. 5.

ОТ РЕДАКЦИИ

Настоящим пятым томом полного собрания сочинений Н. И. Лобачевского исчерпываются его работы по математическим наукам. Этот том содержит работы по анализу, к которым примыкают статьи по теории вероятностей, механике и астрономии. Все эти работы после опубликования при жизни Лобачевского в повременных изданиях прошлого века появляются в печати в первый раз. Первые их издания стали мало доступны, и только теперь советские математики получают полную возможность ознакомиться с трудами нашего великого геометра, лежащими за пределами геометрии.

Бессмертную свою славу Лобачевский заслужил, конечно, созданием неевклидовой геометрии. Но его труды по другим математическим дисциплинам также представляют большой интерес как сами по себе, так и по тому яркому освещению, которое они проливают на личность Лобачевского, на разнообразие его научных интересов, на глубину его замыслов [1]).

Время, когда Лобачевский писал эти труды, ушло далеко от эпохи Эйлера, которого вполне справедливо относят к числу основоположников математического анализа. Многочисленные и глубокие труды Эйлера составили славу нашей Академии в первую четверть века ее существования; они дали первое систематическое изложение анализа бесконечно малых. Но это построение было еще далеко от логического совершенства, вызывало сомнения и справедливые возражения. Первая половина прошлого века, время, когда писал Лобачевский, было проникнуто стремлением довести построение анализа до совершенства, устранить всё не только неправильное,

---

[1]) В «Историко-математических исследованиях» (выпуск II, М. — Л., 1949) помещены работы Г. Л. Лунца, А. П. Юшкевича и И. Г. Башмаковой, Б. В. Гнеденко, Н. И. Идельсона, посвященные трудам Лобачевского по математическим дисциплинам, не входящим непосредственно в состав геометрии.

но и неточное, неясное. Большие заслуги в этом отношении принадлежали Гауссу, Коши, Фурье, Пуассону, Дирихле, работы которых уже были хорошо известны Лобачевскому. Живя далеко от центров математической мысли, Лобачевский все же ясно ощущал важнейшие вопросы и задачи дня, сосредоточил свои мысли на обосновании анализа, на исходных его понятиях, на начальных положениях его построения. И то, что было сделано названными выше корифеями науки, Лобачевского всё же не удовлетворяло. Эта тенденция к строгому обоснованию математики составляет наиболее характерную черту всего творчества Лобачевского, красной нитью проходит через все его работы. Лобачевский ищет правильной постановки исходных положений, начиная с самого понятия о функции. Взгляд на функцию, как на величину, выражаемую рядом действий над значением независимой переменной, — эта точка зрения Эйлера, которую многие математики еще принимали в эпоху Лобачевского, для него неприемлема; он дает определение функции, которое по существу сохранилось и до настоящего времени. Он отчетливо понимает значение непрерывности функции при ее исследовании, очень близко подходит к понятию равномерной непрерывности; он правильно пользуется предельным переходом и на нем основывает учение о сходимости ряда вообще, тригонометрического ряда в частности. Он устанавливает теорему о законности почленного интегрирования ряда Фурье, в то время как сама необходимость теоретического применения подобных операций стала понятной большинству математиков лишь много позднее. Он ясно видит, что учение о рядах, об их сходимости, о точно́м и асимптотическом их суммировании составляет центральное место анализа; этому он посвящает главные свои работы по анализу. Не желая повторять здесь соображения, изложенные во вводных статьях и в комментариях, нужно все же отметить данный Лобачевским своеобразный признак сходимости бесконечного ряда. Нельзя, конечно, сказать, что этот признак сохранил свое значение и в настоящее время. Но Лобачевскому он сослужил большую службу: при его стремлении исходить в развитии своих идей из возможно более общих положений, Лобачевский систематически пользуется этим признаком в большинстве выводов, относящихся к теории рядов.

Из упреков, которые Лобачевскому делал М. В. Остроградский [1]), справедлив только один: все работы Лобачевского читаются с большим трудом, требуют исключительного внимания. Именно поэтому редакция настоящего издания считала совершенно необходимым очень обстоятельно их комментировать. Такое комментирование статей по анализу было поручено В. В. Степанову и Г. Л. Лунцу. К несчастью, болезнь и кончина В. В. Степанова не дали ему возможности выполнить эту задачу до конца. Он оставил только перевод основного мемуара Лобачевского «О сходимости бесконечных рядов» с немецкого оригинала. Но он имел еще возможность обсудить совместно с Г. Л. Лунцем все творчество Лобачевского в области математического анализа.

С выходом в свет настоящего тома три основные работы Лобачевского по математическому анализу, относящиеся к теории рядов, становятся доступными широкому кругу математиков.

К этим работам Лобачевского примыкает его сочинение «Значение некоторых определенных интегралов», напечатанное в этом томе также с комментариями Г. Л. Лунца. Своеобразные методы вычисления определенных интегралов составляли одну из тем, к которым Лобачевский систематически возвращался. Они играют очень важную роль почти во всех геометрических работах Лобачевского: в первом же его мемуаре «О началах геометрии» [2]) и затем в сочинениях «Воображаемая геометрия» и «Применение воображаемой геометрии к некоторым нитегралам» [3]). Но в этих работах Лобачевский приходит к вычислению значений определенных интегралов от геометрии, в поисках доказательства логической правильности созданной им «воображаемой геометрии». К значению некоторых определенных интегралов он приходит также в своих рассуждениях, относящихся к теории вероятностей [4]). В названной же специальной работе, написанной Лобачевским уже к концу его жизни, он вычисляет значения ряда определенных интегралов аналитическими средствами. Найденные Лобачевским значения многих интегралов некоторое время пользовались большей известностью,

---

[1]) См. его отзыв на стр. 265 наст. тома.

[2]) Напечатано в I томе наст. издания.

[3]) Напечатаны в III томе наст. издания.

[4]) Сочинение «О вероятности средних результатов, полученных из повторных наблюдений», напечатанное в наст. томе.

чем другие его работы. Об этом можно судить по обилию этих значений, приведенных в известных таблицах интегралов Виеренс де Хаана [1]).

Особняком стоит статья Лобачевского, содержание которой относится к области механики — «Условные уравнения для движения и положение главных осей в твердой системе». Она состоит из двух частей: первая часть посвящена основной теореме Эйлера, а вторая относится к так называемой геометрии масс. Это — единственная работа Лобачевского, опубликованная не в изданиях Казанского университета, а в «Ученых записках Московского университета». Вряд ли можно сомневаться, что в этом отношении сыграл роль Н. Д. Брашман, состоявший уже в эту пору профессором Московского университета. Специальный характер этой работы потребовал особого выяснения, которое нашло себе место во вводной статье и комментарии Н. И. Идельсона; этот комментарий не носит характера текстуальных примечаний, какие сопровождают другие сочинения Лобачевского в настоящем издании; вместе с вводной статьей он посвящен обстоятельному выяснению содержания и значения работы Лобачевского.

К области механики относится также отзыв о докторской диссертации А. Ф. Попова. Приложенная к нему статья А. Д. Дубяго [2]) содержит не только данные о возникновении этой работы, но и интересные сведения, характеризующие моральный облик Лобачевского. Чтобы читатели могли уяснить себе отзыв Лобачевского, здесь помещено краткое изложение содержания диссертации Попова, составленное, как и комментарии к этой работе, Г. Г. Тумашевым. Выбор темы и самый разбор диссертации свидетельствуют о глубине математического образования, о разнообразии научных интересов Лобачевского.

Он не был чужд и теории вероятностей, к области которой относится небольшая статья «Вероятность средних результатов, полученных из повторных наблюдений», печатаемая в настоящем томе в переводе с французского, сделанном А. Н. Хованским под редакцией

---

[1]) См. статьи Б. Л. Лаптева и Г. Л. Лунца «Интегралы Лобачевского в таблицах Биеранс де Хаана» (стр. 413 III тома и стр. 256 наст. тома).

[2]) «Историко-библиографические сведения о диссертации Попова и разборе ее Лобачевским», стр. 412 наст. тома.

А. Н. Колмогорова[1]). Эта статья представляет собой развитие рассуждений, нашедших место в XII главе сочинения «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных»[2]). Занимаясь численным решением прямолинейных и сферических треугольников, Лобачевский имел и специальную задачу: на основе астрономических наблюдений он вычислял сумму углов треугольника, вершины которого лежат в центре Земли, в центре Солнца и в звезде; эти вычисления производились на основе многочисленных наблюдений. Требовалось не только установить наиболее вероятное значение этой суммы; нужно было судить о том, насколько получаемый результат дает основание считать, что сумма углов треугольника равна π. Это заставило Лобачевского заняться выяснением закона распределения среднего арифметического из результатов отдельных наблюдений. Лобачевский ограничивается специальным случаем задачи, но для избранного им случая он дает ее исчерпывающее решение, позволяющее при любом числе наблюдений точно вычислить пределы погрешности, соответствующие любому заданному уровню вероятности. Попутно Лобачевский получает интересные формулы теории соединений и вычисляет значения некоторых определенных интегралов.

Эта задача Лобачевского была, таким образом, тесно связана с астрономическими наблюдениями. К астрономии, к ее теоретическим и практическим задачам Лобачевский стоял очень близко[3]). Он своеобразно построил астрономическую обсерваторию Казанского университета, он два года читал курс астрономии в отсутствие Н. М. Симонова, он еще в раннем возрасте наблюдал комету 1811 г., а в 1832 г. — комету Энке. Неудивительно, что в 1842 г. для наблюдения в Пензе полного солнечного затмения во главе экспедиции Казанского университета был поставлен Н. И. Лобачевский (профессор астрономии Н. М. Симонов находился в заграничной командировке). Отчет об этой экспедиции под заглавием «Полное затмение солнца в Пензе 26 июня 1826 г.» заключает настоящий том. Это — единственная работа Лобачевского, предназначенная не для узких специалистов; отчет написан очень ярко и читается с живым

[1]) Об этой работе см. также статьи Б. В. Гнеденко «О работах Н. И. Лобачевского по теории вероятностей» и Н. И. Идельсона «Лобачевский-астроном» («Историко-математические исследования», вып. II).

[2]) Напечатано во II томе наст. издания.

[3]) См. статью Н. И. Идельсона, указанную в сноске [1]).

интересом. Редакция сочла целесообразным дать к нему несколько более подробную вступительную статью и более доступные комментарии, составленные А. Д. Дубяго. Отчет Лобачевского о солнечном затмении будет прочитан широким кругом читателей; он дает яркое представление о взглядах Лобачевского на физику Солнца, тогда еще только зарождавшуюся, о его отношении к теориям света, стоявшим тогда в разгаре дискуссии.

Редакция настоящего издания имеет полное основание считать, что с выходом настоящего тома собрания сочинений Н. И. Лобачевского научный облик нашего великого геометра будет освещен гораздо ярче, чем это было сделано до сих пор.

После выхода в свет IV тома редакция полного собрания сочинений Лобачевского вновь понесла большую потерю — скончался В. В. Степанов. Его обязанности взяли на себя А. Н. Колмогоров и И. Г. Петровский.

СОЧИНЕНИЯ ПО ТЕОРИИ РЯДОВ

ОБ ИСЧЕЗАНИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СТРОК

1834

СПОСОБ УВЕРЯТЬСЯ В ИСЧЕЗАНИИ БЕСКОНЕЧНЫХ СТРОК И ПРИБЛИЖАТЬСЯ К ЗНАЧЕНИЮ ФУНКЦИЙ ОТ ВЕСЬМА БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

1835

О СХОДИМОСТИ БЕСКОНЕЧНЫХ РЯДОВ

ПЕРЕВОД В.В. СТЕПАНОВА

1841

ВВОДНАЯ СТАТЬЯ И КОММЕНТАРИИ
Г.Л. ЛУНЦА

СОЧИНЕНИЯ ПО ТЕОРИИ РЯДОВ

ОБЗОР СОЧИНЕНИЙ Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО ПО ТЕОРИИ РЯДОВ

Н. И. Лобачевским опубликованы следующие сочинения по теории рядов: в 1834 году — «Об исчезании тригонометрических строк» (дальше обозначается через {1}), в 1835 г. — «Способ уверяться в исчезании бесконечных строк и приближаться к значению функций от весьма больших чисел» (дальше обозначается через {2}) и в 1841 г. — «Ueber die Convergenz der unendlichen Reihen» («О сходимости бесконечных рядов», дальше обозначается через {3}); последнее сочинение печатается в переводе В. В. Степанова. Эти работы тесно связаны между собой по содержанию. Сочинение {3} представляет собой, в основном, резюме двух предыдущих работ. Мы сочли поэтому целесообразным дать общий обзор всех работ Лобачевского по теории рядов.

По своему идейному замыслу сочинения Лобачевского по теории рядов примыкают к его «Алгебре» [1]). Не подлежит сомнению, что отправной точкой в исследованиях Лобачевского по теории рядов явилась его работа над перестройкой «Алгебры» (которая в первоначальном варианте предназначалась в качестве учебника для гимназий) и в особенности широкое использование в «Алгебре» бесконечных рядов, в частности, для определения основных трансцендентных функций.

Интерес Лобачевского к теории рядов не имеет самодовлеющего значения. Цель Лобачевского во всех его сочинениях по теории рядов одна и та же — подвести прочный фундамент под здание математического анализа, под основные понятия, которыми он оперирует, и теория рядов должна, по мнению Лобачевского, сыграть здесь решающую роль.

Некоторое влияние на содержание работ Лобачевского по теории рядов оказали также его геометрические работы. Так, например, Лобачевский в сочинении «Об исчезании тригонометрических строк» [2]), ссылается на свои работы по геометрии, приводя доводы в пользу расширения понятия функциональной зависимости. Кажется также

---

[1]) «Алгебра или вычисление конечных» — напечатано в IV томе наст. издания.

[2]) См. стр. 44 наст. тома.

весьма вероятным, что большое внимание, уделяемое Лобачевским в своих аналитических работах теории гамма-функции, объясняется, в некоторой степени, ролью, которую играет эта функция при вычислении определенных интегралов, в частности интегралов, вычисленных Лобачевским в сочинениях по геометрии.

Однако в целом сочинения Лобачевского, посвященные теории бесконечных рядов, носят вполне независимый от его геометрических исследований характер; содержание их связано с самыми актуальными проблемами математического анализа того времени, и полученные Лобачевским в этих работах результаты дают полное основание утверждать, что Лобачевский был не только гениальным геометром, но и выдающимся аналистом.

Переходя к обзору сочинений Лобачевского по теории рядов, мы приводим, ввиду того, что наш обзор не исчерпывает, конечно, всего содержания сочинений, а также в связи с тем, что в оригинальном тексте сочинений Лобачевского отсутствует какое-либо деление на главы, план каждого из сочинений.

только что приведенной выдержки. Дело в том, что термин Лобачевского «постепенность» равносилен современному «непрерывность». Следует, однако, отметить, что строгое определение этого термина вводится Лобачевским только в сочинении «Способ увѐряться...»[1], хотя, вводя этот термин, Лобачевский ошибочно сам указывает на то, что соответствующее определение было им сформулировано еще в статье «Об исчезании тригонометрических строк». Правда, не формулируя определения, Лобачевский в {1} кое-где пользуется, тем не менее, словом «постепенность», как термином. Однако, когда Лобачевский говорит, что функция есть число, которое «вместе с x постепенно изменяется», то это обозначает только, что функция изменяется *по мере того, как* изменяется x. Примерно в таком же смысле употребляет Лобачевский слово «постепенно» также в конце страницы 44 и на странице 45. Тот факт, что Лобачевский не связывал понятие функции с ее непрерывностью, бесспорен хотя бы потому, что он во многих местах специально оговаривает «постепенна» ли в данной точке функция или нет, исследует сходимость ряда Фурье в точках, где нарушается «постепенность» функции и т. д. Следует, таким образом, считать бесспорно установленным, что Лобачевскому принадлежит приоритет в современном определении понятия функции (аналогичное определение Дирихле относится к 1837 году).

Лобачевский первый разграничил понятия дифференцируемости и непрерывности. Сначала он определяет понятие дифференцируемости[2]) («непрерывности» в терминологии Лобачевского), а потом[3]) специально подчеркивает различие между дифференцируемостью и непрерывностью («непрерывностью» и «постепенностью»). Определение дифференцируемости функции, сформулированное Лобачевским, — «внутреннее»; для того, чтобы не выходить за пределы числовых множеств, определяющих данную функциональную зависимость, он вводит в само определение дифференцируемости критерий сходимости Коши. Таким образом, функция $F(x)$ называется дифференцируемой («непрерывной»), если разность

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-\frac{F(x+h')-F(x)}{h'},$$

где $|h'|<|h|$, можно сделать по абсолютной величине сколь угодно малой, когда величина $|h|$ достаточно мала.

Следует все же отметить, что, во всяком случае в сочинении {1}, Лобачевский фактически исходит из предположения, что непрерывная

---

1) Стр. 131 наст. тома.

2) {1}, стр. 45.

3) {2}, стр. 130—131.

функция может иметь только изолированные точки недифференцируемости.

Весьма вероятно, что именно потому, что Лобачевский не мог ни доказать, ни опровергнуть такое предположение, он, желая явно сформулировать налагаемые на функцию при доказательстве теоремы о разложении в ряд Фурье условия, вводит понятие «аналитической» функции [1].

«Аналитической» Лобачевский называет функцию $f(x)$, дифференцируемую всюду, кроме отдельных точек, где величина $f'(x)$ бесконечна. Из дальнейших замечаний и рассуждений Лобачевского следует, что «аналитическая» функция может также иметь изолированные точки разрыва первого рода.

Как мы видели из приведенной выше выдержки, в которой Лобачевский определяет понятие функциональной зависимости, Лобачевский первоначально, как это вообще было принято в то время, называл функцию аналитической, если она задана формулой («прямо или условно»). Для того чтобы подчеркнуть, что такое ограничение понятия функции не оправдано, он, при доказательстве теоремы о том, что функция, имеющая производную, равную тождественно нулю, постоянна, специально предполагает, что функция задана не аналитически, а «в числах», и доказывает упомянутую теорему (это доказательство не является вполне строгим) дважды: один раз в общем виде, а другой раз, исходя из возможности апроксимации этой функции аналитической функцией — многочленом [2]. Тот факт, что, как отмечено выше, Лобачевский придал впоследствии понятию «аналитической» функции совсем другой, но уже точно определенный смысл, свидетельствует о том, что он осознал беспредметность этого понятия в прежнем смысле.

Интересно отметить, что Лобачевский близко подошел к понятию равномерной непрерывности. Доказывая теорему о существовании определенного интеграла [3], он исходит из утверждения, что величина $|\varphi(x+\alpha)-\varphi(x)|$ может быть, для непрерывной на некотором отрезке функции $\varphi(x)$, сделана меньше любого положительного числа, каковы бы ни были x и α, если только величина $|\alpha|$ достаточно мала. Закончив доказательство, он продолжает [4]:

«До сих пор однако ж значение $\varphi(x)$ не предполагалось бесконечно великим, иначе могло бы случиться, что

$$\varphi(x+\alpha)-\varphi(x)$$

---

1) {2}, стр. 130.

2) {1}, стр. 47—49.

3) {1}, стр. 49.

4) Стр. 51.

В тексте сочинений Лобачевского нами, для удобства, произведено разделение каждого сочинения на главы. Номера глав обозначены в тексте римскими цифрами в соответствии с приведенным выше планом.

Обзор дается нами не в том порядке, в котором строит изложение Лобачевский, а по отдельным вопросам, служащим предметом его исследований.

Начнем с основных понятий анализа и, в первую очередь, с определения понятия функциональной зависимости.

Вот каким образом Лобачевский вводит это определение[1]):

> «Общее понятие требует, чтобы функцией от x называть число, которое дается для каждого x и вместе с x постепенно изменяется. Значение функции может быть дано или аналитическим выражением, или условием, которое подает средство испытывать все числа и выбирать одно из них [...]. Наконец, условия, которым функция подчинена, могут быть еще неизвестны, тогда как зависимость чисел уже существует несомнительно. В таком случае предположение, будто функция выражается аналитически, должно назваться произвольным. Правда, что еще не встречено таких примеров, где бы зависимость чисел не могла быть представлена прямо или условно аналитическим выражением; однако ж нельзя быть уверену совершенно и в том, чтобы другое предположение не привело также и к новому решению [...]. Кажется нельзя сомневаться ни в истине того, что всё в мире может быть представлено числами, ни в справедливости того, что всякая в нем перемена и отношение выражается аналитической функцией. *Между тем, обширный взгляд теории допускает существование зависимости только в том смысле, чтобы числа, одни с другими в связи, принимать как бы данными вместе*[2]). Лагранж в своем вычислении функций (Calcul des fonctions), которым хотел заменить дифференциальное, столько же, следовательно, повредил обширности понятия, сколько думал выиграть в строгости суждения».

Сопоставление приведенной нами выдержки со всем содержанием работ Лобачевского по математическому анализу не оставляет сомнения в том, что роль определения понятия функции играет выделенная нами курсивом фраза. Можно иногда слышать мнение о том, что Лобачевский связывал определение понятия функции с ее непрерывностью. В качестве аргумента выдвигается при этом первая фраза

---

[1]) {1}, стр. 43—44 наст. тома. В дальнейшем все страницы, указанные в этой статье, приведены по настоящему тому.

[2]) Курсив наш. — *Г. Л.*

не будет уменьшаться беспредельно вместе с α. Например,

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

дает

$$\varphi(2\alpha) - \varphi(\alpha) = \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2\alpha}},$$

которая разность увеличивается с уменьшением α».

Говоря о том, ка́к Лобачевский определял основные понятия анализа, нельзя, наконец, не отметить, что Лобачевский безусловно понимал необходимость обоснования предельного перехода под знаком интеграла и фактически пользовался понятием равномерной сходимости.

Так [1]), доказав сходимость последовательности с общим членом

$$A_n(\alpha) = \log n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+\alpha},$$

он получает оценку вида

$$|A_n(\alpha) - S(\alpha)| < \varepsilon(n),$$

где $S(\alpha)$ — предел последовательности, а $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon(n) = 0$, и специально подчеркивает, что $\varepsilon(n)$ не зависит от α $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$. На основании указанной оценки Лобачевский получает неравенство вида

$$\left|\int_0^\alpha A_n(\alpha)\, d\alpha - \int_0^\alpha S(\alpha)\, d\alpha\right| < \alpha \cdot \varepsilon(n),$$

из которого следует, в частности, существование предела

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\alpha A_n(\alpha)\, d\alpha = \int_0^\alpha S(\alpha)\, d\alpha.$$

Замечательным образцом строгости изложения может служить вывод разложения функции $\sin x$ в бесконечное произведение, где также фактически используется равномерная сходимость [2]).

Сначала Лобачевский доказывает сходимость, при любом конечном x, ряда

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \log\left(1 - \frac{x^2}{i^2\pi^2}\right).$$

Далее Лобачевский пишет тождество:

$$\log \sin x = 2n \log \cos \frac{x}{2n} + \log\left(2n \operatorname{tg} \frac{x}{2n}\right) + \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2n} \operatorname{ctg}^2 \frac{i\pi}{2n}\right),$$

---

[1]) {3}, стр. 200.

[2]) {3}, стр. 178—182.

справедливое при любом целом n, и доказывает, что при достаточно большом r величина

$$\left|\sum_{i=r}^{n} \log\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2n}\operatorname{ctg}^2\frac{i\pi}{2n}\right)\right|,$$

а также

$$\left|\sum_{i=r}^{\infty} \log\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2n}\operatorname{ctg}^2\frac{i\pi}{2n}\right)\right|$$

может быть сделана сколь угодно малой и останется таковой, как бы мы ни увеличивали n (то-есть равномерно относительно n). Так как, кроме того, $2n\log\cos\frac{x}{2n}\to 0$ и $\log\left(\frac{2n}{x}\operatorname{tg}\frac{x}{2n}\right)\to 0$ при $n\to\infty$, то абсолютная величина разности между

$$\log\frac{\sin x}{x f(x)}$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{r}\log\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2n}\operatorname{ctg}^2\frac{i\pi}{2n}}{1-\frac{x^2}{i^2\pi^2}}$$

может быть сделана сколь угодно малой, если r достаточно велико.

Но, каково бы ни было i,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2n}\operatorname{ctg}^2\frac{i\pi}{2n}}{1-\frac{x^2}{i^2\pi^2}}=1$$

и, следовательно, при любом постоянном r

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{r}\log\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2n}\operatorname{ctg}^2\frac{i\pi}{2n}}{1-\frac{x^2}{i^2\pi^2}}=0.$$

Таким образом, $\log\frac{\sin x}{x f(x)}$ отличается от нуля на величину сколь угодно малую при достаточно большом r, но $\log\frac{\sin x}{x f(x)}$ от r не зависит и, следовательно,

$$\log\frac{\sin x}{x f(x)}=0,$$

то-есть

$$\sin x = x f(x) = x\prod_{i=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{i^2\pi^2}\right).$$

Значительное место в рассматриваемых сочинениях Лобачевского занимает найденный им признак сходимости знакоположительных рядов, основанный на разложении каждого члена ряда в двоичную дробь. Прием, на котором основан этот признак, впервые был Лобачевским применен при исследовании сходимости одного ряда еще в «Алгебре» [1]. В {1} [2]) Лобачевский подробнее останавливается на своем способе исследования сходимости, иллюстрируя его на двух примерах и производя оценку остатков соответствующих рядов, но все же не приводя точной формулировки этого признака. Формулировка и доказательство признака, сопровождаемые далее многочисленными примерами, имеются в {2} и {3} [3]), причем сходимость всех без исключения встречающихся в этих сочинениях рядов, последовательностей и бесконечных произведений исследуется только с помощью этого признака и каждый раз производится оценка соответствующего остатка. Лобачевский формулирует свой признак, как достаточный; между тем, если общий член ряда положителен и монотонно убывает (вернее, не возрастает), то признак Лобачевского не только достаточен, но и необходим. Доказательство как достаточности, так и необходимости признака Лобачевского дано в приложении 1 на стр. 252 настоящего тома, и здесь мы ограничимся только его формулировкой (и притом в простейшем случае):

Если функция целочисленного аргумента $f(n)$ положительна, монотонна и не возрастает, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

сходится или расходится одновременно с рядом

$$\sum_{m=1}^{\infty} p_m 2^{-m},$$

где p_m определяется из неравенств

$$f(p_m) \geqslant 2^{-m}, \quad f(p_m+1) < 2^{-m}.$$

В центре исследований Лобачевского по теории рядов находится теория рядов Фурье. Ею он занимается во всех рассматриваемых сочинениях [4]); кроме того, он применяет разложение в ряд Фурье к суммированию числовых рядов и вычислению определенных интегралов [5]).

---

[1]) Том IV наст. издания, стр. 233 и 234.

[2]) Стр. 35—39 наст. тома.

[3]) {2}, стр. 82—90, {3}, стр. 163—165.

[4]) {1}, стр. 31—35, 40—41, 54—80 {2}, стр. 82—83, 86—87; {3}, стр. 163—165.

[5]) {2}, стр. 133—150.

Лобачевскому было известно доказательство Дирихле теоремы о разложении функции в ряд Фурье [1]); однако он, не без основания, не был удовлетворен тем обстоятельством, что Дирихле пользуется значением интеграла

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

без всякого обоснования. Дирихле, по всей видимости, впоследствии и сам осознал этот дефект в своем доказательстве и в 1837 году изменил его так, чтобы не пользоваться значением указанного интеграла.

Известны были Лобачевскому также доказательства Коши и Дирксена; эти доказательства тем более не могли его удовлетворить. Лобачевский указывает только на один недостаток этих доказательств — отсутствие обоснования сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k},$$

отмечая при этом, что этот недостаток менее существенен, чем остальные.

Действительно, Коши налагает на разлагаемую в ряд функцию очень сильные ограничения (аналитичность в некоторой полосе плоскости комплексного аргумента), а доказательство Дирксена порочно во многих отношениях.

Схема доказательства сходимости ряда Фурье, данного Лобачевским [2]), такова:

Выполняя интегрирование по частям, Лобачевский получает

$$\int_0^1 \cos(i\pi x - i\omega)\, f(x)\,dx = -\frac{\sin i\omega}{i\pi}\{(-1)^i f(1) - f(0)\} +$$

$$+\frac{\cos i\omega}{i^2\pi^2}\{(-1)^i f'(1) - f'(0)\} - \frac{1}{i^2\pi^2}\int_0^1 \cos(i\pi x - i\omega)\, f''(x)\,dx$$

и доказывает сходимость рядов, общими членами которых являются члены правой части этого равенства. При этом предполагается (не все условия явно оговорены Лобачевским), что функция $f(x)$ в соответствующем интервале равномерно ограничена, имеет не более чем конечное число точек разрыва 1-го рода, функция $f'(x)$ непрерывна [в дальнейшем [3]) Лобачевский показывает, что можно допустить наличие конечного числа точек, где она обращается в бесконечность]. Функция $f''(x)$ может обращаться в бесконечность конечное число раз.

---

[1]) Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1829.

[2]) {1}, стр. 32—35, 40—41, 54—56.

[3]) Стр. 65—66.

Хотя эти условия весьма ограничительны, однако они, в некотором смысле, шире условий Дирихле, так как допускают наличие бесчисленного множества точек экстремума (ограниченность вариации функции $f(x)$ этими условиями обеспечивается).

Далее, для отыскания суммы ряда Фурье Лобачевский повторяет рассуждения Пуассона.

Исходя из разложения

$$\frac{1-\mu^2}{1-2\mu\cos(\pi x-\omega)+\mu^2}=1+2\sum_{i=1}^{\infty}\mu^i\cos(i\pi x-i\omega),$$

справедливого при $|\mu|<1$, он получает

$$\int_0^1\frac{(1-\mu^2)f(x)\,dx}{1-2\mu\cos(\pi x-\omega)+\mu^2}=$$

$$=\int_0^1 f(x)\,dx+2\sum_{i=1}^{\infty}\mu^i\int_0^1\cos(i\pi x-i\omega)f(x)\,dx \qquad \{1\},\ (10a),\ (10b)\,^{1)}$$

и, после ряда выкладок, приходит к равенству

$$f\left(\frac{\omega}{\pi}-0\right)+f\left(\frac{\omega}{\pi}+0\right)=\int_0^1 f(x)\,dx+2\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^1\cos(i\pi x-i\omega)f(x)\,dx.\ \{1\},(13)$$

Хотя в действительности выкладки Лобачевского обосновывают лишь равенство

$$\lim_{\mu\to 1}\int_0^1\frac{(1-\mu^2)f(x)\,dx}{1-2\mu\cos(\pi x-\omega)+\mu^2}=f\left(\frac{\omega}{\pi}-0\right)+f\left(\frac{\omega}{\pi}+0\right),$$

следует заметить, что в отличие от Пуассона[2]), метод которого он излагает, Лобачевский доказал, как мы видели, предварительно сходимость ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^1\cos(i\pi x-i\omega)f(x)\,dx,$$

а так как нетрудно убедиться[3]), что ряд в правой части (10b) сходится относительно μ равномерно при $0\leqslant\mu\leqslant 1$, то предельный переход под знаком суммы в правой части (10b), приводящий к (13), оправдан, и, таким образом, теорема о разложении функции в ряд Фурье доказана Лобачевским, по сути дела, строго.

В связи с рассмотренным выше доказательством Лобачевского сходимости ряда Фурье интересно отметить, что Пуассон впервые попы-

---

[1]) Нумерация формул в этой вводной статье совпадает с нумерацией в тексте Лобачевского.

[2]) Journal de l'école polyt., cahier 19, 1823.

[3]) См. примечание [4] на стр. 221 наст. тома.

тался доказать (при весьма ограничительных условиях) сходимость ряда только в 1833 году[1]), так же как и Лобачевский выполняя интегрирование по частям (но однократное) в формуле общего члена, но доказал лишь стремление общего члена к нулю. Лишь в 1835 году[2]) он, дважды применив интегрирование по частям к общему члену ряда Фурье функции $f(x)$, доказал сходимость этого ряда в интервале $(0, \pi)$ при условии, что $f'(\pi) = f'(0) = 0$ и имея в виду непрерывность функций $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ во всем интервале $(0, \pi)$.

Преобразовав, далее, частную сумму ряда Фурье с помощью интеграла Дирихле, Лобачевский допускает, что в отдельных точках функция $f(x)$ становится бесконечной, оставаясь при этом интегрируемой (что влечет за собой и абсолютную интегрируемость, так как фактически предположено, что с каждой стороны от рассматриваемой точки функция стремится к бесконечности определенного знака), и доказывает, что при этом теорема о разложении функции в ряд Фурье остается справедливой всюду, за исключением точек, в которых функция бесконечна. Тем самым Лобачевский, по существу, пришел к «принципу локализации», много позже сформулированному Риманом[3]); в соответствии с этим принципом сходимость и значение суммы рядв Фурье в данной точке связаны с поведением функции только в окрестности этой точки.

Наконец, пользуясь равенством

$$\frac{1}{2}(\pi - \omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \sin i\omega, \qquad \{1\}, (25)$$

справедливом в интервале $(0, 2\pi)$, положив

$$F_i(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{-i}^{i} \int_{-a}^{a} \cos i(x - \omega) f(x)\, dx, \qquad \{1\}, (26)$$

где на функцию $f(x)$ не наложено никаких ограничений, кроме требования ее интегрируемости (а по существу абсолютной интегрируемости), проинтегрировав обе стороны последнего равенства в пределах от b до c $(-a \leqslant b < c \leqslant a)$ и перейдя к пределу при $i \to \infty$, Лобачевский, пользуясь (25), доказывает, что

$$\lim_{i \to \infty} \int_{b}^{c} F_i(\omega)\, d\omega = \pi \int_{b}^{c} f(x)\, dx. \qquad \{1\}, (27)$$

---

[1]) Poisson — Traité de mécanique, t. I, 1833.

[2]) Poisson — Théorie math. de la chaleur, 1835, стр. 186.

[3]) B. Riemann — Ueber die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe, 1853. Русский перевод в «Сочинениях В. Римана», Гостехиздат, М.—Л., 1948, стр. 225—261.

В равенстве (27) содержится теорема, утверждающая, что почленное интегрирование ряда Фурье функции $f(x)$ (даже расходящегося) приводит к сходящемуся ряду, сумма которого равна интегралу от $f(x)$. Эта теорема была впоследствии вновь доказана Лебегом, но только в 1906 году[1]). Следует, однако, указать, что предельный переход при $i \to \infty$, приводящий к (27), Лобачевским здесь не обосновывается[2]), а отсутствие каких бы то ни было обозначений для предельного перехода и неаккуратность записи [выражающаяся в том, что левая часть (26) обозначена не через $F_i(\omega)$, а через $F(\omega)$, хотя Лобачевский и поясняет, что эта функция зависит от i], приводят к следующему: подменив фактически $\lim\limits_{i \to \infty} \int\limits_b^c F_i(\omega)\, d\omega$ через $\int\limits_b^c \lim\limits_{i \to \infty} F_i(\omega)\, d\omega$, Лобачевский делает из (27) совершенно необоснованный вывод о том, что

$$\lim_{i \to \infty} F_i(\omega) = \pi f(\omega),$$

и считает, что таким образом доказана теорема о разложении функции в ряд Фурье.

В {2} Лобачевский опять возвращается к доказательству теоремы о разложении функции в ряд Фурье.

Для этого он доказывает сходимость ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \sin(i\omega + \alpha),$$

снова получает равенство {1}, (27), преобразует частную сумму ряда Фурье с помощью интеграла Дирихле к виду

$$2F_i(\omega) = \int\limits_{-\pi-\omega}^{\pi-\omega} \frac{\sin\left(i + \frac{1}{2}\right) x}{\sin \frac{x}{2}} f(x + \omega)\, dx$$

и, выполняя в правой части последнего равенства интегрирование по частям, приходит, переходя к пределу при $i \to \infty$, к теореме о разложении функции в ряд Фурье. Функция $f(x)$ при этом предполагается «аналитической» (определение «аналитической» функции см. выше), то-есть условия, налагаемые на $f(x)$, здесь значительно шире, чем в {1}, так как функция $f''(x)$ вообще не участвует в рассуждениях. Эти условия, как уже отмечалось, в определенном смысле шире и условий Дирихле.

Сами рассуждения Лобачевского при доказательстве теоремы являются, по существу, строгими.

---

[1]) Lebesgue — Leçons sur les séries trigonométriques, Paris, 1906.

[2]) См. примечание [8] на стр. 225.

В {3} Лобачевский снова доказывает теорему {1}, (27) и делает на нее такие же необоснованные выводы, как и в {1}. Само доказательство этой теоремы в принципе такое же, как и в {1}, но ему предшествует вывод оценки вида

$$\left|\frac{\pi-x}{2}-\sum_{1}^{i}\frac{\sin ix}{i}\right|<\frac{1}{i}\left(a+\frac{b}{\sin\frac{x}{2}}\right) \qquad (*)$$

или, что то же,

$$\left|\int_0^x \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega}{\sin\frac{\omega}{2}}\,d\omega-\pi\right|<\frac{1}{i}\left(a'+\frac{b'}{\sin\frac{x}{2}}\right),$$

где a, b, a', b' — некоторые положительные постоянные $(0<x<\pi)$. Кроме того, прежде чем интегрировать равенство {1}, (26), он преобразует его правую часть с помощью интеграла Дирихле и говорит, что будет следовать методу Дирихле, который заслуживает предпочтения перед всеми прочими. Между тем, метод Дирихле делает оценку вида

$$\left|\int_0^t \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega}{\sin\frac{\omega}{2}}\,d\omega\right|<C \qquad (**)$$

$(0<t<\pi$, C — постоянная, i — любое целое число) тривиальной, а, как показано в примечании [39], строгое обоснование предельного перехода, ведущего к {1}, (27), основано именно на неравенствах вида (*) и (**).

Последним из основных вопросов, которым посвящены сочинения Лобачевского по теории рядов, является определение, исследование свойств и многочисленные приложения функции гамма[1]). Хотя из заглавия сочинения {2} («Способ ... приближаться к значению функций от весьма больших чисел») можно заключить, что в разделе, посвященном функции гамма, будет итти речь только об асимптотических формулах, в действительности Лобачевский строит весьма оригинальную и достаточно полную теорию этой функции.

В {2}, пользуясь обозначением

$$(x+\alpha)^{\infty x}=(x+\alpha)(x+\alpha-1)\,\ldots\,(\alpha+1),$$

где x — целое и положительное число, Лобачевский вводит функцию $f(x,\alpha)$ (мы несколько изменяем обозначения) при помощи равенства

$$(x+\alpha)^{\infty x}=(x+\alpha)^{x+\alpha+\frac{1}{2}}e^{-x}f(x,\alpha),$$

1) {2}, стр. 97—225, 154—162; {3}, стр. 198—218.

откуда для $|x+\alpha|>1$ получает

$$2\log\frac{f(x-1,\alpha)}{f(x,\alpha)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)(x+\alpha)^{n+1}}.$$

Из сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\log\frac{f(x+k-1,\alpha)}{f(x+k,\alpha)}$$

следует существование при любом α функции

$$\psi(\alpha)=\lim_{x\to\infty}f(x,\alpha).$$

Функция $X(x+\alpha)$ с помощью равенства

$$\log X(x+\alpha)=\sum_{k=1}^{\infty}\log\frac{f(x+k-1,\alpha)}{f(x+k,\alpha)}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)(x+k+\alpha)^{n+1}}$$

определена не только для целых положительных значений x, а для всех значений $x+\alpha$, для которых $|x+\alpha+k|>1$, где k — любое целое положительное число; следовательно, равенство

$$f(x,\alpha)=\psi(\alpha)X(x+\alpha)$$

определяет в указанной области функцию $f(x,\alpha)$, а следовательно, и функцию

$$(x+\alpha)^{\infty x}=\psi(\alpha)(x+\alpha)^{x+\alpha+\frac{1}{2}}e^{-x}X(x+\alpha).$$

и, в частности,

$$x^{\infty x}=\psi(0)x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x}X(x).$$

Так как

$$\lim_{x\to\infty}X(x+\alpha)=1,$$

то при $x\to\infty$ имеет место асимптотическое равенство

$$(x+\alpha)^{\infty x}\approx\psi(\alpha)(x+\alpha)^{x+\alpha+\frac{1}{2}}e^{-x}.$$

Лобачевский находит, что

$$\psi(0)=\sqrt{2\pi}$$

и, следовательно, по определению,

$$x^{\infty x}=\sqrt{2\pi}\,x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x}X(x)=\Gamma(x+1). \qquad \{2\},(32)$$

Эту последнюю формулу приписывают обычно Бинэ; однако Лобачевский пришел к ней на четыре года раньше, чем Бинэ[1]).

После этого Лобачевский переходит к уточнению асимптотической формулы для функции $x^{\infty x}$.

[1]) Journ. de l'école polyt, cahier 27, 1839, стр. 226.

Так как первый член разложения по отрицательным степеням x функции

$$2\log\frac{X(x-1)}{X(x)}$$

совпадает с первым членом аналогичного разложения для

$$2\log\frac{\varphi(x-1)}{\varphi(x)},$$

где $\varphi(x)=e^{\frac{1}{12x}}$, то Лобачевский полагает

$$X(x)=e^{\frac{1}{12x}}f_1(x),$$

то-есть

$$x^{\infty x}=\sqrt{2\pi}\,x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x+\frac{1}{12x}}f_1(x).$$

Продолжая так дальше, Лобачевский получает, член за членом, разложение функции $\log X(x)$ в ряд по отрицательным степеням x (ряд Стирлинга) и показывает, как такое же разложение можно получить из формулы Эйлера — Маклорена. При этом Лобачевский приводит (без доказательства) найденные им рекуррентные формулы для вычисления чисел Бернулли

$$T_m=-\sum_{i=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]}(-1)^i 2^{2i-1}\frac{m-i}{i}(m-1)_c^{\infty 2i-1}T_{m-i}\ ^{1}),$$

где T_i — коэффициенты в разложении

$$\operatorname{tg} x=\sum_{i=1}^{\infty}T_i\frac{x^{2i-1}}{(2i-1)!},$$

связанные с числами Бернулли формулами

$$(-1)^{k+1}B_{2k}=\frac{2kT_k}{2^{2k}(2^{2k}-1)}\qquad (k=1,\ 2,\ \ldots).$$

Далее Лобачевский показывает, что для того, чтобы введенное им определение функции гамма не противоречило определению с помощью эйлерова интеграла, необходимо положить

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha^{\infty\alpha}=\frac{\sqrt{2\pi}\,e^{-\alpha}}{\psi(\alpha)}.$$

Этим равенством определение функции $\alpha^{\infty\alpha}$ распространяется на всю комплексную плоскость[2]) (целые отрицательные значения α являются

---

[1]) В обозначениях Лобачевского (k — целое положительное число)

$$n_c^{\infty k}=\frac{n^{\infty k}}{k!}.$$

[2]) Это обстоятельство Лобачевский отмечает в конце рассматриваемого сочинения, стр. 154—155.

полюсами этой функции). Непротиворечивость этого определения с определением {2}, (32) показана в примечании [10]. Лобачевский выводит основное соотношение:

$$(x+\alpha)^{\infty x+\alpha}=(x+\alpha)^{\infty x}\,\alpha^{\infty\alpha}, \qquad \{2\}, (42)$$

из которого, в частности, далее получает многочисленные свойства функции гамма и которое фактически служит Лобачевскому также для аналитического продолжения функции $(x+\alpha)^{\infty x}$, так как функция $\alpha^{\infty\alpha}$ уже определена во всей плоскости. Не останавливаясь на выводе свойств функции гамма, отметим лишь, что, в частности, Лобачевский пришел к формуле

$$n^{\infty n}=\lim_{r\to\infty}\frac{r^n r!}{(n+1)(n+2)\ldots(n+r)}, \qquad \{2\}, (54)$$

также имеющей место во всей плоскости (кроме целых отрицательных значений n). Эта формула была получена Эйлером еще в 1729 г. (письмо к Гольдбаху), однако впоследствии была забыта, и вновь доказавший ее Гаусс считал, что она найдена им впервые. Лобачевский также считал, что именно он открыл эту формулу.

Не касаясь многочисленных приложений функции гамма к вычислению определенных интегралов и суммированию рядов, отметим, что им было доказано равенство, которое в современных обозначениях имеет вид

$$\int\limits_{p-i\infty}^{p+i\infty}\frac{e^z\,dz}{z^n}=\frac{2\pi i}{\Gamma(n)} \qquad (p>0,\quad \operatorname{Re} n>0). \qquad \{2\}, (113)$$

Этот интеграл был в некоторых частных случаях ранее вычислен Лапласом [1]) и Лежандром [2]). В общем виде в том же году, что и Лобачевский, его вычислил Лиувилль [3]), однако вывод Лиувилля весьма далек от строгости. Представляет интерес также найденное Лобачевским выражение модуля функции гамма в виде ряда с действительными членами [формула {2}, (129) [4])].

В сочинении {3} Лобачевский в качестве определения функции гамма принимает формулу {2}, (54) и совершенно строго доказывает существование предела в правой части этой формулы, исходя из тождества

$$\int\limits_0^{\alpha}\left\{\log r-\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{k+\alpha}\right\}d\alpha=\log\frac{r^{\alpha}r!}{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+r)}$$

(схема этого доказательства была приведена выше, на стр. 18).

---

[1]) La Place, Oeuvres, том VII, стр. 134—135.

[2]) Legendre — Exercises de calcul intégral, том I, 1811, стр. 354.

[3]) Journ. f. reine und angew. Math., 13, 1835.

[4]) Стр. 162.

Он приходит также снова к равенству {2}, (32) тем же способом, что и в {2}, однако не пользуется им для продолжения функции x^{**x}, все время считая x целым положительным числом; непротиворечивость определения {2}, (54) в случае, если n — целое положительное число, с равенством {2} (32) Лобачевский доказывает. В качестве определения функции $n^{**\alpha}$ при любых n и α он принимает равенство {2}, (42) в форме

$$n^{**\alpha}=\frac{n^{**n}}{(n-\alpha)^{**n-\alpha}}.$$

Записав равенство {2}, (32) в виде

$$x^{**x}=\sqrt{2\pi}\,x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x+\varphi(x)},$$

Лобачевский показывает, что коэффициенты A_λ при $x^{-\lambda}$ разложения функции $\varphi(x)$ по отрицательным степеням x определяются из равенства

$$\frac{e^x+1}{e^x-1}=\frac{2}{x}+\sum_{\lambda=1}^{\infty}2\lambda A_\lambda\frac{x^\lambda}{\lambda!}.$$

В {3} Лобачевский выводит также различные свойства функции гамма (однако, менее подробно, чем в {2}), применяет эту функцию к вычислению различных определенных интегралов и, в частности, снова находит интеграл {2}, (113).

Итак, в своих сочинениях по теории рядов Лобачевский получил ряд оригинальных результатов первостепенной важности. К сожалению, эти работы Лобачевского оставались по существу неизвестными до самого последнего времени.

Не подлежит сомнению, что это обстоятельство в немалой степени связано с рапортом М. В. Остроградского, адресованным Академии Наук, в котором он высказал свое отрицательное отношение к присланному ему на отзыв сочинению {3}[1]).

Остроградский обвиняет в этом рапорте Лобачевского в нарочито применяемых странностях при изложении, в пренебрежении «первейшими принципами точного рассуждения», в том, что в работе Лобачевского нет ничего нового. Сам тон рапорта свидетельствует о его предвзятости, связанной с отношением Остроградского к геометрическим работам Лобачевского; Остроградский, впрочем, и не скрывает этого в своем рапорте. Об этом же свидетельствует ни на чем не основанное обвинение Лобачевского в том, будто он приписывает себе открытие возможности определить тригонометрические функции, не прибегая к кругу (при помощи рядов).

---

1) См. приложение 4 на стр. 265 наст. тома.

Конечно, стиль изложения в рассматриваемых сочинениях Лобачевского оставляет желать лучшего, имеется также изрядное количество опечаток и допущенных по невнимательности ошибок, многие рассуждения чересчур лаконичны, имеются и нарушения систематичности изложения. Лобачевский также несколько «злоупотребляет» и своим признаком сходимости, пользуясь всюду только им (это делается им, повидимому, умышленно, для того, чтобы продемонстрировать силу этого признака), хотя в большинстве случаев можно проще решить соответствующую задачу другими общеизвестными средствами. Наконец, как это уже отмечалось, сама запись ведется Лобачевским, порой, небрежно; в частности, не всегда ясно, совершен ли уже предельный переход. Однако не подлежит сомнению, что если бы такой выдающийся математик, как Остроградский, подошел к рассмотрению работы Лобачевского объективно или даже вообще потрудился с ней внимательно познакомиться (он утверждает в рапорте, что работа Лобачевского им тщательно изучена), то он не мог бы проглядеть имеющихся в ней интереснейших результатов (часть из которых, впервые полученных Лобачевским в {1} и {2}, была, правда, к моменту выхода в свет сочинения {3}, вновь получена другими математиками). Совершенно очевидно, что Остроградский внимательно сочинение {3} (не говоря уже о предыдущих работах Лобачевского в этой области) не читал, а ограничился его беглым просмотром.

УЧЕНЫЯ ЗАПИСКИ ИМПЕРАТОРСКАГО КАЗАНСКАГО УНИВЕРСИТЕТА.

1834.

I. НАУКИ.

1. Объ исчезаніи тригонометрическихъ строкъ.

(Н. Лобачевскаго.)

Безконечныя строки, расположенныя въ синусахъ или косинусахъ кратной дуги, названы *тригонометрическими*. Ихъ примѣненіе весьма важно въ интегрированіи линейныхъ уравненій съ частными дифференціалами, а слѣдовательно въ рѣшеніи самыхъ любопытныхъ задачъ изъ Физики и Механики. Между тѣмъ всякая безконечная строка можетъ назваться только аналитическимъ выраженіемъ и оставаться безъ употребленія, покуда ей не принадлежитъ извѣстное значеніе, къ которому она приближается, исчезая въ послѣднихъ членахъ. Вотъ почему тригонометрическія строки были предметомъ подобныхъ изслѣдованій, какъ можно читать въ запискахъ Гг. Коши (Mémoires de l' Acad. d. sciences. an 1823), Дирихле и Дирксенъ (Journal f. d. reine u. angew. Mathem

1*

Первая страница оригинального издания сочинения «Об исчезании тригонометрических строк» (167-я стр. II книжки «Ученых записок Казанского университета» за 1834 г.).

К стр. 31.

ОБ ИСЧЕЗАНИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СТРОК

[I] *

1834 II 167 Бесконечные строки *, расположенные в синусах или косинусах кратной дуги, названы *тригонометрическими*. Их применение весьма важно в интегрировании линейных уравнений с частными дифференциалами, а следовательно в решении самых любопытных задач из Физики и Механики. Между тем всякая бесконечная строка может назваться только аналитическим выражением и оставаться без употребления, покуда ей не принадлежит известное значение, к которому она приближается, исчезая в последних членах. Вот почему тригонометрические строки были предметом подобных исследований, как можно читать в записках Гг. Коши (Mémoires de l'Acad. d. sciences. an 1823), Дирихле и Дирксен (Journal f. d.
168 reine u. angew. Mathem. | 1829. S. 157, Sur la convergence des séries trigonométriques. Par M. Lejeune-Dirichlet; S. 170, Ueber d. Convergenz nach den Sinussen u. Cosinussen der Vielfachen eines Winkels fortschr. Reihe. Von. H. Dirksen). О сочинении Г. Коши дал уже свое мнение Г. Дирихле, который и сам, кажется, без должной осторожности допускает исчезание строки ⊘

$$\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin\varphi}{\varphi}\,d\varphi+\int\limits_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin\varphi}{\varphi}\,d\varphi+\int\limits_{2\pi}^{3\pi}\frac{\sin\varphi}{\varphi}\,d\varphi+\ldots$$

потому только, что знак меняется в членах, которых сумма должна представлять

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin\varphi}{\varphi}\,d\varphi=\frac{1}{2}\pi$$

* Текст Лобачевского на главы не расчленен. Номера подразделений сочинений по теории рядов введены редакцией; условные их названия перечислены во вводной статье (стр. 14 наст. тома).

* В современной терминологии — *бесконечные ряды*.

⊘ В современной терминологии — *сходимость ряда*.

значение определенного интеграла, давно принятое Математиками и может быть также без дальней строгости [1]. Если мне и показалось, что в названных сочинениях находятся какие нибудь недостатки, то я хочу однако ж ограничиться одним только замечанием, менее даже важным, нежели другие, а именно тем, что здесь первым основанием служит предположение, будто строка

$$\sin\omega + \frac{1}{2}\sin 2\omega + \frac{1}{3}\sin 3\omega + \ldots \tag{1}$$

исчезает для всякого ω, на что однако ж хотелось мне сыскать наперед совершенно удовлетворительное доказательство. Чтобы судить об исчезании тригонометрической строки, стоит только взглянуть на уравнение

169 | $$\int_0^1 \cos(i\pi x - i\omega) f(x)\,dx = -\frac{\sin i\omega}{i\pi}\{(-1)^i f(1) - f(0)\} +$$
$$+\frac{\cos i\omega}{i^2\pi^2}\{(-1)^i f'(1) - f'(0)\} - \frac{1}{i^2\pi^2}\int_0^1 \cos(i\pi x - i\omega) f''(x)\,dx, \tag{2}$$

которое легко вывести помощию интегрирования по частям и где i целое положительное, x и ω произвольные числа, π содержание* окружности к поперечнику,

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x), \quad \frac{d^2f(x)}{dx^2} = f''(x).$$

Здесь можно видеть с первого раза, в чем должно заключаться доказательство на исчезание строки

$$\sum \int_0^1 \cos i\pi(x-\omega)\,d\omega\, f(\omega) \qquad \begin{cases} i=0 \\ i=\infty \end{cases}, \tag{3}$$

для всякой функции $f(\omega)$, как скоро исчезание строки (1) уже допущено.

Итак я начну сперва говорить о сумме

$$\sum \frac{1}{i}\sin i\omega \qquad \begin{cases} i=1 \\ i=\infty. \end{cases} \tag{4}$$

Пусть она прерывается на $i=2^n$. Соединяя по два члена в ряду, получим

$$\sum_1^{2^n} \frac{1}{i}\sin i\omega = \sum_1^{2^{n-1}} \frac{\sin(2i-1)\omega}{2i(2i-1)} + \cos\frac{1}{2}\omega \sum_1^{2^{n-1}} \frac{1}{i}\sin\left(2i-\frac{1}{2}\right)\omega.$$

---

* То-есть *отношение.* Лобачевский всегда применяет слово *содержание* в этом смысле.

170 Подобным образом

$$\sum_{1}^{2^{n-1}}\frac{1}{i}\sin\left(2i-\frac{1}{2}\right)\omega=\sum_{1}^{2^{n-2}}\frac{\sin\left(4i-\frac{5}{2}\right)\omega}{2i\,(2i-1)}+\cos\omega\sum_{1}^{2^{n-2}}\frac{1}{i}\sin\left(4i-\frac{3}{2}\right)\omega,$$

$$\sum_{1}^{2^{n-2}}\frac{1}{i}\sin\left(4i-\frac{3}{2}\right)\omega=\sum_{1}^{2^{n-3}}\frac{\sin\left(8i-\frac{11}{2}\right)\omega}{2i\,(2i-1)}+\cos 2\omega\sum_{1}^{2^{n-3}}\frac{1}{i}\sin\left(8i-\frac{7}{2}\right)\omega,$$

$$\sum_{1}^{2^{n-3}}\frac{1}{i}\sin\left(8i-\frac{7}{2}\right)\omega=\sum_{1}^{2^{n-4}}\frac{\sin\left(16i-\frac{23}{2}\right)\omega}{2i\,(2i-1)}+\cos 4\omega\sum_{1}^{2^{n-4}}\frac{1}{i}\sin\left(16i-\frac{15}{2}\right)\omega.$$

Вообще для всякого целого положительного числа r

$$\sum_{1}^{2^{n-r}}\frac{1}{i}\sin\left(2^{r}i-\frac{2^{r}-1}{2}\right)\omega=\sum_{1}^{2^{n-r-1}}\frac{\sin\left(2^{r+1}i-\frac{3\cdot 2^{r}-1}{2}\right)\omega}{2i\,(2i-1)}+$$

$$+\cos(2^{r-1}\omega)\sum_{1}^{2^{n-r-1}}\frac{1}{i}\sin\left(2^{r+1}i-\frac{2^{r+1}-1}{2}\right)\omega.$$

Из всех уравнений выводим

$$\sum_{1}^{2^{n}}\frac{1}{i}\sin i\omega=\sum_{1}^{2^{n-1}}\frac{\sin(2i-1)\omega}{2i\,(2i-1)}+$$

$$+\cos\frac{1}{2}\omega\sum_{1}^{2^{n-2}}\frac{\sin\left(4i-\frac{5}{2}\right)\omega}{2i\,(2i-1)}+$$

$$+\cos\frac{1}{2}\omega\cos\omega\sum_{1}^{2^{n-3}}\frac{\sin\left(8i-\frac{11}{2}\right)\omega}{2i\,(2i-1)}+$$

$$+\cos\frac{1}{2}\omega\cos\omega\cos 2\omega\sum_{1}^{2^{n-4}}\frac{\sin\left(16i-\frac{23}{2}\right)\omega}{2i\,(2i-1)}+$$

$+$ и проч.

171 $$+\cos\frac{1}{2}\omega\cos\omega\ldots\cos(2^{r-3}\omega)\sum_{1}^{2^{n-r}}\frac{\sin\left(2^{r}i-\frac{3\cdot 2^{r-1}-1}{2}\right)\omega}{2i\,(2i-1)}+$$

$$+\cos\frac{1}{2}\omega\cos\omega\ldots\cos(2^{r-2}\omega)\sum_{1}^{2^{n-r}}\frac{1}{i}\sin\left(2^{r}i-\frac{2^{r}-1}{2}\right)\omega.$$

А если делаем $r = n$, то

$$\sum_{1}^{2^n} \frac{1}{i} \sin i\omega = \sum_{1}^{2^{n-1}} \frac{\sin(2i-1)\omega}{2i(2i-1)} +$$

$$+ \sum_{r=2}^{r=n} \cos\frac{1}{2}\omega \cos\omega \ldots \cos(2^{r-3}\omega) \sum_{1}^{2^{n-r}} \frac{\sin\left(2^r i - \frac{3\cdot 2^{r-1}-1}{2}\right)\omega}{2i(2i-1)} +$$

$$+ \cos\frac{1}{2}\omega \cos\omega \cos 2\omega \ldots \cos(2^{n-2}\omega) \sin\frac{2^n+1}{2}\omega. \qquad (5)$$

Последний член, какая бы дуга $\omega < \pi$ ни была *, с возрастанием n или должен делаться нулем, или по крайней мере не чувствительным. Он делается нулем и один раз навсегда уничтожается, когда в

$$\omega = \pi \sum 2^{-p}$$

число членов ограничено ⋆. Если ж оно бесконечно, и следовательно между целыми отрицательными показателями $-p$ будет недоставать также бесконечно много целых чисел ⊘, то с каждым пропущенным членом ♀ $\pi 2^{-q}$ будет по величине ‡

172 $$\cos(2^{q-2}\omega) < \sqrt{\frac{1}{2}},$$

---

* Лобачевский проводит доказательство в случае, когда $0 < \omega < \pi$. При $\omega = 0$ и $\omega = \pi$ равенство нулю рассматриваемого выражения очевидно, так как обращается в нуль либо первый, либо последний множитель.

⋆ Если в выражении

$$\omega = \pi \sum_{p=1}^{\infty} a_p 2^{-p},$$

где a_p принимает только значения 0 и 1, число членов, для которых $a_p = 1$, конечно, то

$$\omega = \frac{n\pi}{2^q},$$

где n и q — целые положительные числа и n — нечетное. Но тогда множитель $\cos 2^m\omega$, где $m = 2^{q-1}$, обращается в нуль.

⊘ Если число членов суммы

$$\sum_{p=1}^{\infty} a_p 2^{-p},$$

для которых $a_p = 0$, конечно, то так же, как и в предыдущем случае, $\omega = \frac{n\pi}{2^q}$, где n и q — целые положительные числа и n — нечетное число.

♀ То-есть таким, что $a_q = 0$.

‡ «По величине» всегда обозначает у Лобачевского «по абсолютной величине».

а произведение

$$\cos\frac{1}{2}\omega\cos\omega\cos 2\omega\ldots$$

по крайней мере уменьшаться в содержании к $\sqrt{\frac{1}{2}}$ и наконец делаться нечувствительным.

Теперь во второй части уравнения (5) принимаем все остальные члены за положительные и увеличиваем, поставивши единицы вместо синусов. После этого можно всегда взять n довольно большое число, чтобы по величине

$$\sum_{1}^{2^n}\frac{1}{i}\sin i\omega < \sum_{1}^{\infty}\frac{1}{2i(2i-1)}\left\{1+\sum_{r=2}^{r=n}\cos\frac{1}{2}\omega\cos\omega\ldots\cos(2^{r-3}\omega)\right\}.$$

[II]

Рассматриваем наперед производитель *

$$L=\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{2i(2i-1)}.$$

Доказать исчезание этой строки можем по способу, который изложен в моей Алгебре (Алгебра или Вычисление конечных 1834 г. стр. 337 *) и который применяется ко всем подобным случаям ⊘. Полагаем, что для какого нибудь i дробь

$$\frac{1}{2i(2i-1)},$$

373 |будучи разложена по степеням $\frac{1}{2}$, дает самую низшую степень 2^{-r} и которая следовательно встречается не далее, как до члена

$$\frac{1}{4i(4i-1)},$$

* То-есть множитель.

* Страница указана Лобачевским по оригинальному изданию сочинения «Алгебра или вычисление конечных». Она соответствует странице 233 IV тома наст. издания (статья 182).

⊘ Способ, о котором говорит здесь Лобачевский, представляет собой, по сути дела, необходимый и достаточный признак сходимости ряда с положительным и монотонно невозрастающим общим членом. Этим признаком Лобачевский пользуется почти во всех своих сочинениях по анализу (см. вводную статью, стр. 20 наст. тома). Подробное обоснование этого признака дано в приложении 1 (стр. 252 наст. тома).

потому что для всякого $i>1$

$$4i(4i-1)-4i(2i-1)>0\,^{*}.$$

Итак

$$L<\sum_{r=1}^{r=\infty} i\,2^{1-r\,\star}.$$

Между тем неравенство $\frac{1}{2i(2i-1)}>2^{-r}$ дает

$$i<2^{\frac{r-1}{2}\,\varnothing}.$$

После чего

$$L<\sum_{1}^{\infty}2^{-\frac{r-1}{2}} \quad \text{или} \quad L<\frac{2+\sqrt{2}}{2}\,^{♀}.$$

174 | Если бы в таком суммовании, остановившись на известном члене, захотели судить о величине остатка в строке, то не трудно видеть, что вообще

$$\sum_{i}^{\infty}\frac{1}{2i(2i-1)}<\sum_{r}^{\infty}2^{-\frac{r-1}{2}}, \qquad [5а]$$

начиная с r, которое удовлетворяет условию

$$2i(2i-1)<2^{r}\,^{‡}$$

---

* Из этого неравенства следует, что

$$\frac{1}{4i(4i-1)}<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2i(2i-1)}.$$

Если, как предположено, разложение $\frac{1}{2i(2i-1)}$ в двоичную дробь начинается с члена 2^{-r}, то $\frac{1}{2i(2i-1)}\leqslant 2^{1-r}$, и, следовательно,

$$\frac{1}{4i(4i-1)}<2^{-r}.$$

Таким образом, число $\frac{1}{4i(4i-1)}$ уже не содержит в своем разложении члена 2^{-r}.

⋆ Здесь i — число членов ряда, содержащих в своем двоичном разложении на первом месте член 2^{-r} и, следовательно, меньших чем 2^{1-r}.

∅ Эта оценка слишком грубая. Из предыдущего неравенства следует, что

$$i<2^{\frac{r}{2}-1}.$$

♀ В оригинале $L<2+\sqrt{2}$.

‡ В этом неравенстве i и r — наименьшие значения индексов суммирования в левой и правой частях [5а].

Наименьшее значение индекса r должно быть таким, чтобы хоть какой-нибудь (а следовательно, первый) член ряда в левой части [5а] содержал в своем двоичном разложении 2^{-r}, а значит, был больше чем 2^{-r}.

и откуда находим

$$2^{-\frac{r-1}{2}} < \sqrt{\frac{1}{i(2i-1)}}\ ^{*}; \qquad [5b]$$

следовательно

$$\sum_{i}^{\infty} \frac{1}{2i(2i-1)} < \frac{2(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2i(2i-1)}}^{\star}, \qquad [5c]$$

значение, которое исчезает с возрастанием i. Например, взявши $i=3$, получим

$$L < 1{,}47^{\oslash}.$$

Чтобы пояснить более применение нашего способа, берем еще другую бесконечную строку, которая в последствии будет нужна

$$M = \sum \frac{1}{i^2}$$

375 и которая необходимо исчезает вместе с L, потому что $M < 4L$. Полагаем

$$i^2 = 2^r$$

или непосредственно ♀

$$i^2 < 2^r$$

с целым показателем r. После чего

$$\sum_{i}^{\infty} \frac{1}{i^2} < \sum_{r}^{\infty} i 2^{1-r} < \sum_{r}^{\infty} 2^{1-\frac{1}{2}r} < (2+\sqrt{2})\, 2^{1-\frac{1}{2}r} < \frac{4+2\sqrt{2}}{i}.$$

Для $i=4$ находим

$$\sum_{i=4}^{i=\infty} \frac{1}{i^2} < 1{,}71,$$

$$M < 3{,}07^{\ddagger}.$$

---

* Здесь i и r обозначают то же, что и в предыдущем неравенстве; следовательно, левая часть этого неравенства является первым членом ряда в правой части [5a].

⋆ В оригинале в правой части неравенства [5c] отсутствует множитель 2. Так как

$$\sum_{r}^{\infty} 2^{-\frac{r-1}{2}} = 2^{-\frac{r-1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-\frac{k}{2}} = 2^{-\frac{r-1}{2}} \cdot \sqrt{2}\,(\sqrt{2}+1),$$

то с учетом [5b] получаем [5c].

⊘ В оригинале $L < 1{,}02$. Эта ошибка связана с отмеченной выше ошибкой в [5c].

♀ То-есть i — наибольшее целое число, для которого выполнено следующее далее неравенство.

‡ В оригинале $\sum_{i=4}^{i=\infty} \frac{1}{i^2} < 1{,}08$, $M < 2{,}45$.

Другой способ предложим еще следующий. Пусть для какого нибудь i

$$2i(2i-1)=\alpha^2.$$

Для всякого другого $i' > i$,

176 $$\frac{1}{2i'(2i'-1)}=\sum\frac{A}{\alpha^{2n}},$$

где $A < \alpha^2$ и где знак суммы относится к целым положительным числам n *. Пусть далее N то целое, которое дает

$$2N(2N-1)=\alpha^{2n}$$

или непосредственно

$$2N(2N-1)<\alpha^{2n}\,{}^{*}.$$

Отсюда

$$N \lesseqgtr \frac{1+\sqrt{1+4\alpha^{2n}}}{4}\ {}^{\varnothing}. \qquad [5d]$$

---

* A зависит здесь только от i'.

Так как

$$\sum_{n=m}^{\infty}\frac{1}{(\alpha^2)^n}=\frac{1}{\alpha^{2m}}\cdot\frac{\alpha^2}{\alpha^2-1},$$

то ко всякому члену ряда $a_{i'}$ можно подобрать такое k, что

$$\frac{1}{\alpha^{2k}}<a_{i'}\leqslant\frac{1}{\alpha^{2k-2}},$$

и такое A_k, удовлетворяющее условию $\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2}<A_k\leqslant\alpha^2-1$, что имеет место разложение

$$a_{i'}=A_k\sum_{m=k}^{\infty}\frac{1}{\alpha^{2m}}. \qquad (a)$$

* То-есть N — наибольший номер члена ряда, превосходящего $\frac{1}{\alpha^{2n}}$ и, следовательно, содержащего $\frac{1}{\alpha^{2n}}$ в своем разложении (a). Тогда количество членов ряда

$$\sum_{m=i+1}^{\infty}a_m,$$

содержащих в своих разложениях $\frac{1}{\alpha^{2n}}$, не превосходит $N-i$, а сумма всех членов разложений вида $\frac{A}{\alpha^{2n}}$ не превосходит $\frac{\alpha^2-1}{\alpha^{2n}}(N-i)$.

$^{\varnothing}$ В оригинале

$$N \lesseqgtr \frac{1+\sqrt{1+8\alpha^{2n}}}{4}.$$

После чего

$$\sum_i^{\infty}\frac{1}{2i(2i-1)}<\frac{1}{\alpha^2}+\frac{\alpha^2-1}{\alpha^4}\left(\frac{1+\sqrt{1+4\alpha^4}}{4}-i\right)+$$
$$+\frac{\alpha^2-1}{\alpha^6}\left(\frac{1+\sqrt{1+4\alpha^6}}{4}-i\right)+\frac{\alpha^2-1}{\alpha^8}\left(\frac{1+\sqrt{1+4\alpha^8}}{4}-i\right)+$$
$$+\text{ и т. д.}^{*} \qquad [5e]$$

Отбрасываем везде единицу под квадратным корнем:

$$\sum_i^{\infty}\frac{1}{2i(2i-1)}<\frac{5-4i}{4\alpha^2}+\frac{\alpha+1}{2\alpha}^{*}. \qquad [5f]$$

177 |Полагаем $i=2$:

$$\sum_{i=2}^{i=\infty}\frac{1}{2i(2i-1)}<-\frac{1}{16}+\frac{1+2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}},$$
$$L<\frac{7}{16}+\frac{1+2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}<1{,}09^{\oslash}.$$

---

* В оригинале под знаком каждого радикала в правой части этого неравенства коэффициент при втором члене не 4, а 8. Это связано с отмеченной выше ошибкой в неравенстве [5d].

* В оригинале в связи с отмеченной выше ошибкой неравенство [5f] имеет вид

$$\sum_i^{\infty}\frac{1}{2i(2i-1)}<\frac{5-4i}{4\alpha^2}+\frac{\alpha+1}{\alpha\sqrt{2}}.$$

Однако даже исправленное нами неравенство [5f] не обосновано, так как отбрасывание первых слагаемых под знаками радикалов уменьшает правую часть [5e]. Для получения обоснованной оценки можно под знаком каждого радикала заменить первое слагаемое через α^2 или даже через $\frac{\alpha^2}{2}$, так как в рассматриваемом случае $\alpha^2\geqslant 2$ при всяком i.

⊘ В оригинале последние неравенства в связи с ошибкой, идущей от неверного неравенства [5d], имеют вид

$$\sum_{i=2}^{i=\infty}\frac{1}{2i(2i-1)}<-\frac{1}{16}+\frac{1+2\sqrt{2}}{2\sqrt{6}},$$
$$L<\frac{7}{16}+\frac{1+2\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}<1{,}40.$$

Однако исправленные в тексте неравенства также не обоснованы, так как они получены из неравенства [5f]. Правильные оценки можно получить способом, указанным в предыдущей сноске.

[III]

Переходим к другой строке

$$\sum_{1}^{2^n} \frac{1}{i} \sin i\omega < L \left\{ 1 + \sum_{r=2}^{r=n} \cos \frac{1}{2}\omega \cos\omega \cos 2\omega \dots \cos(2^{r-3}\omega) \right\}.$$

Заметим, что

$$\cos\frac{1}{2}\omega\cos\omega = \frac{\sin 2\omega}{2^2 \sin\frac{1}{2}\omega}, \quad \cos\frac{1}{2}\omega\cos\omega\cos 2\omega = \frac{\sin 4\omega}{2^3 \sin\frac{1}{2}\omega}.$$

Вообще

$$\cos\frac{1}{2}\omega\cos\omega \dots \cos(2^{r-3}\omega) = \frac{\sin 2^{r-2}\omega}{2^{r-1}\sin\frac{1}{2}\omega}$$

и следовательно

$$\sum_{1}^{2^n} \frac{1}{i}\sin i\omega < L\left\{1 + \sum_{r=1}^{r=n-1} \frac{\sin(2^{r-1}\omega)}{2^r \sin\frac{1}{2}\omega}\right\}.$$

Принимая на правой стороне все синусы в числителях за единицы, находим

178
$$\sum_{1}^{2^n} \frac{1}{i}\sin i\omega < L\left(1 + \frac{1-2^{1-n}}{\sin\frac{1}{2}\omega}\right),$$

а полагая $n=\infty$, переходим к строке (4)

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{i}\sin i\omega < L\left(1 + \frac{1}{\sin\frac{1}{2}\omega}\right)^{*}.$$

---

* В левой части этого неравенства стоит абсолютная величина предполагаемой суммы ряда, а не сумма ряда, составленного из абсолютных величин соответствующих членов; однако сходимость ряда (1) тем не менее следует из рассуждений Лобачевского, так как предшествующие выкладки показывают, что ряды, получаемые в правой части равенства (5) (на стр. 34) при $n=\infty$, сходятся (и притом даже абсолютно), а разность между частной суммой $\sum_{i=1}^{m} \frac{\sin i\omega}{i}$ и суммой, стоящей в правой части (5) при соответствующем выборе n, как нетрудно показать, стремится к нулю при $m \to \infty$ (см., например, найденное Лобачевским неравенство [18a] на стр. 191).

Обратимся теперь к уравнению (2), откуда выводим бесконечную строку

$$\sum_{i=1}^{i=\infty}\int_0^1 \cos(i\pi x - i\omega) f(x)\,dx =$$

$$= -\sum_1^\infty \frac{\sin i\omega}{i\pi}[(-1)^i f(1) - f(0)] + \sum_1^\infty \frac{\cos i\omega}{i^2\pi^2}[(-1)^i f'(1) - f'(0)] -$$

$$- \sum_1^\infty \int_0^1 \frac{1}{i^2\pi^2}\cos(i\pi x - i\omega) f''(x)\,dx. \qquad (6)$$

Здесь по величине

$$\sum_1^\infty \frac{\sin i\omega}{i\pi}[(-1)^i f(1) - f(0)] < AL\left(1 + \frac{1}{\sin\frac{1}{2}\omega}\right)^*,$$

$$\sum_1^\infty \frac{\cos i\omega}{i^2\pi^2}[(-1)^i f'(1) - f'(0)] < BM,$$

где A по величине самое большое из двух

$$\frac{f(1)+f(0)}{\pi}, \quad \frac{f(1)-f(0)}{\pi},$$

175 |B таким же образом самое большое из двух

$$\frac{f'(1)+f'(0)}{\pi}, \quad \frac{f'(1)-f'(0)}{\pi}.$$

Остается в уравнении (6) рассмотреть бесконечную строку

$$\sum_1^\infty \int_0^1 \frac{1}{i^2}\cos(i\pi x - i\omega) f''(x)\,dx$$

для $f''(x)$ произвольной функции. Прежде однако ж нахожу нужным сказать несколько слов вообще о дифференцировании и интегрировании.

* Эта оценка (в левой части подразумевается знак абсолютной величины) — необоснованная. Для получения правильной оценки нужно применить отдельно к каждому из рядов

$$\sum_{i=0}^\infty \frac{1}{2i+1}\sin(2i+1)\,\omega \;\text{ и }\; \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{i}\sin 2i\omega$$

рассуждения, примененные выше к ряду (4).

[IV]

Пишем для краткости $\varphi(x)$ вместо

$$\frac{df(x)}{dx}.$$

Под $\varphi(x)$ должно разуметь функцию от x, которая происходит в уравнении

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\varphi(x)+H,$$

когда с уменьшением h исчезает H. Обратно

$$f(x)=\int\varphi(x)\,dx$$

такая функция от x, которой дифференциал дает $\varphi(x)$ или, все равно, которая* представляет границу приближения, когда в содержании

180 $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

h уменьшается. Как скоро это условие выполнено, то $f(x)$ определено достаточно, кроме того, что $f(x)$ допускает еще прибавление произвольного постоянного. Действительно, пусть

$$\int\varphi(x)\,dx=f(x)+F(x).$$

Надобно, чтобы

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\varphi(x)+H',$$

где H' исчезает вместе с h и H, а следовательно

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

тоже должно исчезать вместе с h, не представляя никакого постепенного и непрерывного изменения с x*. Между тем, если это содержание зависит от x и h вместе, то с уничтожением h должно бы еще оставаться функцией от x, а потому оно и для всякого h не может быть функцией от x. Это значит, что $F(x)$ постоянное.

* Вместо слова «которая» должно быть «по отношению к которой $\varphi(x)$».

* То-есть величина $\lim\limits_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ равна нулю тождественно (независимо от x).

Впрочем, заключение, будто функция от двух переменных чисел x, h для $h=0$ остается еще функцией от x*, во всей обширности понятия было бы несправедливо, а потому и нужно обратить внимание на то, каким образом

181 |
$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

принадлежит именно к тем функциям от двух чисел x, h, которые всякий раз делаются функциями от x, если $h=0$ и если $F(x)$ действительно изменяется вместе с x.

Общее понятие требует, чтобы функцией от x называть число, которое дается для каждого x и вместе с x постепенно ⋆ изменяется. Значение функции может быть дано или аналитическим выражением, или условием, которое подает средство испытывать все числа и выбирать одно из них; или наконец зависимость может существовать и оставаться неизвестной. Например x^3 функция от x, которая выражается аналитически; но корень в уравнении пятой степени будет функция последнего члена⊘, для которой аналитического выражения еще не найдено и которая определяется самым уравнением, как условием. В строгом смысле должно сказать, что ни тех и ни других функций значения не даются прямо, но всегда ограничиваются условными уравнениями, а потому и вычисляются большею частию только приблизительно. Например квадратный корень целого числа, если не будет также целое, выражается уже бесконечной дробью, где десятичные одна за другой отыскиваются помощию испытания. Наконец условия, которым функция подчи-
182 нена, могут быть еще неизвестны, | тогда как зависимость чисел уже существует несомнительно. В таком случае предположение, будто функция выражается аналитически, должно назваться произвольным. Правда, что еще не встречено таких примеров, где бы зависимость чисел не могла быть представлена прямо или условно аналитическим выражением; однако ж нельзя быть уверену совер-

---

* То-есть не может обратиться в постоянную величину.

⋆ Здесь (как и во многих других местах), слово «постепенно» применяется *не как математический термин, равносильный современному термину «непрерывно»*. Смысл фразы, очевидно, состоит в том, что значения функции даются для каждого x и изменяются *по мере того*, как изменяется x. См. об этом во вводной статье, стр. 15—16 наст. тома.

⊘ При заданных значениях коэффициентов.

шенно и в том, чтобы другое предположение не привело также и к новому решению. В рассуждении моем о началах Геометрии (Каз. Вест. 1830 г.) принимал я зависимость угла от расстояния вершины до точки на боку, где перпендикул делается с другим боком параллелен, разумея под линией параллельной такую, которая начинает пересекать с малейшей переменой направления к одной стороне*. Ясно, что здесь понятие о зависимости заключается в самом определении; но допускать какое нибудь аналитическое выражение, значило бы ограничивать уже обширность предположения. Вот почему, означая x расстояние вершины от перпендикула, назвал я $\mathrm{F}(x)$ самый угол, нисколько однако ж не разумея под этим знаком какую нибудь аналитическую функцию от x, а желая только сказать, что угол $\mathrm{F}(x)$ всякий раз дан вместе с расстоянием x. В последствии уже доказывается, что $\mathrm{F}(x)$ действительно аналитическая функция и определяется уравнением

$$\cot\frac{1}{2}\mathrm{F}(x)=e^{x},$$

183 где e основание Нелперовых логарифмов⋆. Кажется нельзя сомневаться ни в истине того, что всё в мире может быть представлено числами; ни в справедливости того, что всякая в нем перемена и отношение выражается аналитической функцией. Между тем обширный взгляд теории допускает существование зависимости только в том смысле, чтобы числа, одни с другими в связи, принимать как бы данными вместе⊘. Лагранж в своем вычислении функций (Calcul des fonctions), которым хотел заменить дифференциальное, столько же, следовательно, повредил обширности понятия, сколько думал выиграть в строгости суждения.

Итак под названием функции должно вообще разуметь число, которого постепенные♀ изменения даны и зависят от изменений другого, хотя бы совершенно неизвестным образом. Означаем $F(x)$

---

* См. том I наст. издания, стр. 195. Речь идет о функции Лобачевского $\Pi(x)$, которая в сочинении «О началах геометрии» обозначалась через $\mathrm{F}(x)$.

⋆ См. том I наст. издания, стр. 205, формула (12).

⊘ В этой фразе содержится строгое определение понятия функциональной зависимости. Дирихле сформулировал определение функции, равносильное определению Лобачевского, тремя годами позднее (в 1837 г.). См. вводную статью, стр. 15 и 16 наст. тома.

♀ Слово «постепенные» здесь имеет смысл «*последовательные*».

функцию от x, которая, меняясь с x, непрестанно возрастает * от определенного x до $x=a$. Разделяем $a-x$ на i равных частей и полагаем

$$\frac{a-x}{i}=h.$$

Пусть числа в ряду

$$F(x),\ F(x+h),\ F(x+2h),\ \ldots,\ F(a)$$

184 | всегда известны, как бы ни было мало h, которое уменьшается беспредельно с возрастанием i. Содержание

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

должно изменяться вместе с h. Пусть для $i'>i$ $\frac{a-x}{i'}=h'$. Если к тому

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-\frac{F(x+h')-F(x)}{h'}=E$$

или, все то же, если

$$\frac{h'F(x+h)-hF(x+h')+(h-h')F(x)}{hh'}=E$$

для всякого x постепенно уменьшается вместе с h до того, что может сделаться как угодно малым, то функция $F(x)$ получает название *непрерывной* * и предполагает для содержания

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

границу, к которой ведет постепенное уменьшение h и которая будет

185 |
$$\frac{dF(x)}{dx}.$$

Напротив, если E с уменьшением h приближается к какому нибудь числу более нуля и перейти за такое число не может, то функция $F(x)$ разделяется на две, которых соединение представляет точку грубого излома в кривизне линии ⊘, где оканчиваются

---

* Это ограничение нужно Лобачевскому только для того, чтобы разностные отношения $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ были положительны и чтобы избежать, таким образом, необходимости говорить об их абсолютных величинах.

* Слово «непрерывная» Лобачевский всегда употребляет вместо *«дифференцируемая»*, а вместо современного «непрерывная» говорит *«постепенная»* (см. стр. 49 наст. тома). См. также вводную статью, стр. 15—16.

⊘ Речь здесь идет о нарушении гладкости линии, а не об «изломе в кривизне» в современном смысле, который связан с поведением второй производной.

вершины ордонат $F(x)$, перпендикулярных к оси x. Если этот перелом кривизны происходит именно в точке, которой координаты $x, F(x)$, то полагая $h' = -h$, получим выражение

$$\frac{F(x+h)+F(x-h)-2F(x)}{h},$$

которое для непрерывной функции $F(x)$ уменьшается беспредельно с h, а для ломаных функций $F(x)$ и для некоторых x не переступает за известную границу уменьшения*.

Когда число i так велико, что разность

$$F(x+h)-F(x)$$

для всякого x нечувствительна, тогда все данные значения $F(x)$, от $x=\alpha$ до $x=a$, могут быть заменены аналитическим выражением

$$F(x)=F(\alpha)+\xi\,\Delta F(\alpha)+\xi_c^{\infty 2}\Delta^2F(\alpha)+\ldots+\xi_c^{\infty i}\Delta^iF(\alpha)^{\star}, \qquad (7)$$

185 где

$$\frac{a-\alpha}{i}=\omega, \quad \frac{x-\alpha}{\omega}=\xi,$$

$$\Delta F(\alpha)=F(\alpha+\omega)-F(\alpha),$$
$$\Delta^2F(\alpha)=F(\alpha+2\omega)-2F(\alpha+\omega)+F(\alpha),$$
$$\vdots$$
$$\Delta^iF(\alpha)=F(a)-iF(a-\alpha)+i_c^{\infty 2}F(a-2\alpha)-\ldots$$

Если к этому полагаем

$$\left.\begin{aligned} \Delta F(x) &= \Delta F(\alpha)+\xi\Delta^2F(\alpha)+\ldots+\xi_c^{\infty i-1}\Delta^iF(\alpha),\\ \Delta^2F(x) &= \qquad\qquad \Delta^2F(\alpha)+\ldots+\xi_c^{\infty i-2}\Delta^iF(\alpha)\\ &\text{и т. д.,} \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

то содержание

$$\frac{F(x+\lambda\omega)-F(x)}{\lambda\omega}$$

с уменьшением λ приближается к границе

$$\frac{i}{a-\alpha}\left\{\Delta F(x)-\frac{1}{2}\Delta^2F(x)+\frac{1}{3}\Delta^3F(x)-\ldots\right\}^{\oslash},$$

---

* Вторая часть утверждения неверна. Указанное выражение может стремиться к нулю, когда $F(x)$ не дифференцируема (и даже когда эта функция разрывна) в точке x.

⋆ Лобачевский здесь (и всюду вообще) применяет обозначение

$$n_c^{\infty m}=\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}$$

⊘ Выражение, стоящее в правой части внутри фигурной скобки, представляет собой коэффициент при первой степени λ в разложении $F(x+\lambda\omega)-F(x)$, которое нетрудно получить из предыдущих формул.

которая может почитаться только в том случае за

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{F(x+\omega)-F(x)}{\omega}$$

для $\omega=0$, когда функция $F(x)$ непрерывная и когда, следовательно, с уменьшением ω исчезает вместе

167 | $$\frac{1}{\omega}\Delta^2 F(x), \qquad \frac{1}{\omega}\Delta^3 F(x)\ldots$$

Пусть теперь

$$\frac{dF(x)}{dx}=0$$

для всякого x от $x=\alpha$ до $x=a$, и для которых значений рассматриваем также все числа $F(x)$ данными. Увеличивая число i, должны находить

$$\frac{F(x+\omega)-F(x)}{\omega}=\frac{dF(x)}{dx}+k,$$

где число k с возрастанием i уменьшается и делается наконец нечувствительным. Если $F(x)$ постоянно растет от $x=\alpha$ до $x=a$, то числа k должны быть положительные вместе с разностию $F(x+\omega)-F(x)$ *. Называя K самое большое из них, получим

$$\frac{F(\alpha+\omega)-F(\alpha)}{\omega}<K,$$

$$\frac{F(\alpha+2\omega)-F(\alpha+\omega)}{\omega}<K,$$

$$\frac{F(\alpha+3\omega)-F(\alpha+2\omega)}{\omega}<K$$

и так далее до

$$\frac{F(\alpha+\lambda\omega)-F(\alpha+\lambda\omega-\omega)}{\omega}<K$$

168 | для всякого целого числа $\lambda>1$. Складывая все уравнения, находим

$$\frac{F(\alpha+\lambda\omega)-F(\alpha)}{\omega}<\lambda K$$

или, полагая $\lambda\omega=b$,

$$F(\alpha+b)-F(\alpha)<bK$$

* Знак величины k связан со знаком $F''(x)$, и поэтому в такой общей формулировке утверждение Лобачевского несправедливо; однако в рассматриваемом случае, когда $F'(x)\equiv 0$, величина k действительно положительна.

для произвольного b от $b=0$ до $b=a-\alpha$. Число K можно уменьшать также произвольно и брать как угодно близким к нулю *, а следовательно для всякого числа b

$$F(\alpha+b)=F(\alpha)$$

или вообще

$$F(x)=F(\alpha)$$

число постоянное.

Если даже $F(x)$ будет заменено аналитическим выражением (7), то

$$\frac{dF(x)}{dx}=0$$

даст уравнение

$$\Delta F(x)-\frac{1}{2}\Delta^2 F(x)+\frac{1}{3}\Delta^3 F(x)-\ldots+\frac{(-1)^i}{i}\Delta^i F(x)=0,$$

куда вставляя значения $\Delta F(x)$, $\Delta^2 F(x)\ldots$ из уравнений (8), получим

169
$$\begin{aligned} 0=\Delta F(\alpha)&+\Delta^2 F(\alpha)\left(\xi-\frac{1}{2}\right)+\\ &+\Delta^3 F(\alpha)\left[\xi_0^{\infty 2}-\frac{1}{2}\xi+\frac{1}{3}\right]+\\ &+\Delta^4 F(\alpha)\left[\xi_0^{\infty 3}-\frac{1}{2}\xi_0^{\infty 2}+\frac{1}{3}\xi-\frac{1}{4}\right]+\\ &\vdots\\ &+\Delta^i F(\alpha)\left[\xi_0^{\infty i-1}-\frac{1}{2}\xi_0^{i-2}+\ldots-(-1)^i\frac{1}{i}\right] \end{aligned}$$

и которое уравнение должно быть справедливо для

$$\xi=0,\quad \xi=1,\quad \xi=2,\ \ldots,\quad \xi=i.$$

После чего находим

$$\Delta F(\alpha)-\frac{1}{2}\Delta^2 F(\alpha)+\ldots-(-1)^i\frac{1}{i}\Delta^i F(\alpha)=0$$

$$\Delta^2 F(\alpha)-\frac{1}{2}\Delta^3 F(\alpha)+\ldots+(-1)^i\frac{1}{i-1}\Delta^i F(\alpha)=0,$$

$$\Delta^3 F(\alpha)-\frac{1}{2}\Delta^4 F(\alpha)+\ldots-(-1)^i\frac{1}{i-2}\Delta^i F(\alpha)=0$$

до

$$\Delta^i F(\alpha)=0.$$

Откуда легко заключить, что

$$\Delta F(\alpha)=0,\quad \Delta^2 F(\alpha)=0,\ \ldots,\quad \Delta^i F(\alpha)=0.$$

---

* Это утверждение Лобачевским, по существу, не доказано. Понятие равномерной непрерывности в то время, когда писалась эта статья, отсутствовало.

Таким образом, для всякого x находим из уравнений (7)

$$F(x) = F(a)$$

— постоянное число *.

190 Итак, будет ли предположено, что $F(x)$ дает|ся в числах для всякого x, или $F(x)$ разумеем как аналитическое выражение, которое без чувствительной погрешности заключает в себе все данные значения $F(x)$, всегда

$$\frac{dF(x)}{dx} = 0$$

требует, чтобы $F(x)$ было постоянным, а потому все возможные значения

$$\int \varphi(x)\,dx = f(x)$$

должны разниться только в прибавочном постоянном, которое определяется вместе с началом интеграла, именно

$$\int\limits_a \varphi(x)\,dx = f(x) - f(a)\,\star.$$

Обратно, помощию $\varphi(x)$ находим $f(x)$, положивши для целого числа i

$$\frac{x-a}{i} = \alpha$$

и принимая

$$F(x) = \alpha\,\{\varphi(x-\alpha) + \varphi(x-2\alpha) + \ldots + \varphi(x-i\alpha)\}, \qquad (9)$$

тем вернее находим $F(x) = f(x)$, чем α менее. Здесь надобно следовательно показать, что с возрастанием i функция $F(x)$ приближается к известной границе, которая должна быть $f(x)$.

191 | Пусть $i' > i$ и пусть еще

$$\frac{x-a}{i'} = \beta, \qquad \frac{x-a}{ii'} = \gamma,$$

$$F_1(x) = \beta\,\{\varphi(x-\beta) + \varphi(x-2\beta) + \ldots + \varphi(x-i'\beta)\}.$$

Если $\varphi(x)$ от крайнего значения $x = a$ до другого $x = b$ постепенно ⊘ увеличивается и уменьшается, то можно взять i всегда так велико, чтобы разность двух смежных чисел в ряду

$$\varphi(a),\quad \varphi(a+\alpha),\quad \varphi(a+2\alpha),\ \ldots$$

---

* Для того чтобы доказательство было строгим, нужно сначала доказать возможность равномерной апроксимации функции $F(x)$ многочленом.

⋆ Обозначение $\int\limits_a \varphi(x)\,dx$ употребляется Лобачевским в том же смысле, что и $\int\limits_a^x \varphi(x)\,dx$.

⊘ Здесь слово «постепенно» уже термин, равносильный современному «непрерывно».

была по величине менее E. После чего такая же разность в ряду

$$\varphi(a),\quad \varphi(a+\beta),\ \varphi(a+2\beta), \ldots$$

должна быть E' еще менее по величине, нежели E*. Итак

$$\varphi(x-\gamma)+\varphi(x-2\gamma)+\ldots+\varphi(x-i'\gamma)-i'\varphi(x-\alpha)<i'E,$$
$$\varphi(x-i'\gamma-\gamma)+\varphi(x-i'\gamma-2\gamma)+\ldots$$
$$+\varphi(x-2i'\gamma)-i'\varphi(x-2\alpha)<i'E,$$
$$\vdots$$
$$\varphi(x-ii'\gamma+i'\gamma-\gamma)+\varphi(x-ii'\gamma+i'\gamma-2\gamma)+\ldots$$
$$+\varphi(x-ii'\gamma)-i'\varphi(x-i\alpha)<i'E^{*}.$$

Складывая все уравнения, получим

$$\varphi(x-\gamma)+\varphi(x-2\gamma)+\ldots+\varphi(a)-\frac{i'}{\alpha}F(x)<ii'E.$$

193 |Подобным образом нашли бы

$$\varphi(x-\gamma)+\varphi(x-2\gamma)+\ldots+\varphi(a)-\frac{i}{\beta}F_1(x)<ii'E'.$$

Отсюда

$$F(x)-F_1(x)<(x-a)(E+E').$$

Можно следовательно i всегда взять довольно большим числом, чтобы для всякого $i'>i$ почитать без приметной погрешности

$$F_1(x)=F(x).$$

В таком случае уравнение (9), когда вместо x ставим сюда $x+\alpha$, и $i+1$ вместо i, дает

$$F(x+\alpha)=\alpha\{\varphi(x)+\varphi(x-\alpha)+\ldots+\varphi(x-i\alpha)\}.$$

После чего

$$\frac{F(x+\alpha)-F(x)}{\alpha}=\varphi(x);$$

это значит,

$$\frac{dF(x)}{dx}=\varphi(x)$$

тем вернее, чем α менее. К тому уравнение (9) требует, чтобы

$$F(a)=0;$$

---

* Это и дальнейшее следует не из непрерывности, а из равномерной непрерывности функции $\varphi(x)$.

* Левые части этих неравенств подразумеваются находящимися под знаком абсолютной величины.

193 | следовательно,

$$F(x)=f(x)-f(a)$$

тем вернее, чем i в уравнении (9) более.

До сих пор однако ж значение $\varphi(x)$ не предполагалось бесконечно великим, иначе могло бы случиться, что $\varphi(x+\alpha)-\varphi(x)$ не будет уменьшаться беспредельно вместе с α. Например,

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$$

дает

$$\varphi(2\alpha)-\varphi(\alpha)=\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2\alpha}},$$

которая разность увеличивается с уменьшением α *.

Пусть $\varphi(x)$ делается бесконечно великим для крайнего только значения x, которым интеграл начинается или оканчивается. На такого рода интегралы разделяется всякий интеграл

$$\int \varphi(x)\,dx,$$

хотя бы $\varphi(x)$ несколько раз делалось бесконечно великим. Также
194 довольно, если мы будем говорить | только о том случае, когда этот интеграл начинается с $x=a$ и когда $\varphi(a)=\infty$. Собственно под

$$\int\limits_a \varphi(x)\,dx$$

должно теперь разуметь границу, к которой приближается

$$\int\limits_{a+\omega} \varphi(x)\,dx,$$

с уменьшением ω и когда $a+\omega$ взято между a и другим значением x. Выражение (9) всегда может заменять этот последний интеграл, покуда ω не нуль и когда i достаточно велико. Затем остается решить, какое значение принадлежит интегралу

$$\int\limits_a^{a+\omega} \varphi(x)\,dx$$

или, все равно, интегралу

$$\omega\int\limits_0^1 \varphi(a+\omega x)\,dx,$$

* Этот пример показывает, что Лобачевский близко подошел к понятию равномерной непрерывности.

который надобно присоединить к прежнему, положив $\omega = 0$ после интегрирования. Принимая следовательно ω весьма малым и пользуясь таким обстоятельством, очень часто можно будет видеть границу приближения с уменьшением ω. Здесь должны встречаться два только случая: или интегралу

195 $$\int_a \varphi(x)\,dx$$

принадлежит действительное значение с тем вместе, как

$$\omega \int_0^1 \varphi(a + \omega x)\,dx = 0,$$

для $\omega = 0$; или

$$\int_a \varphi(x)\,dx = \infty,$$

когда

$$\omega \int_0^1 \varphi(a + \omega x)\,dx$$

не делается нулем для $\omega = 0$ *. Например

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad a = 0,$$

$$\omega \int_0^1 \varphi(a + \omega x)\,dx = \sqrt{\omega} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}},$$

$$\int_0 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}.$$

Берем еще

$$\varphi(x) = \frac{1}{x}, \quad a = 0;$$

находим

$$\omega \int_0^1 \varphi(a + \omega x)\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{x};$$

196 следовательно

$$\int_0 \frac{dx}{x} = \infty.$$

Если

$$\varphi(x) = \frac{1}{x^2}, \quad a = 0,$$

---

* Это не совсем верно, так как из того, что предел $\lim\limits_{\omega \to 0} \int_{a+\omega}^{\infty} f(x)\,dx$ не существует, не следует, что этот предел бесконечен.

то

$$\omega \int_0^1 \varphi(a+\omega x)\,dx = \frac{1}{\omega}\int_0^1 \frac{dx}{x^2};$$

следовательно

$$\int_0 \frac{dx}{x^2} = \infty.$$

Когда

$$\varphi(x) = \frac{\sin a}{\sqrt{\sin^2 a - \sin^2 x}},$$

то

$$\omega \int_0^1 \varphi(a+\omega x)\,dx = \frac{\sqrt{\omega}\sin a}{\sqrt{-\sin 2a}}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 0\,^*.$$

Вообще если $\varphi(x)$ от $x=a$ до $x=b$ не делается бесконечно великим кроме $\varphi(b)=\pm\infty$, и если к тому

$$\int \varphi(x)\,dx = f(x)$$

397 так, что для неопределенного x

$$\frac{df(x)}{dx} = \varphi(x),$$

то

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

Если ж между границами $x=a$, $x=c$ функция $\varphi(x)$ делается бесконечно великой, то нельзя еще утверждать, чтобы

$$\int_a^c \varphi(x)\,dx = f(c) - f(a),$$

хотя бы для неопределенного x и находили

$$\frac{df(x)}{dx} = \varphi(x),$$

а надобно прежде увериться, что ни который из двух интегралов

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx, \qquad \int_b^c \varphi(x)\,dx$$

---

* Имеется в виду предел при $\omega \to 0$. Первое равенство приближенное, в правой части отброшены члены, содержащие более высокие степени ω; второе равенство получено при $\omega = 0$.

В оригинале перед знаком интеграла пропущен множитель $\sin a$.

не делается бесконечно великое число, потому что

$$\int_a^c \varphi(x)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx + \int_b^c \varphi(x)\,dx.$$

Например,

195 $$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x},$$

но отсюда еще не следует, чтобы

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2} = -2,$$

потому что

$$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2} = \infty, \quad \int_{0}^{+1} \frac{dx}{x^2} = \infty.$$

Все такие случаи можно соединить в уравнениях:

$$\int \varphi(x)\,dx = f(x), \quad \frac{df(x)}{dx} = \varphi(x),$$

$$\varphi(b) = \infty, \quad \varphi(b') = \infty \ldots$$

$$\int_a^c \varphi(x)\,dx = f(c) - f(a) + \int_{-\omega}^{+\omega} \varphi(b+\omega)\,d\omega + \int_{-\omega}^{+\omega} \varphi(b'+\omega)\,d\omega + \ldots ^{*},$$

где b, b' ... падают между $x = a$, $x = c$, и где после интегрирования должно полагать $\omega = 0$.

[V]

Все сказанное до сих пор о дифференцировании и интегрировании применяем к интегралу

$$\int_0^1 \cos(i\pi x - i\omega)\, f''(x)\,dx$$

в уравнении (2). Если здесь $f''(x)$ не делается бесконечно великим числом ни для какого значения x от $x = 0$ до $x = 1$, то основываясь на уравнении (9), легко заключить, что

196 $$\int_0^1 \cos(i\pi x - i\omega)\, f''(x)\,dx = \lambda\,\{f'(1) - f'(0)\}, \tag{10}$$

---

* Смысл этой формулы непонятен. Она верна, если функция $f(x)$ непрерывна в интервале (a, c), но в этом случае все интегралы в правой части стремятся к нулю; если же не существует такой непрерывной функции, производная которой во всех точках интервала (a, c), кроме точек b, b', ..., равна $\varphi(x)$, то неясно, что следует понимать под $f(x)$.

где $\lambda < 1$*, а следовательно

$$\sum_{i=1}^{i=\infty}\frac{1}{i^2}\int_0^1 \cos(i\pi x - i\omega) f''(x)\,dx = \{f'(1) - f'(0)\}\sum_{i=1}^{i=\infty}\frac{\lambda}{i^2}$$

представляет исчезающую строку, которой значение, сколько бы членов взято ни было, всегда менее

$$3{,}07\,\{f'(1) - f'(0)\}\ *.$$

Хотя бы $f''(x)$ и делалось бесконечно великим числом для некоторых x между границами $x = 0$, $x = 1$, но и тогда уравнение (10) справедливо, покуда $f'(x)$ не делается бесконечно великим от $x = 0$ до $x = 1$, потому что в таком случае на правой стороне уравнения (10) должно бы прибавить интегралы

$$\int_{-r}^{+r}\cos(i\pi x - i\omega + i\pi r) f''(x + r)\,dr\ ^{@}$$

для всех x, которые делают $f''(x)$ бесконечно великим, после интегрирования положив $r = 0$. Пусть вообще

$$N = \int_a \psi(x) f''(x)\,dx, \qquad N = \lambda\,\{f'(x) - f'(a)\}.$$

300 | Дифференцируя, находим

$$\frac{dN}{N} = \frac{d\lambda}{\lambda}\cdot\frac{\psi(x) - \lambda}{\psi(x)}.$$

Отсюда видно, что покуда $\psi(x)$, $f''(x)$ сохраняют свои знаки, а следовательно N растет ♀, необходимо по величине

$$\psi(x) > \lambda\ ‡.$$

---

* Точнее, $|\lambda| < 1$. Равенство (10) справедливо, если функция $f''(x)$ знакопостоянна на интервале (0,1). Впрочем, для дальнейшего, по существу, достаточно, чтобы $f''(x)$ была равномерно ограничена, что и предположено Лобачевским, так как в этом случае $\left|\int_0^1 \cos(i\pi x - i\omega) f''(x)\,dx\right| < C$ при любом i (C — постоянная). Это неравенство остается в силе и тогда, когда $f''(x)$ неограниченна, как это дальше предполагает Лобачевский, но абсолютно интегрируема в интервале (0,1).

* В оригинале вместо 3,07 стоит 2,45 (см. сноску ‡ к стр. 37).

@ См. сноску на стр. 54.

♀ По абсолютной величине.

‡ Это заключение, вообще говоря, несправедливо, но при знакопостоянстве $\psi(x)$ и $f''(x)$ можно, конечно, утверждать, что $|\lambda|$ меньше максимального значения $|\psi(x)|$ в интервале интегрирования.

Так в интеграле

$$\int_{-r}^{+r} \cos(i\pi x - i\omega + i\pi r)\, f''(x+r)\, dr = \lambda\{f'(x+r) - f'(x-r)\}$$

всегда r можно взять довольно мало, чтобы во всем пространстве интегрирования

$$\cos(i\pi x - i\omega + i\pi r),\quad f''(x+r)$$

сохраняли свой знак *, а следовательно по величине $\lambda < 1$, и для $r = 0$

$$\int_{-r}^{+r} \cos(i\pi x - i\omega + i\pi r)\, f''(x+r)\, dr = 0.$$

После всего этого мы в праве заключать, что строки на обеих сторонах уравнения (6) исчезают, по крайней мере покуда $f(x)$, $f'(x)$ от $x = 0$ до $x = 1$ не делаются бесконечно великими.

Чтобы найти самое значение строки

$$V = \sum_{i=1}^{i=\infty} \int_0^1 \cos(i\pi x - i\omega)\, f(x)\, dx,$$

201 |мы воспользуемся тем же способом, которому следовал Г. Пуассон (Sur le calcul numérique des intégrales définies. Mémoires de l'Acad. d. sciences, l'année 1823, p. 571) и наперед рассматриваем строку

$$X = \int_0^1 f(x)\, dx + 2\int_0^1 \sum_{i=1}^{i=\infty} \mu^i \cos(i\pi x - i\omega)\, f(x)\, dx, \qquad [10a]$$

которая для $\mu \leq 1$ также исчезает, как и строка V ⋆.

Известное разложение

$$\frac{1-\mu^2}{1 - 2\mu\cos(\pi x - \omega) + \mu^2} = 1 + 2\sum_{1}^{\infty} \mu^i \cos(i\pi x - i\omega)\ ^{\varnothing}$$

---

* Как бы мало ни было положительное число r, величина $\cos(i\pi x - i\omega + i\pi r)$ не будет знакопостоянной в интервале $(-r, r)$ для всех i, но, несмотря на это, первую теорему о среднем применять, конечно, можно, если функция $f''(x)$ знакопостоянна в интервале $(x - r, x + r)$, что Лобачевский, по-существу, *предполагает*. Для дальнейшего достаточно и знакопостоянства $f''(x)$ при достаточно малом r в каждом из интервалов $(x - r, x)$, $(x, x + r)$.

⋆ При $|\mu| < 1$ ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \mu^i \cos(i\pi x - i\omega)$ сходится равномерно, откуда

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu^i \int_0^1 \cos(i\pi x - i\omega)\, f(x)\, dx = \int_0^1 \Big[\sum_{i=1}^{\infty} \mu^i \cos(i\pi x - i\omega)\Big] f(x)\, dx. \qquad (a)$$

Однако при $\mu = 1$ равенство (a) теряет смысл, так как ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \cos(i\pi x - i\omega)$ расходится.

⌀ Это разложение имеет место при $|\mu| < 1$.

дает

$$X=\int_0^1 \frac{(1-\mu^2)\, f(x)\, dx}{1-2\mu\cos(\pi x-\omega)+\mu^2}, \qquad [10b]$$

а с переменой μ на $1-\mu$

$$X=\int_0^1 \frac{\mu(2-\mu)\, f(x)\, dx}{\mu^2+4\sin^2\frac{1}{2}(\pi x-\omega)\cdot(1-\mu)}.$$

Чем менее μ, тем вернее следовательно можно принимать

$$\int_0^1 f(x)\, dx+2V=2\int_0^1 \frac{\mu f(x)\, dx}{\mu^2+4\sin^2\frac{1}{2}(\pi x-\omega)}\,{}^{*}. \qquad (11)$$

Здесь границы интеграла могут быть сближаемы до тех значений
202 x, для которых уже нельзя без | чувствительной погрешности пренебрегать μ в знаменателе и для которых можем следовательно почитать

$$\int_0^1 f(x)\, dx+2V=2\int \frac{\mu f(x)\, dx}{\mu^2+(\pi x-\omega)^2}\,\star.$$

---

* То-есть

$$\lim_{\mu\to 0}\int_0^1 \frac{\mu(2-\mu)\, f(x)\, dx}{\mu^2+4(1-\mu)\sin^2\frac{\pi x-\omega}{2}}=\lim_{\mu\to 0}\int_0^1 \frac{2\mu f(x)\, dx}{\mu^2+4\sin^2\frac{\pi x-\omega}{2}}.$$

Подробное доказательство дано в примечании [2].

★ Действительно, как бы мало ни было положительное число δ,

$$\lim_{\mu\to 0}\int_0^{\frac{\omega-\delta}{\pi}} \frac{\mu f(x)\, dx}{\mu^2+4\sin^2\frac{\pi x-\omega}{2}}=\lim_{\mu\to 0}\int_{\frac{\omega+\delta}{\pi}}^1 \frac{\mu f(x)\, dx}{\mu^2+4\sin^2\frac{\pi x-\omega}{2}}=0$$

и

$$\left|\int_{\frac{\omega-\delta}{\pi}}^{\frac{\omega+\delta}{\pi}} \frac{\mu f(x)\, dx}{\mu^2+4\sin^2\frac{\pi x-\omega}{2}}-\int_{\frac{\omega-\delta}{\pi}}^{\frac{\omega+\delta}{\pi}} \frac{\mu f(x)\, dx}{\mu^2+(\pi x-\omega)^2}\right|=$$

$$=\mu\left|\int_{\frac{\omega-\delta}{\pi}}^{\frac{\omega+\delta}{\pi}} \frac{(\pi x-\omega)^2-4\sin^2\frac{\pi x-\omega}{2}}{\left(\mu^2+4\sin^2\frac{\pi x-\omega}{2}\right)[\mu^2+(\pi x-\omega)^2]}\, f(x)\, dx\right|<$$

$$<\mu\int_{\frac{\omega-\delta}{\pi}}^{\frac{\omega+\delta}{\pi}} \frac{(\pi x-\omega)^4\, |f(x)|\, dx}{\sin^2\frac{\pi x-\omega}{2}\,(\pi x-\omega)^2}<C\mu\delta\to 0$$

при $\mu\to 0$ и постоянном δ (C — некоторая положительная постоянная).

Если $\omega > 0$, $< \pi$, то, полагая

$$\pi x - \omega = \mu r,$$

получим

$$\int_0^1 f(x)\,dx + 2V = \frac{2}{\pi}\int_0^r \frac{dr\, f\left(\frac{\omega+\mu r}{\pi}\right)}{1+r^2} + \frac{2}{\pi}\int_0^r \frac{dr\, f\left(\frac{\omega-\mu r}{\pi}\right)}{1+r^2}, \text{ *}$$

где крайние значения r подчинены только тому условию, чтобы за малостию μr можно было пренебрегать разность

$$\mu r - \sin(\mu r),$$

а потому чем меньше μ и δ, тем вернее уравнение

$$\int_0^1 f(x)\,dx + 2V = \frac{2}{\pi}\left\{f\left(\frac{\omega}{\pi}+\delta\right) + f\left(\frac{\omega}{\pi}-\delta\right)\right\} \operatorname{arc\,tang} r$$

с уменьшением μ можно, следовательно, увеличивать r до бесконечности и переходить к границе приближения со всей строгостию *

$$2f\left(\frac{\omega}{\pi}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx + 2\sum_1^\infty \int_0^1 \cos(i\pi x - i\omega) f(x)\,dx, \tag{12}$$

203 | покуда $f(x)$ в переходе от $f\left(\frac{\omega}{\pi}-\delta\right)$ к $f\left(\frac{\omega}{\pi}+\delta\right)$ сохраняет постепенность. В противном случае

$$f\left(\frac{\omega}{\pi}-\delta\right) + f\left(\frac{\omega}{\pi}+\delta\right) = \int_0^1 f(x)\,dx + 2\sum_1^\infty \int_0^1 \cos(i\pi x - i\omega) f(x)\,dx, \tag{13}$$

где под $f\left(\frac{\omega}{\pi}-\delta\right)$, $f\left(\frac{\omega}{\pi}+\delta\right)$ ⊘ должно разуметь те два значения $f(x)$, которые отвечают $x = \frac{\omega}{\pi}$ с нарушением постепенности [4].

---

* При помощи преобразования $\delta = \mu r$, $\pi x - \omega = \mu t$ получаем:

$$\int_{\frac{\omega-\delta}{\pi}}^{\frac{\omega+\delta}{\pi}} \frac{2\mu f(x)\,dx}{\mu^2 + (\pi x - \omega)^2} = \int_{\frac{\omega-\mu r}{\pi}}^{\frac{\omega+\mu r}{\pi}} \frac{2\mu f(x)\,dx}{\mu^2 + (\pi x - \omega)^2} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^r \frac{f\left(\frac{\omega+\mu t}{\pi}\right)dt}{1+t^2} + \frac{2}{\pi}\int_0^r \frac{f\left(\frac{\omega-\mu t}{\pi}\right)dt}{1+t^2},$$

причем $r \to \infty$ при $\mu \to 0$ и постоянном δ.

* Обоснование этого см. в примечании [5].

⊘ В современных обозначениях: $f\left(\frac{\omega}{\pi}-0\right)$, $f\left(\frac{\omega}{\pi}+0\right)$.

Если $\omega = 0$, то полагая

$$\pi x = \mu r$$

и принимая μr столько малым, чтобы дозволено было перебрать [пренебрегать] разность

$$\mu r - \sin(\mu r),$$

уравнение (11) надобно будет переменить на такое:

$$\int_0^1 f(x)\,dx + 2V = \frac{2}{\pi}\int_0^r \frac{dr\, f\left(\frac{\mu r}{\pi}\right)}{1+r^2}.$$

Наконец если $\omega = \pi$, то ставя

$$\pi x = \pi - \mu r$$

и принимая μr столько же малым, как и прежде, из уравнения (11) находим

204 $$\int_0^1 f(x)\,dx + 2V = \frac{2}{\pi}\int_0^r \frac{dr\, f\left(1-\frac{\mu r}{\pi}\right)}{1+r^2}.$$

После чего уменьшая μr и увеличивая r, приходим к границам

$$f(0) = \int_0^1 f(x)\,dx + 2\sum_1^\infty \int_0^1 \cos(i\pi x) f(x)\,dx, \tag{14}$$

$$f(1) = \int_0^1 f(x)\,dx + 2\sum_1^\infty \int_0^1 (-1)^i \cos(i\pi x) f(x)\,dx\,^*. \tag{15}$$

Если $\omega < 0$, $> -\pi$, то в уравнении (11) нельзя сделать

$$\sin\frac{1}{2}(\pi x - \omega)$$

бесконечно малым, а следовательно в таком случае

$$\int_0^1 f(x)\,dx + 2\sum_1^\infty \int_0^1 \cos(i\pi x - i\omega) f(x)\,dx = 0\,^*. \tag{16}$$

---

* В более общем случае нужно в левой части равенства (14) писать $f(+0)$, а в левой части равенства (15) писать $f(1-0)$ или, в обозначениях Лобачевского, соответственно $f(\delta)$ и $f(1-\delta)$.

* Этим доказано, что равенства (12) и (13) дают при $-\pi < \omega < \pi$ разложение в ряд Фурье функции, совпадающей с $2f(x)$ в интервале (0, 1) и равной нулю в интервале (—1, 0).

Если сюда ставим $-x$ вместо x, потом $f(x)$ вместо $f(-x)$, $-\omega$ вместо ω, то для $\omega > 0$, $< \pi$ получим

$$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx + 2\sum_{1}^{\infty}\int_{-1}^{0} \cos(i\pi x - i\omega)\, f(x)\,dx = 0\,^{*},$$

а в соединении с уравнением (12)

$$f\left(\frac{\omega}{\pi}\right) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx + \sum_{1}^{\infty}\int_{-1}^{+1} \cos(i\pi x - i\omega)\, f(x)\,dx. \tag{17}$$

205 | Если в уравнении (12) ставим $x+1$ вместо x, потом $f(x)$ вместо $f(x+1)$, то для $\omega < 0$, $> -\pi$ находим

$$2f\left(\frac{\omega}{\pi}\right) = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + 2\sum_{1}^{\infty}\int_{-1}^{0} \cos(i\pi x - i\omega) f(x)\,dx\,^{*},$$

а в соединении с уравнением (16) снова получим уравнение (17), которое таким образом поверяется для значений $\omega > 0$, $< \pi$ или $\omega < 0$, $> -\pi$.

Если в уравнении (15) ставим $-x$ вместо x, потом $f(x)$ вместо $f(-x)$, то сделается

$$f(-1) = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + 2\sum_{1}^{\infty}\int_{-1}^{0} (-1)^{i} \cos(i\pi x)\, f(x)\,dx,$$

а в соединении с уравнением (15)

$$\frac{1}{2}\{f(-1) + f(+1)\} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx + \sum_{1}^{\infty}\int_{-1}^{+1} (-1)^{i} \cos(i\pi x)\, f(x)\,dx. \tag{18}$$

В уравнении (14) поставя $-x$ вместо x, потом $f(x)$ вместо $f(-x)$, получим

$$f(0) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} f(x) + 2\sum_{1}^{\infty}\int_{-1}^{1} \cos(i\pi x)\, f(x)\,dx,$$

---

* $f(-x)$, а следовательно, и $f(x)$ в этом равенстве — произвольная функция (удовлетворяющая, конечно, условиям, при которых доказана сходимость ряда Фурье), и левая часть этого равенства дает, следовательно, разложение в ряд Фурье любой функции, равной нулю при $0 < \omega < \pi$, в частности функции, совпадающей с $f(x)$ в интервале $(-1, 0)$.

* Это равенство получается из (12) подстановкой $x = t + 1$ при помощи обозначений $\overline{\omega} = \omega - \pi$, $f(x+1) = \overline{f}(x)$.

а в соединении с уравнением (14)

$$f(0)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}f(x)\,dx+2\sum_{1}^{\infty}\int_{-1}^{+1}\cos(i\pi x)\,f(x)\,dx.$$

206 | Итак если в уравнение (17) ставим $\pi\omega$ вместо ω, то для всех значений ω между границами -1, $+1$ и покуда функции $f(\omega)$ принадлежит единственное значение *, находим

$$f(\omega)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}f(x)\,dx+\sum_{1}^{\infty}\int_{-1}^{+1}\cos i\pi(x-\omega)\,f(x)\,dx. \tag{19}$$

Если ж функция $f(x)$ прерывается, а потому $f(\omega)$ принадлежат два значения, то, как требует уравнение (13),

$$\frac{1}{2}\{f(\omega-\delta)+f(\omega+\delta)\}=\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}f(x)\,dx+\sum_{1}^{\infty}\int_{-1}^{+1}\cos i\pi(x-\omega)f(x)\,dx. \tag{20}$$

Наконец, если $\omega=\pm1$, то уравнение (19) заменяется уже уравнением (18).

К уравнениям (18), (19), (20) можно идти прямо, доказывая наперед исчезание написанных здесь строк и основываясь в этом доказательстве на уравнении

$$\int_{-1}^{+1}\cos i\pi(x-\omega)\,f(x)\,dx=(-1)^i\frac{\sin(i\pi\omega)}{i\pi}\{f(-1)-f(+1)\}+$$

$$+(-1)^i\frac{\cos(i\pi\omega)}{i^2\pi^2}\{f'(+1)-f'(-1)\}-\frac{1}{i^2\pi^2}\int_{-1}^{+1}\cos i\pi(x-\omega)f''(x)\,dx, \tag{21}$$

которым должно теперь заменить уравнение (2), будет ли функ-
207 ция $f(x)$ постепенная или нет; но | где однако ж, как мы уже заметили, $f(x)$ и $f'(x)$ нельзя еще предполагать бесконечно великими. Так например, в уравнениях (18), (19), (20) можем принимать $f(x)=1$ от $x=-1$ до $x=+1$; после чего из уравнения (19),

---

* То-есть, пока $f(x)$ в точке $x=\omega$ непрерывна. В точке разрыва первого рода функция имеет, по терминологии Лобачевского, два значения.

положивши здесь для сокращения $\omega = 0$, находим

$$2 = \int_{-1}^{+1} \{1 + 2\sum_{1}^{\infty} \cos(i\pi x)\}\, dx \, *.$$

Отсюда

$$2 = \int_{-1}^{+1} \frac{\sin\left(i + \frac{1}{2}\right)\pi x}{\sin \frac{1}{2}\pi x}\, dx$$

или

$$1 = \int_{0}^{1} \frac{\sin\left(i + \frac{1}{2}\right)\pi x}{\sin \frac{1}{2}\pi x}\, dx,$$

где после интегрирования должно ставить $i = \infty$.

Если же в уравнении (19) полагаем $\omega = 0$, $f(x) = 1$ от $x = -a$, до $x = +a$, разумея $a < 1$; для прочих значений x принимаем $f(x) = 0$ от $x = -1$ до $x = -a$, от $+a$ до $x = +1$, то находим подобным образом

$$1 = \int_{0}^{a} \frac{\sin\left(i + \frac{1}{2}\right)\pi x}{\sin \frac{1}{2}\pi x}\, dx \tag{22}$$

708 тем вернее, чем i более, хотя бы число a было столько малым, что без чувствительной погрешности могли бы написать

$$\frac{1}{2}\pi = \int_{0}^{a} \frac{\sin\left(i + \frac{1}{2}\right)\pi x\, dx}{x} \, \star.$$

---

* Здесь запись у Лобачевского неаккуратная. Нужно писать:

$$2 = \int_{-1}^{1} dx + 2\sum_{i=1}^{\infty} \int_{-1}^{1} \cos i\pi x\, dx = \int_{-1}^{1} dx + 2\lim_{i\to\infty} \int_{-1}^{1} \left(\sum_{1}^{i} \cos i\pi x\right) dx,$$

как это следует из (19).

Впрочем, несколькими строчками ниже Лобачевский сам указывает, что переход к пределу совершается после интегрирования.

⋆ Действительно,

$$\lim_{i\to\infty}\left| \int_{0}^{a} \frac{\sin\left(i + \frac{1}{2}\right)\pi x}{\sin \frac{\pi x}{2}}\, dx - \int_{0}^{a} \frac{\sin\left(i + \frac{1}{2}\right)\pi x}{\frac{\pi x}{2}}\, dx \right| =$$

Пусть теперь

$$\left(i+\frac{1}{2}\right)\pi x = u,$$

то для $i=\infty$ получим

$$\frac{1}{2}\pi = \int_0^\infty \frac{du}{u}\sin u\,^*. \qquad (23)$$

Этот интеграл, таким образом, выведен из уравнения (11), где положив $\omega=0$, а границы интегрирования назначив $x=+a$, $x=+0$ *, получим

$$\int_0^a \frac{\mu\,dx}{\mu^2+4\sin^2\frac{1}{2}\pi x} = \frac{1}{2}a+\sum_1^\infty \frac{1}{i\pi}\sin i\pi a \qquad [24]^{\varnothing}$$

— уравнение, где после интегрирования должно полагать $\mu=0$, и в справедливости которого не иначе можно быть уверену, как доказавши наперед исчезание здесь бесконечной строки. Далее, интегрируя, находим

$$\frac{2}{\pi\sqrt{4+\mu^2}}\,\mathrm{Arc\,tang}\left\{\mathrm{tang}\left(\frac{1}{2}\pi a\right)\sqrt{1+\frac{4}{\mu^2}}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}a+\frac{1}{\pi}\sum_1^\infty \frac{1}{i}\sin(i\pi a),$$

$$= \lim_{i\to\infty}\left|\int_0^a \frac{\sin\frac{\pi x}{2}-\frac{\pi x}{2}}{\frac{\pi x}{2}\sin\frac{\pi x}{2}}\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)\pi x\,dx\right| = \lim_{i\to\infty}\left|\int_0^a \frac{-\frac{(\pi x)^2}{3!\,2^3}+\dots}{\sin\frac{\pi x}{2}}\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)\pi x\,dx\right| =$$

$$= \lim_{i\to\infty}\left|\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)\pi\alpha\int_0^a \frac{-\frac{(\pi x)^2}{3!\,2^3}+\dots}{\sin\frac{\pi x}{2}}dx\right| < \varepsilon$$

$(0<\alpha<a)$, как мало бы ни было положительное число ε, если a достаточно мало.

* С учетом доказанного ранее

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{a\to 0}\lim_{i\to\infty}\int_0^a \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)\pi x}{x}dx = \lim_{a\to 0}\lim_{i\to\infty}\int_0^{\left(i+\frac{1}{2}\right)\pi a}\frac{\sin u}{u}du =$$

$$= \lim_{a\to 0}\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}du = \int_0^\infty \frac{\sin u}{u}du.$$

* То-есть положив $f(x)=0$ в интервале $(a, 1)$ и $f(x)=1$ в интервале $(0, a)$ $(a\leqslant 1)$.

⌀ Номер формулы (24) в оригинале пропущен.

а полагая $\mu=0$,

209
$$\frac{1}{2}\pi(1-a)=\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{i}\sin(i\pi a).$$

Уравнение (24)* можно еще представить так:

$$\int_0^a \frac{\mu\,dx}{\mu^2+4\sin^2\frac{1}{2}\pi x}=\frac{1}{2}\int_0^a (1+2\sum\cos i\pi a)\,da$$

или

$$\int_0^a \frac{\mu\,da}{\mu^2+4\sin^2\frac{1}{2}\pi a}=\frac{1}{2}\int_0^a \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)\pi a}{\sin\frac{1}{2}\pi a}\,da$$

с тем условием однако ж, чтобы после интегрирования на одной стороне полагать $\mu=0$, на другой $i=\infty$, как бы a впрочем ни было мало. Полагая a столько малым, чтобы вместо $\sin\frac{1}{2}\pi a$ можно было ставить самую дугу, потом принимая $\mu=0$, $i=\infty$, получим определенный интеграл (23).

Если которая-нибудь из функций $f(x)$, $f'(x)$ делается бесконечно великим числом для $x=a$ между границами $x=+1$, $x=-1$, то взявши δ произвольным числом, интегралы в уравнении (19) должно распространять от $x=-1$ до $x=a-\delta$, от $x=a+\delta$ до $a=+1$, потом во второй части уравнения присоединять интеграл

$$P=\frac{1}{2}\int_0^{\delta}\{1+2\sum_{1}^{\infty}\cos i\pi(a-\delta-\omega)\}f(a-\delta)\,d\delta+$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^{\delta}\{1+2\sum^{\infty}\cos i\pi(a+\delta-\omega)\}f(a+\delta)\,d\delta\,^{\star},$$

---

* В тексте здесь ссылка на формулу (23).

⋆ В правильной записи

$$P=\frac{1}{2}\int_0^{\delta}f(a-\delta)\,d\delta+\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^{\delta}\cos i\pi(a-\delta-\omega)\,f(a-\delta)\,d\delta+$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^{\delta}f(a+\delta)\,d\delta+\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^{\delta}\cos i\pi(a+\delta-\omega)\,f(a+\delta)\,d\delta.$$

210 | или, все равно,

$$P = \frac{1}{2}\int\limits_0^\delta \frac{\sin\left\{\left(i+\frac{1}{2}\right)(a-\delta-\omega)\pi\right\}}{\sin\frac{1}{2}\pi(a-\delta-\omega)} f(a-\delta)\,d\delta +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^\delta \frac{\sin\left\{\left(i+\frac{1}{2}\right)(a+\delta-\omega)\pi\right\}}{\sin\frac{1}{2}\pi(a+\delta-\omega)} f(a+\delta)\,d\delta\,^*. \qquad [24a]$$

Когда $a-\omega$ не нуль, то можно δ взять так малым, что

$$P = \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}\pi(a-\omega)}\int\limits_0^\delta \sin\left\{\left(i+\frac{1}{2}\right)(a-\omega-\delta)\pi\right\} f(a-\delta)\,d\delta +$$

$$+\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}\pi(a-\omega)}\int\limits_0^\delta \sin\left\{\left(i+\frac{1}{2}\right)(a-\omega+\delta)\pi\right\} f(a+\delta)\,d\delta\,^{\star}. \qquad [24b]$$

Если теперь $f(a)=\infty$, но

$$\int\limits_{-\delta}^{+\delta} f(a+\delta)\,d\delta$$

с уменьшением δ исчезает, то мы видели уже выше, что в таком случае $P=0$ ⊘.

Если $f(a)$ число конечное, но $f'(a)=\infty$, то всегда можно δ взять так малым, чтобы почитать

$$P = \frac{f(a-\delta)}{2\sin\frac{1}{2}\pi(a-\omega)}\int\limits_0^\delta \sin\left\{\left(i+\frac{1}{2}\right)(a-\omega-\delta)\pi\right\} d\delta +$$

$$+\frac{f(a+\delta)}{2\sin\frac{1}{2}\pi(a-\omega)}\int\limits_0^\delta \sin\left\{\left(i+\frac{1}{2}\right)(a-\omega+\delta)\pi\right\} d\delta\ ♀.$$

---

* Здесь в левой части лучше писать $P(i, \delta)$, причем $P=\lim\limits_{i\to\infty} P(i, \delta)$.

⋆ Точнее: абсолютная величина разности между правой частью $P'(i, \delta)$ этого равенства и правой частью $P(i, \delta)$ предыдущего равенства может быть при любом i сделана меньше любого положительного числа, если δ достаточно мало. Подробное доказательство см. в примечании [5].

⊘ Обоснование этого утверждения см. в примечании [6].

♀ Точнее: если $\overline{P}(i, \delta)$ — выражение, стоящее в правой части этого равенства, то $P(i, \delta)-\overline{P}(i, \delta)\to 0$ при $\delta\to 0$.

После чего

211 | $$P=\frac{f(a-\delta)}{\pi(2i+1)\sin\frac{1}{2}\pi(a-\omega)}\left[\cos\left\{\left(i+\frac{1}{2}\right)(a-\omega-\delta)\pi\right\}-\right.$$
$$\left.-\cos\left\{\left(i+\frac{1}{2}\right)(a-\omega)\pi\right\}\right]-$$
$$-\frac{f(a+\delta)}{\pi(2i+1)\sin\frac{1}{2}\pi(a-\omega)}\left[\cos\left\{\left(i+\frac{1}{2}\right)(a-\omega+\delta)\pi\right\}-\right.$$
$$\left.-\cos\left\{\left(i+\frac{1}{2}\right)(a-\omega)\pi\right\}\right];$$

следовательно P уничтожается с возрастанием i*.

Если $a=\omega$, то

$$P=\frac{1}{2}\int_0^\delta\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)\pi\delta}{\sin\frac{1}{2}\pi\delta}f(a-\delta)\,d\delta+\frac{1}{2}\int_0^\delta\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)\pi\delta}{\sin\frac{1}{2}\pi\delta}f(a+\delta)\,d\delta.$$

Если к тому $f(a)=\infty$, то само по себе разумеется, что уравнение (19), давая на одной стороне значение $f(a)$, не может представлять на другой исчезающую строку.

Если ж $f(a)$ конечное число, но $f'(a)=\infty$, то всегда δ может быть так мало, чтобы почитать

$$P=\frac{1}{2}\{f(a-\delta)+f(a+\delta)\}\int_0^\delta\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)\pi\delta}{\sin\frac{1}{2}\pi\delta}\,d\delta.$$

Вставляя сюда значение интеграла (22)*, получим

$$P=\frac{1}{2}\{f(a-\delta)+f(a+\delta)\},\qquad [7]$$

где δ бесконечно малое, а потому $f(a-\delta)$, $f(a+\delta)$ будут два значения $f(x)$, когда постепенность функции нарушается для $x=a$.
212 Если ж в переходе от | $f(a-\delta)$ к $f(a+\delta)$ сохраняется постепенность, то

$$P=f(a).$$

Между тем уравнения (19), (20), когда на другой стороне в бесконечной строке отделяем часть P, должны представлять

* Здесь доказано только, что $\lim\limits_{i\to\infty}\bar{P}(i,\delta)=0$; доказательство того, что $\lim\limits_{i\to\infty}P(i,\delta)=0$, приведенное в примечании [6], годится и для этого случая.

* И переходя к пределу при $i\to\infty$.

значение $f(a)$ в случае $f(x)=0$ от $x=a-\delta$ до $x=a+\delta$; следовательно, оба уравнения и теперь верны для $f'(a)=\infty$.

Исчезание и значение строки (19) кажется мне теперь вполне доказано; однако ж предложу я здесь еще другое решение, которое с такою же строгостию может быть соединяет более простоты и краткости.

Доказательство, которое дано было выше на исчезание строки

$$\sum_1^\infty \frac{1}{i}\sin i\omega$$

остается без существенной перемены и для всякой строки

$$\sum_1^\infty \frac{1}{i}\sin(i\omega+\alpha),$$

когда знак суммы относится к числу i, какие бы впрочем дуги ω, α ни были. Например строку

$$\sum_1^\infty \frac{1}{i}\cos i\omega$$

211 надобно почитать тоже исчезающей, а следовательно и допускать уравнения

$$\log(1+e^{\omega\sqrt{-1}})=-\sum_1^\infty(-1)^i\frac{1}{i}(\cos i\omega+\sqrt{-1}\sin i\omega),$$

$$\log(1+e^{-\omega\sqrt{-1}})=-\sum_1^\infty(-1)^i\frac{1}{i}(\cos i\omega-\sqrt{-1}\sin i\omega);$$

которых разность дает

$$\frac{1}{2}\sqrt{-1}\log\left(\frac{1+e^{\omega\sqrt{-1}}}{1+e^{-\omega\sqrt{-1}}}\right)=\sum_1^\infty(-1)^i\frac{1}{i}\sin i\omega.$$

Присоединяя сюда

$$\frac{1}{2}\sqrt{-1}\log e^{-\omega\sqrt{-1}}=\frac{1}{2}\omega,$$

получим

$$0=\frac{1}{2}\omega+\sum_1^\infty(-1)^i\frac{1}{i}\sin i\omega.$$

Отсюда для положительного $\omega < \pi$

$$\frac{1}{2}(\pi - \omega) = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{i} \sin i\omega\ ^{*}, \tag{25}^{\star}$$

как это было уже найдено выше по другому способу.

Теперь рассмотрим зависимость двух функций $F(x)$, $f(x)$, предположив для произвольного числа $a > 0$ [⊘]

$$F(\omega) = \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} \sum_{-\infty}^{+\infty} \cos i(x - \omega) f(x)\, dx\ ^{♀}, \tag{26}$$

214 | где знак суммы относится к i, и где впрочем нет необходимости разуметь число членов в строке бесконечно великим, оставляя назначать i в последствии, как точность вычисления того потребует [⊤].

Умножаем уравнение (26) на $d\omega$ и интегрируем от $\omega = b$ до $\omega = c$.

$$\int_{b}^{c} F(\omega)\, d\omega = \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} \sum_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{i} \cos ix (\sin ic - \sin ib) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{i} \sin ix (\cos ib - \cos ic) \right\} f(x)\, dx,$$

где для $i = 0$ надобно принимать

$$\frac{1}{i} \sin ib = b, \quad \frac{1}{i} \sin ic = c, \quad \frac{1}{i} \sin ix = x,$$

а следовательно и уравнение писать иначе:

$$\int_{b}^{c} F(\omega)\, d\omega = \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} \left[c - b + 2 \sum_{1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{i} \sin i(c - x) - \frac{1}{i} \sin i(b - x) \right\} \right] f(x)\, dx.$$

---

* Это равенство справедливо при $0 < \omega < 2\pi$.

★ В оригинале здесь ошибочно стоит номер (23), уже встречавшийся выше.

⊘ В дальнейшем, как это видно из текста, предполагается, что $0 < a \leqslant \pi$.

♀ В правильной записи

$$F(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{-a}^{a} \cos i(x - \omega) f(x)\, dx.$$

⊤ То-есть в дальнейшем под $F(\omega)$ Лобачевский понимает частную сумму ряда (26), и, таким образом, в следующих далее выкладках крайние значения индекса суммирования следовало бы обозначать не через $-\infty$ и $+\infty$, как это делает Лобачевский, а, соответственно, через $-i$ и i.

Здесь

$$\int_{-a}^{+a}\left\{c+2\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{i}\sin i(c-x)\right\}f(x)\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{a}\left\{c+2\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{i}\sin i(c-x)\right\}f(x)\,dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{0}^{a}\left\{c+2\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{i}\sin i(c+x)\right\}f(-x)\,dx.$$

Если разумеем $c>0$, $<a$, то, основываясь на уравнении (25), находим:

215 $$\int_{0}^{a}\left\{c+2\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{i}\sin i(c-x)\right\}f(x)\,dx=$$

$$=\int_{0}^{c}\left\{c+2\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{i}\sin i(c-x)\right\}f(x)\,dx+\int_{c}^{a}\left\{c-2\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{i}\sin i(x-c)\right\}f(x)\,dx=$$

$$=\int_{0}^{c}(\pi+x)f(x)\,dx-\int_{c}^{a}(\pi-x)f(x)\,dx^{*}.$$

$$\int_{0}^{a}\left\{c+2\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{i}\sin i(c+x)\right\}f(-x)\,dx=\int_{0}^{a}(\pi-x)f(-x)\,dx$$

После чего

$$\int_{-a}^{+a}\left\{c+2\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{i}\sin i(c-x)\right\}f(x)\,dx=$$

$$=\int_{0}^{c}(\pi+x)f(x)\,dx-\int_{c}^{a}(\pi-x)f(x)\,dx+\int_{0}^{a}(\pi-x)f(-x)\,dx.$$

---

* Ссылка на равенство (25) показывает, что Лобачевский переходит к пределу при $i\to\infty$. В правильной записи равенство, к которому приходит Лобачевский, таково:

$$\lim_{i\to\infty}\int_{0}^{a}\left\{c+2\sum_{i=1}^{i}\frac{1}{i}\sin i(c-x)\right\}f(x)\,dx=\int_{0}^{c}(\pi+x)f(x)\,dx-\int_{c}^{a}(\pi-x)f(x)\,dx.$$

Запись всех дальнейших предшествующих равенству (27) преобразований также неудачна: предельный переход при $i\to\infty$ должен следовать за вычислением соответствующих интегралов. Обоснование предельного перехода под знаком интеграла см. в примечании [8]. Аналогичным образом обосновывается предельный переход и в следующих далее равенствах.

Таким же образом для $b \geqq 0, < c$

$$\int_{-a}^{+a} \left\{ b + 2\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{i} \sin i(b-x) \right\} f(x)\,dx =$$

$$= \int_0^b (\pi + x) f(x)\,dx - \int_b^a (\pi - x) f(x)\,dx + \int_0^a (\pi - x) f(-x)\,dx.$$

Наконец

$$\int_b^c F(\omega)\,d\omega = \pi \int_b^c f(x)\,dx\,^*. \tag{27}$$

216 Так как границы b, c интегралов совершенно произвольны и могут быть сближаемы до равенства или по крайней мере до элементов $[F(x) - f(x)]\,dx$ с одинаковым знаком, то необходимо для $x \geqq 0$

$$F(x) = \pi f(x)\,^*. \tag{28}$$

Таким же образом могли бы доказывать справедливость последнего уравнения для $x < 0$.

---

* В правильной записи

$$\lim_{i \to \infty} \int_b^c F_i(\omega)\,d\omega = \pi \int_b^c f(x)\,dx,$$

где

$$F_i(\omega) = \frac{1}{2} \int_{-a}^{a} \left[\sum_{-i}^{i} \cos i(x - \omega) \right] f(x)\,dx.$$

В этом равенстве содержится теорема, утверждающая, что если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема, то почленное интегрирование ее ряда Фурье (даже в том случае, когда этот ряд расходится) приводит к сходящемуся ряду, сумма которого равна интегралу от функции $f(x)$. Эта теорема была вновь доказана лишь в 1906 г. Лебегом (Lebesgue — Leçons sur les séries trigonométriques, Paris, 1906).

* Здесь у Лобачевского ошибка, связанная с отмеченной выше неаккуратностью обозначений, не позволяющей судить о том, совершен ли уже предельный переход или нет. Равенство (28) справедливо лишь в том случае, когда заранее известно, что ряд Фурье функции $f(x)$ сходится, т. е. существует предел

$$F(\omega) = \lim_{n \to \infty} F_n(\omega)$$

и что

$$\lim_{n \to \infty} \int_b^c F_n(\omega)\,d\omega = \int_b^c \lim_{n \to \infty} F_n(\omega)\,d\omega = \int_b^c F(\omega)\,d\omega.$$

Таким образом, выводы, которые в дальнейшем Лобачевский делает из (28), обоснованы только при этих предположениях и поэтому не представляют интереса.

Если напротив предположим $c > a$, то

$$\int_0^a \left\{c + 2\sum_1^\infty \frac{1}{i}\sin i(c - x)\right\} f(x)\,dx =$$

$$= \int_0^c \left\{c + 2\sum_1^\infty \frac{1}{i}\sin i(c - x)\right\} f(x)\,dx - \int_a^c \left\{c + 2\sum_1^\infty \frac{1}{i}\sin i(c - x)\right\} f(x)\,dx =$$

$$= \int_0^a (\pi + x) f(x)\,dx,$$

$$\int_0^a \left\{c + 2\sum_1^\infty \frac{1}{i}\sin i(c + x)\right\} f(x)\,dx = \int_0^a (\pi - x) f(-x)\,dx,$$

следовательно

$$\int_{-a}^{+a} \left\{c + 2\sum_1^\infty \frac{1}{i}\sin i(c - x)\right\} f(x)\,dx =$$

$$= \int_0^a (\pi + x) f(x)\,dx + \int_0^a (\pi - x) f(-x)\,dx.$$

Если к тому снова $b \gtreqless 0$, то

$$\int_b^c F(\omega)\,d\omega = \pi \int_b^a f(x)\,dx.$$

117 Если ж $b < -a$, то не трудно таким же образом найти, что

$$\int_b^c F(\omega)\,d\omega = \pi \int_{-a}^{+a} f(x)\,dx.$$

Из последних двух уравнений и с помощью (27) следует, что для $b > a$, $c > b$

$$\int_b^c F(\omega)\,d\omega = 0, \quad \int_{-c}^{-b} F(\omega)\,d\omega = 0.$$

Это значит, что для $x > a$, $x < -a$ всегда

$$F(x) = 0.$$

Другое заключение можно отсюда вывести еще то, что уравнение (28) справедливо и для $f(x) = 0$ между известных границ; а следовательно и тогда, когда между тех же границ поставится

новая функция от x, так что в уравнении (26) функция $f(x)$ может быть постепенна или нет, всегда

$$F(x)=\pi f(x)$$

для $x<+a$, $>-a$. Так же

$$F(x)=0$$

для x вне границ $+a$, $-a$.

218 | Уравнение (28) не должно быть еще принято для всех значений $F(x)$, потому что оно выведено из сравнения интегралов (27), которых елементы могут разниться, как скоро число таких ограничено. Итак, остается исследовать, не принадлежит ли функции $F(x)$ особенных значений, которые нарушают постепенность.

Выражение для $F(x)$ в уравнении (26) можем представить еще в другом виде, как это делали и прежде:

$$F(\omega)=\frac{1}{2}\int\limits_{-a}^{+a}\frac{\sin\left\{\left(i+\frac{1}{2}\right)(x-\omega)\right\}}{\sin\frac{1}{2}(x-\omega)}f(x)\,dx\ ^*. \tag{29}$$

Если $f(x)=1$, то

$$F(\omega)=\frac{1}{2}\int\limits_{-a}^{+a}\left\{1+2\sum_{1}^{\infty}\cos i(x-\omega)\right\}dx=^*$$

$$=a+\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{i}\sin i(a-\omega)+\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{i}\sin i(a+\omega)$$

после чего находим, основываясь на уравнении (25)

$$2\pi=\int\limits_{-a}^{+a}\frac{\sin\left\{\left(i+\frac{1}{2}\right)(x-\omega)\right\}}{\sin\frac{1}{2}(x-\omega)}\,dx$$

или, ставя $x+\omega$ вместо x,

$$2\pi=\int\limits_{-a-\omega}^{+a-\omega}\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}\,dx,$$

---

* В правой части имеется в виду предел при $i\to\infty$. Это замечание относится также ко всем дальнейшим выкладкам.

* В правильной записи

$$F(\omega)=\frac{1}{2}\lim_{i\to\infty}\int\limits_{-a}^{a}\left\{1+2\sum_{1}^{i}\cos i(x-\omega)\right\}dx.$$

219 | потом для $\omega = 0$

$$\pi = \int_0^a \frac{\sin\left(i + \frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}\,dx.$$

Откуда для δ бесконечно малого положительного:

$$\pi = \int_0^\delta \frac{\sin\left(i + \frac{1}{2}\right)\delta}{\sin\frac{1}{2}\delta}\,d\delta, \tag{30}$$

для a, b произвольных с одинаковым знаком:

$$0 = \int_a^b \frac{\sin\left(i + \frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}\,dx. \tag{31}$$

Если в уравнении (30) ставим

$$\left(i + \frac{1}{2}\right)\delta = u$$

и принимаем $i = \infty$, то получим

$$\frac{1}{2}\pi = \int_0^\infty \frac{du}{u}\sin u \ ^*.$$

Уравнение (29) делается, когда вместо ω пишем $\omega + \delta$ ⋆

$$F(\omega + \delta) = \frac{1}{2}\int_{-a-\omega-\delta}^{+a-\omega-\delta} \frac{\sin\left(i + \frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x} f(x + \omega + \delta)\,dx,$$

тогда как для $\delta = 0$

$$F(\omega) = \frac{1}{2}\int_{-a-\omega}^{+a-\omega} \frac{\sin\left(i + \frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x} f(x + \omega)\,dx.$$

---

* Строгое обоснование этого равенства см. в пояснениях к выводу формулы (23) (сноски ⋆ на стр. 62 и * на стр. 63).

⋆ Сначала делается подстановка $x = t + \omega$, а затем ω заменяется через $\omega + \delta$.

Далее

320 $$F(\omega+\delta)-F(\omega)=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{-a-\omega}^{+a-\omega}\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}\{f(x+\omega+\delta)-f(x+\omega)\}\,dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\delta}\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)(x+a+\omega)}{\sin\frac{1}{2}(x+a+\omega)}f(-a-x+\delta)\,dx-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\delta}\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)(x-a+\omega)}{\sin\frac{1}{2}(x-a+\omega)}f(+a-x+\delta)\,dx.$$

Последние два интеграла для δ бесконечно малого могут быть заменены такими:

$$\frac{1}{2}f(-a)\int\limits_{a+\omega}^{a+\omega+\delta}\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}\,dx-\frac{1}{2}f(+a)\int\limits_{\omega-a}^{\omega-a-\delta}\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}\,dx$$

и согласно с уравнениями (30), (31) делаются нулями, кроме случаев $\omega=\pm a$, для которых обращаются в $\frac{1}{2}\pi f(-a)$, либо в $\frac{1}{2}\pi f(+a)$ *.

Итак полагаем

$$F(\omega+\delta)-F(\omega)=\frac{1}{2}\int\limits_{-a-\omega}^{+a-\omega}\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}\{f(x+\omega+\delta)-f(x+\omega)\}\,dx.$$

Означая h какое нибудь положительное число $< a-\omega$, интеграл принятый для $F(\omega+\delta)-F(\omega)$ можем разложить на три:

$$R=\frac{1}{2}\int\limits_{-a-\omega}^{-h}\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}\{f(x+\omega+\delta)-f(x+\omega)\}\,dx,$$

---

* Это утверждение не обосновано. Для его строгого обоснования можно, конечно, предположить кусочную монотонность функции $f(x)$ и повторить доказательство Дирихле.

221

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_{+h}^{+a-\omega}\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}\{f(x+\omega+\delta)-f(x+\omega)\}\,dx,$$

$$T=\frac{1}{2}\int\limits_{-h}^{+h}\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}\{f(x+\omega+\delta)-f(x+\omega)\}\,dx.$$

Покуда $f(x)$ от $x=-a$ до $x=-h+\omega+\delta$ и от $x=h+\omega$ до $x=a+\delta$ сохраняет постепенность и непрерывность [*], разность $f(x+\omega+\delta)-f(x+\omega)$ с уменьшением δ может быть сделана как угодно малой и представляет $\delta\cdot f'(x+\omega)$ [⋆], а следовательно

$$R=\frac{1}{2}\delta\int\limits_{-a-\omega}^{-h}\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}f'(x+\omega)\,dx,$$

$$S=\frac{1}{2}\delta\int\limits_{+h}^{+a-\omega}\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}f'(x+\omega)\,dx\text{ [⊘]};$$

таким же образом нашли бы

$$F(\omega)-F(\omega-\delta)=$$

$$=R+S+\frac{1}{2}\int\limits_{-h}^{+h}\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)(x+\delta)}{\sin\frac{1}{2}(x+\delta)}\{f(x+\omega+\delta)-f(x+\omega)\}\,dx\text{ [♀]}.$$

Предполагая однако ж нарушение постепенности значений $F(x)$ в переходе от $x=\omega+\delta$ к $x=\omega$, как бы δ мало ни было, мы должны допускать уже, что постепенность сохраняется в значениях $F(x)$ от $x=\omega-\delta$ до $x=\omega$, и потому разность $F(\omega)-F(\omega-\delta)$ почитать

---

[*] То-есть непрерывность и дифференцируемость.

[⋆] Точнее, $\delta f'(x+\omega+\theta\delta)$, где $0<\theta<1$.

[⊘] В правых частях этих двух равенств вместо $f'(x+\omega)$ нужно писать $f'(x+\omega+\theta\delta)$.

Если функция $f'(x)$ такова, что пределы интегралов в правых частях этих равенств при $i\to\infty$ существуют, то $\lim\limits_{\delta\to 0} R=\lim\limits_{\delta\to 0} S=0$.

[♀] Здесь через R и S обозначены не те величины, что раньше; однако и здесь, при соответствующих предположениях, $\lim\limits_{\delta\to 0} R=\lim\limits_{\delta\to 0} S=0$.

за нуль*. После этого

222 $$F(\omega+\delta)-F(\omega)=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-h}^{+h}\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}\{f(x+\omega+\delta)-f(x+\omega)\}\,dx-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-h}^{+h}\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)(x+\delta)}{\sin\frac{1}{2}(x+\delta)}\{f(x+\omega+\delta)-f(x+\omega)\}\,dx.$$

Произвольное число h можем принимать столько малым, что под знаком f в праве почитать x постоянным и затем уже писать

$$F(\omega+\delta)-F(\omega)=\frac{1}{2}\{f(\omega+\delta)-f(\omega)\}\int_{0}^{h}\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}\,dx+$$

$$+\frac{1}{2}\{f(\omega)-f(\omega-\delta)\}\int_{-h}^{0}\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}\,dx-$$

$$-\frac{1}{2}\{f(\omega+\delta)-f(\omega)\}\int_{0}^{h}\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)(x+\delta)}{\sin\frac{1}{2}(x+\delta)}\,dx-$$

$$-\frac{1}{2}\{f(\omega)-f(\omega-\delta)\}\int_{-h}^{0}\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)(x+\delta)}{\sin\frac{1}{2}(x+\delta)}\,dx.$$

Здесь, согласно с уравнениями (30) и (31), для h положительного

---

* То-есть Лобачевский, по определению, полагает $F(\omega)=F(\omega-0)$, но не объясняет, почему это не противоречит прежнему определению $F(x)$. Вообще, начиная с этого места и до конца стр. 223 оригинала (стр. 77 настоящего издания), не только обозначения, но и сами рассуждения Лобачевского в значительной мере не ясны. Наряду с ошибками и необоснованными выкладками, цель которых состоит в обосновании утверждения, содержащегося в первых строках стр. 224 оригинала (стр. 78 наст. издания), на тексте этих двух страниц сказалось и то обстоятельство, что Лобачевский, повидимому, перерабатывал свою рукопись во время ее печатания, и по недосмотру текст последних страниц либо был неаккуратно сверен, либо попал в набор из чернового наброска рукописи. Ошибки, отмеченные в сносках на стр. 79 и 80, объясняются, вероятно, этой же причиной.

Этот факт, а также и то обстоятельство, что Лобачевский сам не был удовлетворен заключительной частью сочинения «Об исчезании тригонометриче-

и отрицательного

$$\int_0^h \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}\,dx=\pi,\quad \int_0^h \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)(x+\delta)}{\sin\frac{1}{2}(x+\delta)}\,dx=0.$$

225 | К тому если разность $f(\omega)-f(\omega-\delta)$ также исчезает в постепенном ходе $f(x)$ от $x=\omega-\delta$ до $x=\omega$, то

$$F(\omega+\delta)-F(\omega)=\frac{1}{2}\pi\{f(\omega+\delta)-f(\omega)\}.$$

Не трудно видеть также и то, что в разности $F(\omega+\delta)-F(\omega)$ часть $R+S=0$.

Наконец, если постепенность функции $f(x)$ нарушается для $x=\omega+b$, то интеграл Q* можно разложить на три:

$$R'=\frac{1}{2}\int_{-a-\omega}^{b-h}\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}\{f(x+\omega+\delta)-f(x+\omega)\}\,dx,$$

$$S'=\frac{1}{2}\int_{b+h}^{a+\omega}\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}\{f(x+\omega+\delta)-f(x+\omega)\}\,dx,$$

$$T'=\frac{1}{2}\int_{b-h}^{b+h}\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}\{f(x+\omega+\delta)-f(x+\omega)\}\,dx,$$

из которых первые два снова уничтожаются для $\delta=0$, $h=0$, а последний делается

$$T'=\frac{1}{2}\{f(b+\omega+h)-f(b+\omega-h)\}\int_{b-h}^{b+h}\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}\,dx$$

и следовательно $T'=0$ согласно с уравнением (31).

226 Итак, особенные значения, кроме $\pi f(x)$, функция | $F(x)$ может *только приобретать с* $x=\pm a$ и с теми x, для которых нарушается постепенность функции $f(x)$. Все такие случаи мы теперь рассмотрим.

ских строк», подтверждаются следующим замечанием Лобачевского в его сочинении «Способ увериться ...» (стр. 124—125 наст. тома): «Кстати здесь я повторяю с новыми пояснениями тот способ, который изложен был в конце моего сочинения под названием „Об исчезании тригонометрических строк"; тем более, что сюда вкрались ошибки во время печатания с переменой означения».

* Повидимому, $Q=F(\omega+\delta)-F(\omega)$.

Пусть $x=\pm a$. Значения функции $f(x)$ должно почитать данными только от $x=-a$ до $x=+a$, вне которых границ можно полагать $f(x)$ произвольной, и потому, сохраняя далее постепенность, принимать для всякого положительного δ

$$\left.\begin{aligned} f(a+\delta)&=f(a-\delta),\\ f(-a-\delta)&=f(-a+\delta). \end{aligned}\right\} \qquad (82)$$

Затем для известного δ пусть

$$\varphi(x)=f(x+\delta),\ \psi(x)=f(x-\delta),$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — две функции от x для всех чисел от $x=-a$ до $x=+a$. Разумея δ бесконечно малым и следовательно $\varphi(+a-\delta)$, $\psi(-a+\delta)$ постепенно изменяющимися вместе с δ, можем допускать, основываясь на уравнениях (28) и (29)

$$\pi\varphi(+a-\delta)=\frac{1}{2}\int\limits_{-a}^{+a}\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)(x-a+\delta)}{\sin\frac{1}{2}(x-a+\delta)}\,\varphi(x)\,dx,$$

$$\pi\psi(-a+\delta)=\frac{1}{2}\int\limits_{-a}^{+a}\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)(x+a-\delta)}{\sin\frac{1}{2}(x+a-\delta)}\,\psi(x)\,dx$$

225 | или, все равно,

$$\pi f(+a)=\frac{1}{2}\int\limits_{-a+\delta}^{+a+\delta}\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)(x-a)}{\sin\frac{1}{2}(x-a)}\,\varphi(x-\delta)\,dx,$$

$$\pi f(-a)=\frac{1}{2}\int\limits_{-a-\delta}^{+a-\delta}\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)(x+a)}{\sin\frac{1}{2}(x+a)}\,\psi(x+\delta)\,dx.$$

Потом

$$\pi f(+a)=F(+a)+\frac{1}{2}\int\limits_{a}^{a+\delta}\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)(x-a)}{\sin\frac{1}{2}(x-a)}\,\varphi(x-\delta)\,dx-$$

$$\int^{-a+\delta}\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)(x-a)$$

$$\pi f(-a) = F(-a) + \frac{1}{2}\int\limits_{-a-\delta}^{-a} \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)(x+a)}{\sin\frac{1}{2}(x+a)}\psi(x+\delta)\,dx -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{a-\delta}^{a} \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)(x+a)}{\sin\frac{1}{2}(x+a)}\psi(x+\delta)\,dx,$$

или наконец:

$$\pi f(+a) = F(+a) + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\delta} \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)\delta}{\sin\frac{1}{2}\delta} f(a+\delta)\,d\delta -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\delta} \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)\delta}{\sin\frac{1}{2}\delta} f(-a+\delta)\,d\delta\,^{*},$$

$$\pi f(-a) = F(-a) + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\delta} \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)\delta}{\sin\frac{1}{2}\delta} f(-a-\delta)\,d\delta -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\delta} \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)\delta}{\sin\frac{1}{2}\delta} f(a-\delta)\,d\delta\,^{\star}.$$

---

* Здесь у Лобачевского ошибка. В действительности

$$\pi f(a) = F(a) + \frac{1}{2}\lim_{i\to\infty}\int\limits_{0}^{\delta} \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)\delta}{\sin\frac{\delta}{2}} f(a+\delta)\,d\delta -$$

$$-\frac{1}{2}\lim_{i\to\infty}\int\limits_{0}^{\delta} \frac{\sin\left[\left(i+\frac{1}{2}\right)(\delta-2a)\right]}{\sin\frac{1}{2}(\delta-2a)} f(-a+\delta)\,d\delta.$$

⋆ Здесь также ошибка. На самом деле

$$\pi f(-a) = F(-a) + \frac{1}{2}\lim_{i\to\infty}\int\limits_{0}^{\delta} \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)\delta}{\sin\frac{1}{2}\delta} f(-a-\delta)\,d\delta -$$

$$-\frac{1}{2}\lim_{i\to\infty}\int\limits_{0}^{\delta} \frac{\sin\left[\left(i+\frac{1}{2}\right)(\delta-2a)\right]}{\sin\frac{1}{2}(\delta-2a)} f(-a+\delta)\,d\delta.$$

216 | Отсюда, принимая в помощь уравнения (32) и (30), находим:

$$F(+a)=\frac{1}{2}\pi\{f(+a)+f(-a)\},$$

$$F(-a)=\frac{1}{2}\pi\{f(+a)+f(-a)\}\,*.$$

Если же постепенность функции $f(x)$ нарушается для $x=\omega$, так что $f(\omega)$ принадлежат два значения, которые означим $f(\omega+\delta)$, $f(\omega-\delta)$ с помощию бесконечно малых δ, то постепенность функции $f(x)$ будет соблюдена, когда, начиная с $x=\omega$ до $x=a$, вместо $f(x)$ будем разуметь

$$f(x)-f(\omega+\delta)+f(\omega-\delta),$$

а следовательно

$$F(\omega)=\pi f(\omega-\delta)+\frac{1}{2}\{f(\omega+\delta)-f(\omega-\delta)\}\int\limits_{\omega}^{a}\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)(x-\omega)}{\sin\frac{1}{2}(x-\omega)}\,dx.$$

Здесь

$$\int\limits_{\omega}^{a}\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)(x-\omega)}{\sin\frac{1}{2}(x-\omega)}\,dx=\int\limits_{0}^{a-\omega}\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}\,dx,$$

следовательно

$$F(\omega)=\frac{1}{2}\pi\{f(\omega-\delta)+f(\omega+\delta)\}.$$

---

* Это верно (при условиях, в которых имеет место теорема разложения) только, если $a=\pi$, как это видно из двух предыдущих сносок. Если же $a<\pi$, то на основании равенства (30) получим:

$$F(a)=\frac{\pi}{2}f(a),\; F(-a)=\frac{\pi}{2}f(-a).$$

УЧЕНЫЯ ЗАПИСКИ
ИМПЕРАТОРСКАГО КАЗАНСКАГО УНИВЕРСИТЕТА.

1835.

I. НАУКИ

1. Способъ увѣряться въ изчезаніи безконечныхъ строкъ и приближаться къ значенію функцій отъ весьма большихъ чиселъ.

(*Н. Лобачевскаго.*)

Извѣстно, что безконечная строка всякой разъ изчезаетъ, когда въ ней содержаніе члена къ предъидущему постоянно меньше единицы, съ которой разность однакожъ не должна переходить за какое нибудь опредѣленное число. Въ такомъ случаѣ прикладывая членъ за членомъ, приближаемся къ тому значенію, на которое вліяніе прочихъ отчасу стано-

1*

Первая страница оригинального издания сочинения «Способ уверяться в исчезании бесконечных строк и приближаться к значению функций от весьма больших чисел» (211-я стр. II книжки «Ученых записок Казанского университета» за 1835 г.).

К стр. 31.

СПОСОБ УВЕРЯТЬСЯ В ИСЧЕЗАНИИ БЕСКОНЕЧНЫХ СТРОК И ПРИБЛИЖАТЬСЯ К ЗНАЧЕНИЮ ФУНКЦИЙ ОТ ВЕСЬМА БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

[1]

1835 II 211 ‖ Известно, что бесконечная строка всякий раз исчезает *, когда в ней содержание ⋆ члена к предъидущему постоянно меньше единицы, с которой разность однако ж не должна переходить за какое нибудь определенное число. В таком случае прикладывая член за членом, приближаемся к тому значению, на которое влияние про-
212 чих отчасу стано|вится менее, покуда с достижением назначенной точности сделается совершенно нечувствительным. Напротив, когда сказанное содержание постоянно больше единицы, то строка растет и не может служить для вычисления. Остается решить, из двух случаев к которому принадлежит та строка, где содержание члена к предъидущему хотя везде меньше единицы, но разность, уменьшаясь, наконец уничтожается ⊘.

О таких строках Г. Дирксен напечатал недавно рассуждение, читанное в заседании Берлинской Академии наук 16 Февраля 1832 года (Ueber die Bedingungen der Convergenz und der Divergenz der unendlichen Reihen. v. Dirksen). Сочинитель обнимает свой предмет во всей обширности, разделяя строки на классы, роды, виды с отменами, которых число восходит до 23; потом дает 9 предварительных положений, основывая на них пять предложений для различных случаев. Способ Г. Дирксена нельзя назвать

---

* Напоминаем (см. стр. 31), что Лобачевский всегда называет ряд *строкой*, а сходимость ряда — *исчезанием* строки.

⋆ Лобачевский всегда применяет вместо «отношение» слово «*содержание*».

⊘ Речь идет о том случае, когда известный признак Даламбера сходимости бесконечных рядов отказывается служить, т. е. когда отношение $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ постоянно меньше единицы, но $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$.

общим; к тому ж в его главных положениях есть одно (Hülfsatz I), которое не должно быть принято без ограничения. Это положение, с употреблением тех же знаков, какие придумал Г. Дирксен, заключается в том, что когда r можно взять довольно большое число, чтобы неравенство

$$\text{v. n.}\,(a_{r+m}-a_r)<\varepsilon\ ^*$$

213 | оставалось справедливо для произвольного m и как бы ε ни было мало; то

$$\overset{m=\infty}{\mathrm{Gr}}\ a_m=g_a\,^{\star}.$$

Между тем полагая

$$a_m=\log m,$$

находим

$$\text{v. n.}\,(a_{r+m}-a_r)=\log\left(1+\frac{m}{r}\right).$$

Здесь можем взять r так велико, чтобы $\log\left(1+\frac{m}{r}\right)$ для всякого m был уже меньше какого нибудь данного числа ε ∅, тогда как $\log m=\infty$ для $m=\infty$.

Кажется надобно дать преимущество тому способу, который я придумал и применил к двум случаям (Алгебра или вычисление конечных 1834 года; стр. 337 ♀. О тригонометрических строках, в Ученых Записках Казанского Университета за 1834 год ⫱), и который не только подает средство судить об исчезании бесконечной строки, но вместе назначает самые границы приближения. Здесь намерен я говорить об этом способе гораздо пространнее **.

214 | Пусть $f(i)$, положительное число, представляет какую нибудь функцию целого i, а вместе всякий член в бесконечной строке

$$S=\sum_1^\infty f(i), \tag{1}$$

---

* Здесь v. n. — символ абсолютной величины (повидимому, valeur numérique).

⋆ Обозначение $\overset{m=\infty}{\mathrm{Gr}}\ a_m$ равносильно современному $\lim\limits_{m\to\infty} a_m$.

∅ Это, конечно, неверно. Некоторые пояснения даны в примечании [9].

♀ Страница указана по оригинальному изданию «Алгебры». В настоящем издании она соответствует стр. 233—234 IV тома (статья 182).

⫱ См. стр. 35—39 наст. тома.

** Речь идет о найденном Лобачевским признаке сходимости. Подробнее об этом признаке см. приложение I (стр. 252 наст. тома). Там же дано доказательство не только достаточности, но и необходимости признака сходимости Лобачевского.

которая происходит, когда складываем значения $f(i)$, ставя на место i по порядку числа 1, 2, 3 . . . и т. д. до бесконечности.

Функцию $f(i)$ можем снова предполагать значением бесконечной строки

$$f(i)=\sum l\, 2^{a-\lambda} \qquad \begin{cases} \lambda=0 \\ \lambda=\infty, \end{cases} \tag{2}$$

которая происходит с разложением по степеням от 2, так что здесь a постоянное для всех членов, λ или нуль или целое положительное число, $l=1$ для $\lambda=0$, потом или $l=0$, или $l=1$ для всякого другого λ. Ставя такое значение (2) функции $f(i)$ в уравнение (1), должны получить

$$S=\sum L\, 2^{a-\lambda} \qquad \begin{cases} \lambda=0 \\ \lambda=\infty \end{cases}$$

215 |с целыми положительными числами L. Пусть теперь μ — такое целое, для которого

$$f(\mu)\geqq 2^{a-\lambda}, \quad f(\mu+1)\leqq 2^{a-\lambda}\,*. \tag{3}$$

После чего $L\leqq\mu$, а следовательно

$$S<\sum \mu\, 2^{a-\lambda} \qquad \begin{cases} \lambda=0 \\ \lambda=\infty. \end{cases} \tag{4}$$

Условия (3) служат к определению границы, за которую μ не переходит, и которая, будучи поставлена в уравнение (4), назначает вместе границу для значения самой строки, по крайней мере всякий раз, когда в этом виде суммование возможно. Такого рода способ яснее будет виден на примерах.

Пусть

$$f(i)=\frac{1}{i^n}$$

с постоянным числом n для всех членов в строке. Надобно теперь полагать

$$\mu^n<2^{\lambda-a}$$

216 |и следовательно

$$\mu<2^{\frac{\lambda-a}{n}}.$$

---

* Если эти неравенства определяют несколько значений μ, то нужно взять наибольшее из них; поэтому лучше писать:

$$f(\mu)\geqslant 2^{a-\lambda},\ f(\mu+1)<2^{a-\lambda}.$$

Основываясь далее на неравенстве (4), получим

$$S<\sum 2^{\left(1-\frac{1}{n}\right)(a-\lambda)} \qquad \begin{cases}\lambda=0\\ \lambda=\infty.\end{cases}$$

Откуда для $n>1$

$$S<\frac{2^{a-\frac{1}{n}a}}{1-2^{\frac{1}{n}-1}},$$

так что в этом случае бесконечная строка

$$S=\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{i^n}$$

исчезает всегда, как бы разность $n-1$ ни была мала.

Пусть еще

$$f(i)=\frac{1}{i^n(i^n-p)}$$

217 с постоянными положительными числами n, p. Надобно полагать

$$\mu^{2n}-p\mu^n=2^{\lambda-a}-\delta,$$

где $\delta\gtreqless 0$. Находим

$$\left(\mu^n-\frac{1}{2}p\right)^2=\left(2^{\frac{1}{2}(\lambda-a)}+\frac{1}{2}p\right)^2-p\,2^{\frac{1}{2}(\lambda-a)}-\delta$$

и следовательно

$$\mu^n<p+2^{\frac{1}{2}(\lambda-a)}.$$

Если λ число так большое, что

$$p\,2^{\frac{1}{2}(a-\lambda)}<1,$$

то для $n\geqq 1$

$$1+p\,2^{\frac{1}{2}(a-\lambda)}\leqq 1+p^{\frac{1}{n}}\,2^{\frac{1}{2n}(a-\lambda)};$$

тем сильнее

$$1+p\,2^{\frac{1}{2}(a-\lambda)}<\{1+p^{\frac{1}{n}}\,2^{\frac{1}{2n}(a-\lambda)}\}^n.$$

После чего

218
$$\mu<p^{\frac{1}{n}}+2^{\frac{1}{2n}(\lambda-a)},$$

а ставя такую границу значений μ в неравенство (4), получим

$$S<\sum p^{\frac{1}{n}}\,2^{a-\lambda}+\sum 2^{\left(1-\frac{1}{2n}\right)(a-\lambda)} \qquad \begin{cases}\lambda=0\\ \lambda=\infty.\end{cases}$$

Итак для $n \geqq 1$

$$S < p^{\frac{1}{n}} 2^{a+1} + \frac{2^{a - \frac{1}{2n} a}}{1 - 2^{\frac{1}{2n} - 1}} \text{*}.$$

Если ж $n < 1$, однако ж $> \frac{1}{2}$, то предполагая снова

$$p\, 2^{\frac{1}{2}(a-\lambda)} < 1,$$

пишем

$$\mu < \{p + 2^{\frac{1}{2}(\lambda - a)}\}\{p + 2^{\frac{1}{2}(\lambda-a)}\}^{\frac{1}{n}-1} <$$
$$< \{p + 2^{\frac{1}{2}(\lambda-a)}\}\{p^{\frac{1-n}{n}} + 2^{\frac{1-n}{2n}(\lambda-a)}\} <$$
$$< p^{\frac{1}{n}} + p^{\frac{1}{n}-1} 2^{\frac{1}{2}(\lambda-a)} + p\, 2^{\frac{1-n}{2n}(\lambda-a)} + 2^{\frac{1}{2n}(\lambda-a)}.$$

Потом, смотря на неравенство (4),

$$S < p^{\frac{1}{n}} \sum 2^{a-\lambda} + p^{\frac{1}{n}-1} \sum 2^{\frac{1}{2}(a-\lambda)} +$$
$$+ p \sum 2^{\frac{3n-1}{2n}(a-\lambda)} + \sum 2^{\left(1 - \frac{1}{2n}\right)(a-\lambda)} \qquad \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = \infty. \end{cases}$$

219 | Наконец отсюда

$$S < p^{\frac{1}{n}} 2^{a+1} + p^{\frac{1}{n}-1} 2^{\frac{1}{2}a}(2 + \sqrt{2}) + \frac{p\, 2^{\frac{3n-1}{2n} a}}{1 - 2^{\frac{1-3n}{2n}}} + \frac{2^{\left(1 - \frac{1}{2n}\right) a}}{1 - 2^{\frac{1}{2n} - 1}}.$$

Итак, бесконечная строка

$$S = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{i^n (i^n - p)}$$

исчезает для всякого $n > \frac{1}{2}$, как бы разность $2n - 1$ мала ни была.

Если нужно доказывать это последнее предложение, не заботясь о степени приближения, то довольно заметить, что для

$$p < 2^{\frac{1}{2}(\lambda - a)}$$

---

* Нужно было, конечно, предположить, что $p \neq m^n$, где m — целое положительное число. В остальном сходимость ряда при $n \geqslant 1$ доказана Лобачевским строго, однако оценка суммы проведена не вполне аккуратно, так как Лобачевский пользуется тем, что λ достаточно велико и $p\, 2^{\frac{1}{2}(a-\lambda)} < 1$, а суммирование распространяет на все индексы от $\lambda = 0$.

Такое же замечание можно сделать и к следующей далее оценке суммы в случае, когда $\frac{1}{2} < n < 1$.

необходимо

$$\mu^n < 2^{\frac{1}{2}(\lambda-a)+1}.$$

Откуда

$$\mu < 2^{\frac{\lambda-a+2}{2n}},$$

330 | потом

$$S < 2^{\frac{1}{n}} \sum 2^{(a-\lambda)\left(1-\frac{1}{2n}\right)}. \qquad \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = \infty, \end{cases}$$

и следовательно для $n > \frac{1}{2}$

$$S < \frac{2^{\frac{1}{n}+a\left(1-\frac{1}{2n}\right)}}{1-2^{\frac{1}{2n}-1}}.$$

Обратимся к самым основаниям нашего способа. Здесь из двух условий (3) довольно которого нибудь одного для назначения границы числам μ, тогда как другое заменяется неравенством (4)[*]. К тому данная строка (1) необходимо предполагает уменьшение $f(i)$ с возрастанием i[*]; следовательно, граница для μ может только выходить из первого условия (3), именно

$$f(\mu) > 2^{a-\lambda}, \tag{5}$$

которое дозволяется впрочем соединять и со вторым

$$f(\mu+1) < 2^{a-\lambda},$$

331 | лишь бы в этом соединении не уничтожался показатель λ[⊘], в зависимости с которым должна быть назначаема граница числам μ. Если $f(\mu)$ алгебраическая функция, то граница может быть отыскана для μ, так же как это делается для положительных корней в уравнении, по способу всем известному.

Что касается до числа a, так его можем определять или неравенством

$$f(r+1) < 2^a,$$

---

[*] Лобачевский имеет в виду, что первого из неравенств (3) достаточно для оценки суммы ряда сверху; если же пользоваться только вторым из неравенств (3), то из определяемых при помощи него значений μ нужно брать то, при котором справедливо и (4), т. е. наибольшее.

[*] Для оценки суммы ряда сверху при помощи (4) и, следовательно, при пользовании способом Лобачевского как достаточным признаком сходимости требование монотонности функции $f(i)$ излишне.

[⊘] Неясно, что̀ Лобачевский называет «уничтожением» показателя λ.

или лучше строгим уравнением

$$f(r) = 2^{a+1}, \tag{6}$$

разумея под r число, которое принадлежит первому из тех членов, откуда строка начинает исчезать *. В этом последнем случае

$$S < \sum_1^r f(i) + \sum (\mu - r) 2^{a-\lambda} \qquad \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = \infty. \end{cases} \tag{7}$$

Пусть например

$$f(i) = n_c^{-i} x^i \star,$$

232 |где n, x произвольные числа, и где

$$n_c^{-i} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-i+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \quad i}$$

по принятому мной означению для членов в строке, которая представляет степень от суммы $(1+x)$ с показателем n (Алгебра или вычисление конечных). Вообще буква c внизу, по примеру Г. Бартельса (Vorlesungen über Math. Analys.)⊘, будет означать деление на произведение целых, от единицы по порядку до того числа, какой вверху показатель.

Теперь надобно полагать

$$n_c^{-\mu} x^\mu > 2^{a-\lambda}$$

и первую часть этого неравенства принимать всегда положительной. Если к тому x положительное, $n+1 \geqq 0$, μ так велико, что находим $r < \mu$, для которого

$$\frac{n-r}{r+1} \leqq 1♀,$$

то

$$n_c^{-\mu} x^\mu \leqq n_c^{-r} x^\mu;$$

233 |следовательно,

$$n_c^{-r} 2^{\lambda-a} \geqq \left(\frac{1}{x}\right)^\mu,$$

а переходя к Неперовым логарифмам, получим

$$(\lambda - a)\log 2 + \log(n_c^{-r}) \geqq \mu \log\left(\frac{1}{x}\right)$$

---

* То-есть, начиная с которого, члены ряда монотонно убывают.

⋆ Обычное обозначение у Лобачевского. См. т. IV, стр. 184 и наст. том, стр. 46.

⊘ J. M. C. Bartels — Vorlesungen über mathematische Analysis. Dorpat, 1833. Н. И. Лобачевский слушал лекции М. Ф. Бартельса в Казанском университете.

♀ В левой части подразумевается знак абсолютной величины.

— неравенство, которое впрочем определяет границу чисел μ только для $x < 1$. В этом предположении бесконечная строка

$$S = \sum_0^\infty n_0^{\infty i} x^i$$

всегда исчезает, потому что неравенство (7) дает

$$S - \sum_0^r n_0^{\infty i} x^i < \sum \left[\frac{(\lambda - a)\log 2 + \log (n_0^{\infty r})}{\log\left(\frac{1}{x}\right)} - r \right] 2^{a-\lambda} = \quad \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = \infty \end{cases}$$

$$= -\frac{2^{a+1}}{\log x}\{(1-a)\log 2 + \log (n_0^{\infty r})\} - r\, 2^{a+1},$$

куда вставляя значение a из уравнения

$$n_0^{\infty r} x^r = 2^{a+1},$$

334 получим

$$S - \sum_0^r n_0^{\infty i} x^i < -\frac{2\log 2}{\log x} n_0^{\infty r} x^r \, *.$$

Для $n + 1 = 0$ можно принимать $r = 0$, и тогда

$$\frac{1}{1-x} < 1 + \frac{2\log 2}{\log\left(\frac{1}{x}\right)}.$$

Откуда находим, ставя $\frac{\alpha}{x}$ вместо x,

$$\frac{1}{x}\log x < \frac{2\log 2}{\alpha} + \frac{1}{x}\log\left(\frac{1}{4}\alpha\right)$$

для всякого $x > 1$, $\alpha < x$. Увеличивая сперва произвольное положительное число α, потом также x до бесконечности, заключаем, что для $x = \infty$

$$\frac{1}{x}\log x = 0.$$

Это последнее предложение можно доказать еще простее, когда заметим, что для $x > 1$

$$e^{x-1} > x.$$

---

* Здесь, повидимому, описка, не имеющая, впрочем, существенного значения. Из предыдущего равенства следует, что

$$S - \sum_0^r n_0^{\infty i} x^i < -\frac{n_0^{\infty r} x^r}{\log x}[2\log 2 + (1 - \log 2)\log n_0^{\infty r}].$$

После чего

$$1 - \frac{1}{x} > \frac{1}{x} \log x.$$

225 | Ставя сюда $\frac{x}{a}$ вместо x, получим

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \log a > \frac{1}{x} \log x.$$

Всегда, следовательно, x с a можем увеличивать до того, что

$$\frac{1}{x} \log x$$

будет менее всякого данного числа.

Для $n+1<0$, $x<1$ можем взять μ так велико, что найдем целое $r<\mu$, для которого, как выше заметили,

$$\frac{r-n}{r+1} x = \delta,$$

где $\delta < 1$. В таком случае

$$n_0^{\infty \mu} x^{\mu} < n_0^{\infty r} x^r \delta^{\mu - r} < n_0^{\infty r} \left(\frac{r+1}{r-n} \right)^r \delta^{\mu}.$$

Условие (5) будет, следовательно, выполнено, как скоро

226 |

$$n_0^{\infty r} \left(\frac{r+1}{r-n} \right)^r \delta^{\mu} > 2^{a-\lambda}.$$

Теперь если хотим судить об остатке S' в бесконечной строке

$$\sum_0^{\infty} n_0^{\infty i} x^i$$

за членом $f(r)$, то должны полагать

$$n_0^{\infty r} x^r = 2^{a+1}$$

и тогда

$$2^{\lambda+1} > \left(\frac{1}{\delta} \right)^{\mu - r}.$$

Откуда

$$\mu - r < -\frac{(\lambda+1) \log 2}{\log \delta}.$$

Потом из неравенства (7) выводим

$$S' < -2^{a+2} \frac{\log 2}{\log \delta}$$

227 | или, наконец,

$$S' < \frac{2 n_0^{\infty r} x^r \log 2}{\log (r+1) - \log (r-n) - \log x}.$$

Итак, строка для степени $(1+x)$ с показателем n, расположенная по восходящим степеням x, исчезает для всякого числа n, как скоро $x<1$ по величине.

Пусть еще требуется решить, приближается ли выражение

$$A_m=\log m-\left\{\frac{1}{\alpha+1}+\frac{1}{\alpha+2}+\ldots+\frac{1}{\alpha+m}\right\}$$

к определенному числу, с возрастанием целого положительного m, и для всякого α, кроме целых отрицательных.

Для $m=\infty$ можно рассматривать A_m как значение бесконечной строки

$$S=A_m+\sum_1^{\infty}(A_{m+i}-A_{m+i-1}),$$

где общий член

[illegible] | $$A_{m+i}-A_{m+i-1}=\log\left(1+\frac{1}{m+i-1}\right)-\frac{1}{m+i+\alpha}.$$

Следуя нашему способу, полагаем

$$\log\left(1+\frac{1}{\mu+m-1}\right)-\frac{1}{\mu+m+\alpha}>2^{a-\lambda}$$

или, по разложении в бесконечную строку,

$$2^{a-\lambda}<\frac{(\alpha+1)-\frac{1}{2}}{(\mu+m-1)^2}-\frac{(\alpha+1)^2-\frac{1}{3}}{(\mu+m-1)^3}+\frac{(\alpha+1)^3-\frac{1}{4}}{(\mu+m-1)^4}-\ldots$$

Пусть

$$\alpha>\frac{1}{\sqrt{3}}-1$$

— случай, к которому приводится всякий другой. Берем еще μ так велико, чтобы

$$(\alpha+1)^2-\frac{1}{3}>\frac{(\alpha+1)^3-\frac{1}{4}}{\mu+m-1}-\frac{(\alpha+1)^4-\frac{1}{5}}{(\mu+m-1)^2}+\ldots$$

или, все равно,

$$(\alpha+1)^2-\frac{1}{3}>\frac{(\alpha+1)^3}{\mu+m+\alpha}-\frac{1}{4(\mu+m-1)}+\frac{3}{5(\mu+m-1)^2}-\ldots$$

[illegible] | А как ни μ, ни m не должны быть <1, то последнему требованию будет удовлетворено предположением

$$(\alpha+1)^2-\frac{1}{3}>\frac{(\alpha+1)^3}{\mu+m+\alpha},$$

откуда

$$\mu > \frac{\alpha+1}{3(\alpha+1)^2-1}+1-m.$$

Число μ может быть, следовательно, всякое целое, как скоро

$$m > \frac{\alpha+1}{3(\alpha+1)^2-1}.$$

Далее,

$$2^{\alpha-\lambda} < \frac{2\alpha+1}{2(\mu+m-1)^2},$$

потом отсюда

$$\mu+m-1 < 2^{\frac{1}{2}(\lambda-\alpha-1)}\sqrt{2\alpha+1}.$$

280 |Между тем, основываясь на неравенстве (7), должны почитать

$$S < A_{m+1}+\sum(\mu-1)2^{\alpha-\lambda}; \qquad \begin{cases}\lambda=0\\ \lambda=\infty,\end{cases}$$

тем сильнее

$$S < A_{m+1}-m\sum 2^{\alpha-\lambda}+2\sqrt{2\alpha+1}\sum 2^{\frac{1}{2}(\alpha-\lambda-2)} \qquad \begin{cases}\lambda=0\\ \lambda=\infty\end{cases}$$

и наконец

$$S < A_{m+1}-m\,2^{\alpha+1}+2^{\frac{1}{2}(\alpha+1)}(1+\sqrt{2})\sqrt{2\alpha+1}.$$

Число α дается здесь уравнением

$$A_{m+1}-A_m=2^{\alpha+1};$$

следовательно,

$$2^{\alpha+1}=\log\left(1+\frac{1}{m}\right)-\frac{1}{m+\alpha+1}.$$

После чего

281 | $$S < A_{m+1}+(1+\sqrt{2})\sqrt{2\alpha+1}\sqrt{\log\left(1+\frac{1}{m}\right)-\frac{1}{m+\alpha+1}}-m\log\left(1+\frac{1}{m}\right)+\frac{m}{m+\alpha+1}.$$

Итак A_m не только приближается к известной границе с возрастанием числа m, но даже разность A_m с этой границей всегда менее

$$(1+\sqrt{2})\sqrt{2\alpha+1}\sqrt{\log\left(1+\frac{1}{m}\right)-\frac{1}{m+\alpha+1}}-(m-1)\log\left(1+\frac{1}{m}\right)+\frac{m-1}{m+\alpha+1},$$

какие бы числа m, α ни были, как скоро при том

$$\alpha > \frac{1}{\sqrt{3}} - 1,$$

$$m > \frac{\alpha + 1}{3(\alpha + 1)^2 - 1}.$$

Довольствуясь первым членом в разложении по степеням отрицательным от m, заключаем, что

232 | $$S > A_m; \quad S < A_m + \frac{2\alpha + 1}{2m}(1 + \sqrt{2}).$$

Взятый теперь пример из сочинения Г. Дирксена принадлежит к тем случаям, где требуется сыскать значение функций от чрезвычайно больших чисел. В решении такого рода задач обыкновенно следуют Лапласу (Théorie analytique des probabilités). Я бы мог предложить в замен, даже с выгодой, употребление строки Маклореня для разности суммы с интегралом; но замечательно, что значение функций представляется бесконечным рядом, который не исчезает. Итак, строгость и возможность назначать границы приближения составляют уже преимущество нашего способа. Прежде, нежели буду говорить здесь об этом новом применении, надобно сказать еще несколько слов о произведениях с бесконечным числом производителей.

Разложение функций на бесконечное число производителей требует осторожности, как и самое разложение в бесконечные строки. Г. Бартельс (Vorlesungen über math. Analys.) может быть первый еще доказал со всей строгостию такое разложение для синусов и косинусов*. Между тем, если частные случаи доставляют особенные к тому средства, то по крайней мере в общем способе
233 должно предпочесть простую теорию Ейлера, как | скоро пополняем ее доказательством на то, что произведение с возрастанием числа множителей приближается к определенной границе.

Пусть $F(x)$, функция x, делается нулем только для $x = f(n)$ и так, что функция $f(n)$, оставаясь всегда положительной или всегда отрицательной, приобретает различные значения, когда вместо n

---

* Лобачевский ошибается. Разложение синуса в бесконечное произведение было строго обосновано еще Эйлером.

ставим по порядку целые числа до бесконечности. С этим предположением

$$F(x) = A\left\{1-\frac{x}{f(1)}\right\}\left\{1-\frac{x}{f(2)}\right\}\left\{1-\frac{x}{f(3)}\right\}\ldots,$$

если к тому постоянное A поверяет уравнение для какого нибудь x, а произведение бесконечного числа множителей приближается к известному значению вместе с тем, как производитель за производителем прибавляется*. Это последнее требование будет всякий раз выполнено, когда полагая

$$A_n = \log\left\{1-\frac{x}{f(n)}\right\}$$

находим, что бесконечная строка

$$\log F(x) = \log A + \sum \log A_i \qquad \begin{cases} i = 1 \\ i = \infty \end{cases}$$

234 | исчезает с возрастанием целого i. Итак, условие будет заключаться в том, чтобы начиная с известного $i = r$ в

$$\log\left\{1-\frac{x}{f(\mu)}\right\} > 2^{a-\lambda},$$

для всех других чисел $\mu > r$, выходило

$$\mu < 2^{\omega(\lambda-a)}$$

с числом $\omega < 1$, > 0. В таком случае по величине

$$\log F(x) - \log\{A\cdot A_1\cdot A_2\ldots A_{r-1}\} < \sum 2^{(1-\omega)(a-\lambda)} \qquad \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = \infty, \end{cases}$$

и следовательно

$$\log F(x) - \log(AA_1A_2\ldots A_{r-1}) < \frac{2^{(1-\omega)a}}{1-2^{\omega-1}}.$$

То же самое должно быть выведено как для множителей, где $f(n)$ положительные, так и для множителей особо, где $f(n)$ отрицательные; или в | противном случае по крайней мере для соединения тех и других вместе. 235

Например,

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x}$$

* Это утверждение в общем случае, как известно, несправедливо.

делается единицей для $x=0$ и нулем для всех $x=\pm n$ целых. После чего надобно полагать

$$\sin\pi x=\pi x\,(1-x^2)\left(1-\frac{1}{4}x^2\right)\left(1-\frac{1}{9}x^2\right)\ldots \tag{8}$$

Остается доказывать, что здесь произведению с бесконечным числом множителей принадлежит определенное значение. С этой целию пусть

$$\log\left(1-\frac{x^2}{\mu^2}\right)>2^{a-\lambda};$$

отсюда

$$2^{a-\lambda}<\frac{x^2}{\mu^2}+\frac{x^4}{2\mu^4}+\frac{x^6}{3\mu^6}+\ldots$$

Тем сильнее

$$2^{a-\lambda}<\frac{x^2}{\mu^2-x^2}$$

236 | или

$$\mu<x\sqrt{1+2^{\lambda-a}}.$$

Наконец,

$$\mu<x\left(1+2^{\frac{1}{2}(\lambda-a)}\right).$$

Теперь [смот. неравенство (7)]

$$\log\left\{\frac{\pi x}{\sin\pi x}(1-x^2)\left(1-\frac{1}{4}x^2\right)\ldots\left(1-\frac{x^2}{r^2}\right)\right\}<$$

$$<\sum(\mu-r)\,2^{a-\lambda}<x\sum 2^{\frac{1}{2}(a-\lambda)}+(x-r)\sum 2^{a-\lambda}= \qquad \begin{cases}\lambda=0\\ \lambda=\infty\end{cases}$$

$$=x\,2^{\frac{1}{2}(a+1)}(1+\sqrt{2})+(x-r)\,2^{a+1}.$$

Число a находим из уравнения

$$2^{a+1}=-\log\left(1-\frac{x^2}{r^2}\right).$$

Возьмем еще функцию

$$\frac{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}{2\pi x},$$

237 | которая делается единицей для $x=0$ и нулем для $x=\pm n\sqrt{-1}$ с целыми числами n. Надобно следовательно принимать

$$e^{\pi x}-e^{-\pi x}=2\pi x\,(1+x^2)\left(1+\frac{1}{4}x^2\right)\left(1+\frac{1}{9}x^2\right)\ldots$$

Далее пусть

$$\log\left(1+\frac{x^6}{\mu^2}\right)>2^{a-\lambda}$$

или, после разложения в строку,

$$2^{a-\lambda} < \frac{x^2}{\mu^2} - \frac{x^4}{2\mu^4} + \frac{x^6}{8\mu^6} - \ldots;$$

следовательно, μ всегда можно взять так велико, чтобы

$$2^{a-\lambda} < \frac{x^2}{\mu^2}.$$

Отсюда

$$\mu < x\, 2^{\frac{1}{2}(\lambda-a)}.$$

Потом

225 | $$\log\left(\frac{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}{2\pi x}\right) < \log\left\{(1+x^2)\left(1+\frac{1}{4}x^2\right)\ldots\left(1+\frac{x^2}{r^2}\right)\right\} + \\ + \sum(\mu-r)\,2^{a-\lambda} < \qquad \begin{cases}\lambda=0\\ \lambda=\infty\end{cases}$$

$$< \log\left\{(1+x^2)\left(1+\frac{1}{4}x^2\right)\ldots\left(1+\frac{x^2}{r^2}\right)\right\} + x(1+\sqrt{2})\,2^{\frac{1}{2}(a+1)} - r\,2^{a+1}.$$

Число a должно быть взято в уравнении

$$2^{a+1} = \log\left(1+\frac{x^2}{r^2}\right).$$

Этих примеров уже довольно, чтоб отсюда заимствовать правила для всякого другого случая в разложении функций на производители. Переходим теперь к значению функций $F(x)$, когда x весьма большое число *. Здесь все дело состоит в том, чтоб удовлетворить уравнению

$$F(x) = Ax^{ax+b}e^{cx}\varphi(x),$$

отыскавши постоянные A, a, b, c и новую функцию $\varphi(x)$, которая делается единицей для $x = \infty$ *. Показатели могут также содержать

139 степени | выше первой от x, если б это было нужно в некоторых случаях.

С этой целию Лаплас (Théorie analytique des probabilités, 1814, p. 175) составляет наперед уравнение для $F(x)$ с приращениями ⊘. Потом выражает $F(x)$ определенным интегралом, где переменное число ω заключается в элементе под видом

$$A\omega^{a\omega+b}\varphi$$

---

* То-есть к асимптотическим формулам при $x \to \infty$.

* Такого вида асимптотическая формула не всегда, конечно, существует.

⊘ То-есть уравнение в конечных разностях.

с постоянными A, a, b и с функцией φ от x, ω, которую надобно всякий раз определять, а также границы интегрирования, чтоб уравнение с приращениями поверялось. Столь искусственный способ справедливо может казаться весьма далеким от сущности в решении. К тому ж здесь интегралы разлагаются в предельные строки (séries limites), как их назвал Лаплас, которые в начале только исчезают, а потом растут до бесконечности. Замечание, сделанное самим Лапласом (Théorie analyt. des prob., 1814, p. 174), будто можно довольствоваться приближением с первыми членами, трудно было бы распространить на все случаи; тем менее доказывать это, когда надобно прибегать к обращению строк.

240 | Напротив, следуя тому способу, который здесь изложен, думаю, что вычисление вероятностей можем обратить в алгебраическое учение, кроме тех случаев, где по роду самых задач интегрирование необходимо.

Пусть требуется найти значение функции

$$F(x) = \left(1 + \frac{\omega}{x}\right)^x$$

с постоянным ω для чрезвычайно большого числа x. Взявши логарифм и разлагая в строку, получим

$$\log F(x) = \omega - \frac{\omega^2}{2x} + \frac{\omega^3}{3x^2} - \frac{\omega^4}{4x^3} + \dots$$

Так как эта строка всегда исчезает для $x^2 > \omega^2$, то, предполагая x чрезвычайно большим числом, можем довольствоваться приближением

$$\left(1 + \frac{\omega}{x}\right)^x = e^{\omega}, \tag{9}$$

которого границы легко назначить. Они будут для ω положительного

241 | $$\left(1 - \frac{\omega}{x}\right)^x < e^{-\omega} e^{-\frac{3\omega^2}{6x-4\omega}} > e^{-\omega} e^{-\frac{\omega^2}{2x-2\omega}} \text{*}.$$

* То-есть

$$e^{-\omega} e^{-\frac{\omega^2}{2x-2\omega}} < \left(1 - \frac{\omega}{x}\right)^x < e^{-\omega} e^{-\frac{3\omega^2}{6x-4\omega}}.$$

Потом

$$\frac{\omega^2}{2x}-\frac{\omega^3}{3x^2}+\ldots=\frac{\omega^2}{2x}\left\{1-\frac{2\omega}{3x}+\frac{2\omega^2}{4x^2}-\ldots\right\}>$$

$$>\frac{\omega^2}{2x}\left\{1-\frac{\omega}{x}+\frac{\omega^2}{2x^2}-\frac{\omega^3}{x^3}+\frac{\omega^4}{3x^4}-\ldots\right\}$$

$$>\frac{\omega^2}{2x}\left\{\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{2x^2}}-\frac{\omega x}{x^2-\omega^2}\right\}$$

$$<\frac{\omega^2}{2x}\left\{\frac{x^2}{x^2-\omega^2}-\frac{10\omega x}{15x^2-9\omega^2}\right\}^{*}.$$

После чего

$$\left(1+\frac{\omega}{x}\right)^x>e^{\omega}\cdot e^{-\frac{\omega^2 x}{2x^2-2\omega^2}+\frac{5\omega^3}{15x^2-9\omega^2}}$$

$$<e^{\omega}\cdot e^{-\frac{\omega^2 x}{2x^2-\omega^2}+\frac{\omega^3}{2x^2-2\omega^2}}\ \star.$$

[II]

243 | Предлагаем еще найти приближенное значение к выражению

$$(x+\alpha)^{\infty x}=(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+x) \tag{10}$$

с произвольным числом α и с весьма большим целым положительным x. Переходя к логарифмам, получим

$$\log(x+\alpha)^{\infty x}-\log(x+\alpha-1)^{\infty x-1}=\log(x+\alpha).$$

Чтоб уничтожить в этом уравнении $\log(x+\alpha)$⊘, должно ставить

$$(x+\alpha)^{\infty x}=(x+\alpha)^x f(x+\alpha)♀ \tag{11}$$

и потом определять новую функцию $f(x)$ в уравнении

$$\log f(x+\alpha)-\log f(x+\alpha-1)=(x-1)\log\left(1-\frac{1}{\alpha+x}\right).$$

Разложение в строку по степеням отрицательным от $x+\alpha$ дает

243 | $$\log\frac{f(x+\alpha)}{f(x+\alpha-1)}=-1+\frac{1+2\alpha}{2(x+\alpha)}+\frac{1+3\alpha}{2\cdot 3(x+\alpha)^2}+\frac{1+4\alpha}{3\cdot 4(x+\alpha)^3}+\ldots$$

---

* То-есть

$$\frac{\omega^2}{2x}\left\{\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{2x^2}}-\frac{\omega x}{x^2-\omega^2}\right\}<\frac{\omega^2}{2x}-\frac{\omega^3}{3x^2}+\ldots<\frac{\omega^2}{2x}\left\{\frac{x^2}{x^2-\omega^2}-\frac{10\omega x}{15x^2-9\omega^2}\right\}.$$

⋆ То-есть $e^{\omega}\cdot e^{-\frac{\omega^2 x}{2x^2-2\omega^2}+\frac{5\omega^3}{15x^2-9\omega^2}}<\left(1+\frac{\omega}{x}\right)^x<e^{\omega}\cdot e^{-\frac{\omega^2 x}{2x^2-\omega^2}+\frac{\omega^3}{2x^2-2\omega^2}}.$

⊘ Смысл этого предложения становится очевидным из дальнейшего.

♀ Обозначение неудачно. Вместо $f(x+\alpha)$ нужно бы писать $f(x, \alpha)$ и дальше, соответственно, $f(x-1, \alpha)$ вместо $f(x+\alpha-1)$.

Чтоб уничтожить в этой строке первый и второй член, надобно принимать

$$f(x+\alpha)=e^{-x}f_1(x+\alpha), \tag{12}$$

$$f_1(x+\alpha)=(x+\alpha)^{x+\frac{1}{2}}f_2(x+\alpha)\,^{*}, \tag{13}$$

где $f_1(x)$, $f_2(x)$ — функции x. Теперь находим:

$$2\log\frac{f_2(x+\alpha-1)}{f_2(x+\alpha)}=$$

$$=\frac{1}{2\cdot 3(x+\alpha)^2}+\frac{2}{3\cdot 4(x+\alpha)^3}+\frac{3}{4\cdot 5(x+\alpha)^4}+\ldots\,^{\star}. \tag{14}$$

Можно бы продолжать таким образом уничтожение первого члена в строках, вводя каждый раз новую функцию. Довольствуясь однако ж этой степенью приближения, полагаем

$$\log f_2(x+\alpha)=\log\psi(\alpha)+\sum\log\frac{f_2(x+\alpha+i-1)}{f_2(x+\alpha+i)}^{\varnothing}\quad\begin{cases}i=1\\ i=\infty\end{cases} \tag{15}$$

244 где $\psi(\alpha)$ — такая функция от α, в которую $f_2(x+\alpha)$ переходит с $x=\infty$. Когда x чрезвычайно большое число, то уравнения (14), (15) показывают ♀, что можно принимать без чувствительной разности

$$f_2(x+\alpha)=\psi(\alpha).$$

После чего уравнения (11), (12), (13) дают

$$(x+\alpha)^{\infty x}=\psi(\alpha)(x+\alpha)^{x+\alpha+\frac{1}{2}}e^{-x}\,^{‡}. \tag{16}$$

---

* См. предыдущую сноску. Вместо $f_1(x+\alpha)$ и $f_2(x+\alpha)$ следовало бы писать соответственно $f_1(x, \alpha)$ и $f_2(x, \alpha)$.

⋆ В правильных обозначениях в левой части следует писать:

$$2\log\frac{f_2(x-1,\ \alpha)}{f_2(x,\ \alpha)}.$$

∅ В правильных обозначениях под знаком суммы в правой части нужно писать:

$$\log\frac{f_2(x+i-1,\ \alpha)}{f_2(x+i,\ \alpha)}.$$

♀ Из (14) следует, что при достаточно большом i

$$\left|2\log\frac{f_2(x)+i-1,\ \alpha)}{f_2(x+i,\ \alpha)}\right|<\frac{1}{3|x+i+\alpha|^2}$$

и, следовательно, ряд в правой части (15) сходится при всех значениях x, кроме тех, при которых $x+\alpha$ есть целое отрицательное число, и существование предела $\psi(\alpha)=\lim\limits_{x\to\infty}f_2(x, \alpha)$ тем самым обосновано.

‡ Это равенство — асимптотическое (при $x\to\infty$).

Чтоб судить о степени приближения в этом уравнении, надобно, следуя нашему способу, начинать с неравенства

$$\log \frac{f_2(x+\alpha+\mu-1)}{f_2(x+\alpha+\mu)} > 2^{\alpha-\lambda}$$

или, принимая в помощь уравнение (14), полагать

$$2^{\alpha-\lambda} < \frac{1}{12(x+\alpha+\mu)^2} + \frac{2}{24(x+\alpha+\mu)^3} + \ldots \qquad (17)$$

или, наконец, еще сильнее:

245 | $$2^{\alpha-\lambda} < \frac{1}{12(x+\alpha+\mu)^2}\,^{*}. \qquad [17a]$$

Отсюда

$$\mu < -x-\alpha+\frac{2^{\frac{1}{2}(\lambda-\alpha)}}{2\sqrt{3}}. \qquad (18)$$

Между тем, к уравнению (15) применяя неравенство (7), должны почитать

$$\log \frac{f_2(x+\alpha)}{\psi(\alpha)} < \log \frac{f_2(x+\alpha)}{f_2(x+\alpha+1)} + \sum (\mu-1)\, 2^{\alpha-\lambda} \qquad \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = \infty, \end{cases}$$

а в соединении с неравенством (18) и сделавши суммование, находим:

$$\log \frac{f_2(x+\alpha)}{\psi(\alpha)} < \log \frac{f_2(x+\alpha)}{f_2(x+\alpha+1)} + \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \cdot 2^{\frac{1}{2}\alpha} - (x+\alpha+1)\, 2^{\alpha+1}.$$

Здесь

$$2^{\alpha+1} = \log \frac{f_2(x+\alpha)}{f_2(x+\alpha+1)}$$

и следовательно

246 | $$\log f_2(x+\alpha) < \log \psi(\alpha) + \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{6}}\, 2^{\frac{1}{2}\alpha} - (x+\alpha)\, 2^{\alpha+1}.$$

Уравнение (14) дает

$$2^{\alpha+1} < \frac{1}{12(x+\alpha)(x+\alpha-1)},$$

$$2^{\alpha+1} > \frac{1}{12(x+\alpha)^2}.$$

---

* Это неравенство не следует из (17). Для справедливости дальнейшего нужно, чтобы в [17a] правая часть была не меньше чем в (17). Например, если $|x+\alpha| \geqslant 2$, достаточно вдвое увеличить правую часть [17a], что приведет к соответствующему увеличению правых частей (18) и (19).

После чего

$$\log f_2(x+\alpha) < \log \psi(\alpha) + \frac{1}{12}\left\{\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{(x+\alpha)(x+\alpha-1)}} - \frac{1}{x+\alpha}\right\}. \qquad (19)$$

Итак мы справедливо сказали, что для весьма большого x можно без чувствительной погрешности функцию $f_2(x+\alpha)$ принимать за $\psi(\alpha)$. Эту последнюю функцию постараемся теперь определить из уравнения (16), которое строго справедливо для $x=\infty$. В этом предположении *

$$\psi(\alpha) = (x+\alpha)^{\infty x}(x+\alpha)^{-x-\alpha-\frac{1}{2}}e^{x}, \qquad (20)$$

$$\psi(0) = x^{\infty x}x^{-x-\frac{1}{2}}e^{x}, \qquad (21)$$

$$\psi(-\alpha) = (x-\alpha)^{\infty x}(x-\alpha)^{-x+\alpha-\frac{1}{2}}e^{x}. \qquad (22)$$

247 |В уравнение (20) поставивши $1-\alpha$ вместо α, потом $x-1$ вместо x, получим

$$\psi(1-\alpha) = (x-\alpha)^{\infty x-1}(x-\alpha)^{-x+\alpha-\frac{1}{2}}e^{x-1},$$

а в соединении с уравнением (22)

$$(1-\alpha)\psi(1-\alpha) = \frac{1}{e}\psi(-\alpha). \qquad (23)$$

Далее, произведение уравнений (20), (22) дает

$$\psi(\alpha)\psi(-\alpha) = (1-\alpha^2)(2^2-\alpha^2)\ldots(x^2-\alpha^2)\cdot(x^2-\alpha^2)^{-x-\frac{1}{2}}\left(\frac{x-\alpha}{x+\alpha}\right)^{\alpha}e^{2x},$$

а пользуясь уравнениями (21), (23), находим

$$e(1-\alpha)\cdot\frac{\psi(\alpha)\psi(1-\alpha)}{\psi(0)^2} =$$

$$= (1-\alpha^2)\left(1-\frac{\alpha^2}{2^2}\right)\ldots\left(1-\frac{\alpha^2}{x^2}\right)\left(1-\frac{\alpha^2}{x^2}\right)^{-x-\frac{1}{2}}\left(\frac{x-\alpha}{x+\alpha}\right)^{\alpha}\,{}^{*}$$

или основываясь на уравнениях (8), (9),

$$\psi(\alpha)\psi(1-\alpha) = \psi(0)^2\cdot\frac{\sin\alpha\pi}{e\cdot\alpha\pi(1-\alpha)}. \qquad (24)$$

248 |Откуда для $\alpha=\frac{1}{2}$

$$\psi(0) = \frac{1}{2}\psi\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi e}. \qquad (25)$$

---

* Это значит, что в правых частях следующих далее равенств подразумевается переход к пределу при $x\to\infty$.

* В оригинале в левой части этого равенства пропущены первые два множителя $e(1-\alpha)$.

В уравнение (21) ставим теперь $2x$ вместо x:

$$\psi(0)=(2x)^{\infty 2x}2^{-2x-\frac{1}{2}}x^{-2x-\frac{1}{2}}e^{2x}.$$

Сличая значения $\psi(0)$ в этом последнем уравнении с значением в уравнении (21), заключаем:

$$1=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{\infty x}x^{-x}e^{x}$$

или

$$\sqrt{2}=\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^{\infty x}}{2x+1}x^{-x}e^{x}.$$

Между тем уравнение (20) для $\alpha=\frac{1}{2}$ делается

$$\psi\left(\frac{1}{2}\right)=\left(x+\frac{1}{2}\right)^{\infty x}\left(x+\frac{1}{2}\right)^{-x-1}e^{x}.$$

Из соединения двух последних уравнений находим:

$$\psi\left(\frac{1}{2}\right)=2\sqrt{\frac{2}{e}},$$

249 | потом из уравнения (25):

$$\psi(0)=\sqrt{2\pi}.$$

Итак, уравнение (16) для $\alpha=0$ и для x чрезвычайно большого числа будет

$$x^{\infty x}=\sqrt{2\pi}\,x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x}, \tag{26}$$

как и Лаплас находит (Théorie analytique des probabilités). Для всякого ж вообще x должно полагать

$$x^{\infty x}=x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x}f_2(x), \tag{27}$$

и, следовательно, неравенство (19) дает ошибку в уравнении (26):

$$\frac{f_2(x)}{\sqrt{2\pi}}<e^{\frac{1+\sqrt{2}}{12\sqrt{x(x-1)}}-\frac{1}{12x}}<1+\frac{1}{6x\sqrt{2}}+\dots$$

Лаплас находит:

250 | $$\frac{f_2(x)}{\sqrt{2\pi}}=1+\frac{1}{12x}+\frac{1}{288x^2}+\dots$$

Уравнение (14) для $\alpha=0$ делается

$$2\log\frac{f_2(x-1)}{f_2(x)}=\frac{1}{2\cdot 3x^2}+\frac{2}{3\cdot 4x^3}+\frac{3}{4\cdot 5x^4}+\dots$$

Если хотим продолжать приближение к значению функции $f_2(x)$, то должны в последней строке уничтожить первый член, полагая

$$f_2(x) = e^{\frac{1}{12x}} f_3(x). \tag{28}$$

После чего находим

$$12 \log \frac{f_3(x)}{f_3(x-1)} = \sum_1^{\infty} \frac{i(i+1)}{(i+3)(i+4)x^{i+3}}, \tag{29}$$

а соединяя (27) и (28), получим

$$x^{\infty x} = x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x} e^{\frac{1}{12x}} f_3(x). \tag{30}$$

Для x чрезвычайно большого можем довольствоваться приближением

251 |
$$x^{\infty x} = \sqrt{2\pi}\, x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x} e^{\frac{1}{12x}}$$

или, разлагая в строку,

$$x^{\infty x} = \sqrt{2\pi}\, x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x} \left\{1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2} + \ldots\right\}.$$

Чтоб судить о степени такого приближения, заметим, что

$$\log f_3(x) = \log \psi(0) + \sum_1^{\infty} \log \frac{f_3(x+i-1)}{f_3(x+i)}.$$

Надобно, следовательно, полагать

$$-\log \frac{f_3(x+\mu-1)}{f_3(x+\mu)} > 2^{a-\lambda}$$

или, еще сильнее, основываясь на уравнении (29),

$$2^{a-\lambda} < \frac{1}{120(x+\mu)^4}\,{}^*.$$

Отсюда находим

$$\mu < -x + \frac{1}{\sqrt[4]{120}}\, 2^{\frac{1}{4}(\lambda-a)},$$

252 | а применяя неравенство (7), заключаем:

$$\log \sqrt{2\pi} - \log f_3(x) < 2^{a+1} + \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \left\{-x-1+\frac{1}{\sqrt[4]{120}}\, 2^{\frac{1}{4}(\lambda-a)}\right\} 2^{a-\lambda} = \frac{1}{\sqrt[4]{120}} \cdot \frac{2^{\frac{3}{4}a}}{1-2^{-\frac{3}{4}}} - x\,2^{a+1}.$$

---

* Здесь та же неточность, что и в неравенстве [17а] (см. сноску * на стр. 99).

Число a определяется уравнением

$$\frac{f_3(x)}{f_3(x+1)} = 2^{a+1};$$

следовательно,

$$2^{a+1} > \frac{1}{120x^4} < \frac{1}{120x^3(x-2)}\,*.$$

После чего

$$\log f_3(x) > \log\sqrt{2\pi} - \frac{1}{120x^2}\left\{\frac{1}{(\sqrt[4]{8}-1)\sqrt[4]{x(x-2)^3}} - \frac{1}{x}\right\}.$$

253 |В уравнении (29) уничтожаем первый член, полагая

$$f_3(x) = e^{-\frac{1}{360x^3}} f_4(x)\sqrt{2\pi}.$$

Так находим

$$720\log\frac{f_4(x-1)}{f_4(x)} = \sum_1^{\infty}\frac{(i+3)(i+1)\,i\,(i+14)}{(i+5)(i+6)\,x^{i+5}}, \qquad (31)$$

$$x^{\backsim x} = \sqrt{2\pi}\; x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x} e^{\frac{1}{12x}-\frac{1}{360x^3}} f_4(x).$$

В уравнении (31) уничтожится первый член, когда ставим

$$\log f_4(x) = \frac{1}{1260\,x^5} + \log f_5(x).$$

После чего находим

$$x^{\backsim x} = \sqrt{2\pi}\; x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x} e^{\frac{1}{12x}-\frac{1}{360x^3}+\frac{1}{1260x^5}} f_5(x).$$

$$30\,240\log\frac{f_5(x)}{f_5(x-1)} = \sum_1^{\infty}\frac{i(i+1)(i+3)(i+5)(i^2+24i+164)}{(i+7)(i+8)x^{i+7}}.$$

254 |Так продолжая, всегда приходим к строкам, подобным этой последней и каковы были в уравнениях (29), (31), которые все при том исчезают. После чего не трудно видеть, что вообще

$$x^{\backsim x} = \sqrt{2\pi}\; x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x} X, \qquad (32)$$

где функция X вычисляется помощию строки для $\log X$, которая сколько бы ни продолжалась, не перестает исчезать, будучи расположена по нисходящим степеням x. В ней останавливаясь на каком нибудь члене, можем назначать даже границы приближения, как и даны были выше примеры.

* То-есть

$$\frac{1}{120x^4} < 2^{a+1} < \frac{1}{120x^3(x-2)}.$$

Впрочем, значение $\log X$ заключается прямо в строке Маклорена

$$\sum u\,\Delta x = \int u\,dx - \frac{1}{2}\,u\,\Delta x + M_1 \frac{du}{dx}\,\Delta x_c^2 - M_2 \frac{d^3u}{dx^3}\,\Delta x_c^4 + \ldots * \qquad (33)$$

для всякой функции u от x и для всякого приращения Δx от x. Если ставим сюда

$$u = \log x, \quad \Delta x = 1,$$

335 |то находим

$$\sum \log x = A + \left(x - \frac{1}{2}\right)\log x - x + \frac{M_1}{2x} - \frac{M_2}{3\cdot 4x^3} + \frac{M_3}{5\cdot 6x^5} + \ldots *,$$

где A — постоянное перед интегралом. Между тем, логарифмы на обеих сторонах уравнения (32) дают

$$\log x + \sum \log x = \log \sqrt{2\pi} + \left(x + \frac{1}{2}\right)\log x - x + \log X.$$

После чего нетрудно видеть, что

$$A = \log \sqrt{2\pi},$$

$$\log X = \frac{M_1}{2x} - \frac{M_2}{3\cdot 4x^3} + \frac{M_3}{5\cdot 6x^5} - \frac{M_4}{7\cdot 8x^7} + \ldots \qquad (34)$$

Числа

$$M_1,\ M_2,\ M_3,\ \ldots$$

определяются, как известно, помощию множителей в строке для $\operatorname{tang} x$ при степенях дуги x. Так, если

$$\operatorname{tang} x = -\sum (-1)^i\, T_i x_c^{2i-1} \oslash \qquad \begin{cases} i = 1 \\ i = \infty, \end{cases} \qquad (35)$$

---

* Здесь Лобачевский пользуется следующими обозначениями:

$$\Delta x_c^k = \frac{\Delta x^k}{k!};\ M_k = (-1)^{k+1} B_{2k} \quad (B_{2k} \text{ — числа Бернулли}).$$

Сама запись формулы Эйлера-Маклорена недостаточно аккуратна; опечатки, имеющиеся в оригинале в этой формуле и в ряде других предшествующих равенству (36) формул, в настоящем издании исправлены.

* В левой части подразумевается $\sum\limits_{x=1}^{x-1} \log x$; эта же сумма понимается под $\sum \log x$ и в следующем равенстве.

$\oslash$ Эта формула неверна. Должно быть или $\operatorname{th} x = -\sum\limits_{i=1}^{\infty} (-1)^i\, T_i x_c^{2i-1}$, или $\operatorname{tg} x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} T_i x_c^{2i-1}$, где $x_c^{2i-1} = \dfrac{x^{2i-1}}{(2i-1)!}$.

256 | то

$$M_1 = \frac{2T_1}{2^2(2^2-1)},$$

$$M_2 = \frac{4T_2}{2^4(2^4-1)},$$

$$M_3 = \frac{6T_3}{2^6(2^6-1)}$$

и т. д.

Множители в строке (35) при степенях x вычисляются различным образом. К этому может служить найденное мной уравнение

$$T_m = -\sum (-1)^i \, 2^{2i-1} \, \frac{m-i}{i} \, (m-1)_0^{2i-1} \, T_{m-i}\ ^*,$$

которое делает вычисление гораздо короче, нежели все подобные уравнения до сих пор употребительные. Начиная с $T_1 = 1$ и ставя вместо m по порядку числа, получим:

$$T_2 = 2T_1,$$
$$T_3 = 2^3 T_2,$$
$$T_4 = 2\cdot 3^2 T_3 - 2^3 T_2,$$
$$T_5 = 2^5 T_4 - 2^4\cdot 3 T_3,$$

257 |

$$T_6 = 2\cdot 5^2 T_5 - 2^5\cdot 5 T_4 + 2^5 T_3,$$
$$T_7 = 2^3\cdot 3^2 T_6 - 2^4\cdot 5^2 T_5 + 2^8 T_4,$$
$$T_8 = 2\cdot 7^2 T_7 - 2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 7 T_6 + 2^5\cdot 5\cdot 7 T_5 - 2^7 T_4,$$
$$T_9 = 2^7 T_8 - 2^5\cdot 7^2 T_7 + 2^9\cdot 7 T_6 - 5\cdot 2^8 T_5,$$
$$T_{10} = 2\cdot 3^4 T_9 - 2^7\cdot 3\cdot 7 T_8 + 2^9\cdot 3\cdot 7^2 T_7 - 2^8\cdot 3^3 T_6 + 2^9 T_5.$$

Отсюда

$$T_2 = 2,$$
$$T_3 = 2^4,$$
$$T_4 = 2^4\cdot 17,$$
$$T_5 = 2^8\cdot 31,$$
$$T_6 = 2^9\cdot 691,$$
$$T_7 = 2^{12}\cdot 5461,$$
$$T_8 = 2^{11}\cdot 929\,569,$$
$$T_9 = 2^{16}\cdot 320\,229\,1,$$
$$T_{10} = 2^{17}\cdot 221\,930\,581.$$

---

* Суммирование распространено на значения i от 1 до $\left[\frac{m}{2}\right]$ $\left(\left[\frac{m}{2}\right]\right.$ — целая часть от $\left.\frac{m}{2}\right)$.

Строка (34) для $\log X$ будет, следовательно,

$$\log X = \frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + \frac{1}{1260x^5} - \frac{1}{1680x^7} + \\ + \frac{1}{1188x^9} - \frac{691}{360\,360x^{11}} + \frac{1}{156x^{13}} - \ldots\,^{*}. \quad (36)$$

238 | Кстати скажем здесь, что строка (35) для $\tan x$ исчезает, когда $x^2 < 1$, потому что в ней каждый множитель

$$T_i < (2i-1)^{\infty\,2i-1}.$$

Еще скорее должна исчезать известная строка

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{T_1}{2^2-1}\,x - \frac{T_2}{2^4-1}\,x_c^3 - \frac{T_3}{2^6-1}\,x_c^5 - \ldots,$$

когда $x<1$ по величине. Но сомнительно, чтоб можно было подобным образом доказывать исчезание строки (33) и при том для всякого $x<1$. Способ, которому следовал я здесь, приводит, собственно, только к тому заключению, что всегда можно взять x так большое число, чтоб остановясь на каком нибудь члене, пренебрегать остатком строки за малостию. О строке (33) в праве, следовательно, утверждать, что всякий раз, когда с уменьшением Δx уменьшается в геометрической прогрессии

$$\frac{d^{2n-1}u}{dx^{2n-1}}\,\Delta x_c^{2n-2}$$

или, все равно, когда по величине

239 | $$(2n-2)^{\infty\,2n-2}\,\frac{d^{2n-1}u}{dx^{2n-1}}$$

не переходит за какую нибудь определенную границу; можем взять Δx столько малым, чтоб остановясь в строке на известном члене, пренебрегать остатком за малостию, хотя бы самые члены поодиночке не уменьшались *. Это составляет особый род исчезания в таких строках, которые, собственно, растут ⊘. Для них можем оставить название *предельных* (séries limites), данное Лапласом

---

* В оригинале ошибочно

$$\log X = \frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + \frac{1}{1260x^5} - \frac{17}{29\,810x^7} + \\ + \frac{31}{14\,281x^9} - \frac{691}{15\,345x^{11}} + \frac{5461}{38\,610x^{13}} - \ldots$$

* Это утверждение Лобачевским не обосновано.

⊘ То-есть расходятся.

(Théorie analytique des probabilités), распростра чяя такое название даже на те строки, где знак перед членами не меняется, под условием однако ж, чтоб остаток в строке можно было рассматривать разложением функции, которой значение уменьшается до бесконечности. С этим ограничением только должно допускать употребление возрастающих строк (séries divergentes). Подобное замечание делает Лежандр о строке (34), не дав никакого впрочем доказательства и предлагая название *полуисчезающих строк* (demiconvergentes) *

Посмотрим теперь, к каким заключениям может привести сли-
260 чение двух решений. По способу | Лапласа (Théorie analytique des probabilités, éd. de 1814, p. 126) надобно полагать

$$(x+\alpha)^{\infty x}=\frac{\int\limits_0^\infty a^{x+\alpha}e^{-a}\,da}{\int\limits_0^\infty a^{\alpha}e^{-a}\,da}. \tag{37}$$

Между тем найдено выше, что

$$(x+\alpha)^{\infty x}=\psi(\alpha)\,(x+\alpha)^{x+\alpha+\frac{1}{2}}\,e^{-x}\cdot X', \tag{37'}$$

где под X' разумеется функция, которая происходит, когда в X ставим $x+\alpha$ вместо x *. Итак

$$\int\limits_0^\infty a^{x+\alpha}e^{-a}\,da=\psi(\alpha)(x+\alpha)^{x+\alpha+\frac{1}{2}}\,e^{-x}X'\int\limits_0^\infty a^{\alpha}e^{-a}\,da \tag{38}$$

— уравнение справедливое для произвольного переменного x[⊘]. Пусть теперь

$$a^{x+\alpha}e^{-a+\alpha}=(x+\alpha)^{x+\alpha}e^{-x}e^{-t^2},$$

$$a=x+\alpha+\theta.$$

Отсюда t определяем функцией θ:

261 | $$t=\theta\sqrt{\frac{1}{\theta}-\frac{x+\alpha}{\theta^2}\log\left(1+\frac{\theta}{x+\alpha}\right)}\ ^{♀}.$$

---

* Exercices de calcul intégral, par Legendre. T. I, p. 294. [*Примечание Лобачевского.*]

* В прежних обозначениях $\log X'(x+\alpha)=\log f_2(x+\alpha)-\log\psi(\alpha)$. Из (14) и (15) следует, что эта величина действительно зависит только от $x+\alpha$.

⊘ В равенстве (37) предположено, что $\alpha>-1$ и $x>0$.

♀ Лобачевский пишет это равенство вместо

$$t=\sqrt{\theta-(x+\alpha)\log\left(1+\frac{\theta}{x+\alpha}\right)}$$

для того, чтобы установить взаимно однозначное соответствие между значениями a и t (значениям a от 0 до $x+\alpha$ соответствуют отрицательные значения t, значениям от $x+\alpha$ до ∞ — положительные).

Это значение t показывает, что границам $a=0$, $a=\infty$ отвечают $t=-\infty$, $t=+\infty$. После чего

$$\int_0^\infty a^{x+\alpha} e^{-a}\, da =$$

$$=2(x+\alpha)^{x+\alpha} e^{-\alpha} e^{-x}\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{-t^2}\left(\frac{x+\alpha}{\theta}+1\right)\sqrt{\theta-(x+\alpha)\log\left(1+\frac{\theta}{x+\alpha}\right)}^{\,*}.$$

Уравнение же (38) переменится в такое:

$$2e^{-\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{-t^2}\left(\frac{x+\alpha}{\theta}+1\right)\sqrt{\frac{\theta}{x+\alpha}-\log\left(1+\frac{\theta}{x+\alpha}\right)}=$$

$$=\psi(\alpha)\, X'\int_0^\infty a^\alpha e^{-a}\, da.$$

Для $x=\infty$ оно сделается

$$\sqrt{2}\, e^{-\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{-t^2}=\psi(\alpha)\int_0^\infty a^\alpha e^{-a}\, da^{\,\star}, \qquad [38a]$$

162 какое бы число α ни было; так что полагая $\alpha=0$ | и ставя найденное выше значение $\sqrt{2\pi}$ для $\psi(0)$, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt=\sqrt{\pi}$$

— известный интеграл. Для всякого другого числа α будет

$$\psi(\alpha)\int_0^\infty a^\alpha e^{-a}\, da=\sqrt{2\pi}\, e^{-\alpha}. \qquad (39)$$

Уравнения (23), (24) могут следовательно быть представлены теперь:

$$(1-\alpha)\int_0^\infty x^{-\alpha} e^{-x}\, dx=\int_0^\infty x^{1-\alpha} e^{-x}\, dx^{\,\oslash},$$

$$\int_0^\infty x^\alpha e^{-x}\, dx\cdot\int_0^\infty x^{1-\alpha} e^{-x}\, dx=\frac{\alpha\pi(1-\alpha)}{\sin\alpha\pi}.$$

---

* В оригинале отсутствует множитель $e^{-\alpha}$ в правой части. В следующей формуле и формуле [38a] этот же множитель отсутствует в левой части, а в (39) — снова в правой части.

★ Равенство [38a] получено Лобачевским из предыдущего формальным переходом к пределу под знаком интеграла при $\frac{x+\alpha}{\theta}\to\infty$. Обоснование предельного перехода отсутствует.

⊘ В оригинале в этой формуле имеется лишний множитель e в левой части равенства, а в следующей формуле — в правой части равенства.

Их произведение дает

$$\int_0^\infty x^\alpha e^{-x}\,dx \cdot \int_0^\infty x^{-\alpha} e^{-x}\,dx = \frac{\alpha\pi}{\sin \alpha\pi} \tag{40}$$

263 | — известное свойство таких интегралов и которое теперь доказано новым способом.

Надобно заметить однако ж, что здесь α может быть только число по величине менее единицы, так же как и в уравнении (37), если α отрицательное; потому что

$$\int a^{x+\alpha} e^{-a}\,da = -a^{x+\alpha} e^{-a} + (x+\alpha) \int a^{x+\alpha-1} e^{-a}\,da,$$

где свободный член от знака интеграла делается нулем для границ $a=0$, $a=\infty$, покуда $x+\alpha>0$, и следовательно уравнение

$$\int_0^\infty a^{x+\alpha} e^{-a}\,da = (x+\alpha)^{\infty x} \int_0^\infty a^\alpha e^{-a}\,da$$

предполагает $1+\alpha>0$. Лаплас хотя не сказал, но вероятно подразумевал такое ограничение (Théorie analyt. des probab., éd. de 1814, p. 130). Его способ переходить отсюда к воображаемым не может однако ж назваться строгим (там же, стр. 132).

264 Функция, для которой употребляли до сих | пор знак ψ, весьма примечательна по своим свойствам и заслуживает особенного внимания, встречаясь очень часто в аналитике. Здесь намерен я говорить об этих свойствах, по крайней мере главных, следуя своему способу, может быть более других единообразному; а также, занимаясь применениями, вывести значение некоторых известных и даже новых определенных интегралов.

По примеру Лежандра должно бы писать

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{\psi(\alpha)} = \Gamma(\alpha+1)\, e^\alpha.$$

Однако ж я хочу предпочесть означение

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{\psi(\alpha)} = \alpha^{\infty\alpha} e^\alpha$$

уже не без пользы раз принятое для целых α*, и которое теперь

---

* Это не совсем точно. С помощью равенств (11) — (15) функция $(x+\alpha)^{\infty x}$ определена не только для целых положительных значений x, а для любых α и x, для которых при всяком целом положительном k имеет место неравенство $|x+\alpha+k|>1$. Функция $x^{\infty x}$ в частности, определена в области $|x+k|>1$.

распространяется на все прочие числа*. Уравнение (37′) будет иначе выражено

$$(x+\alpha)^{\infty x} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\alpha^{\infty\alpha}}(x+\alpha)^{x+\alpha+\frac{1}{2}}e^{-x-\alpha}f(x+\alpha)\,\text{*}, \tag{41}$$

265 где $\log f(x)$ представляет бесконечную строку | (34), делаясь нулем с $x=\infty$ [10]. Найденное выше значение $\psi(0)=\sqrt{2\pi}$ дает теперь

$$0^{\infty 0} = 1.$$

Разумея под x всякое число, можем в уравнении (41) полагать $\alpha=0$, потом ставить $x+\alpha$ вместо x. Так получим

$$(x+\alpha)^{\infty x+\alpha} = \sqrt{2\pi}\,(x+\alpha)^{x+\alpha+\frac{1}{2}}e^{-x-\alpha}f(x+\alpha)\,^{\oslash},$$

а следовательно

$$(x+\alpha)^{\infty x+\alpha} = (x+\alpha)^{\infty x}\alpha^{\infty\alpha} \tag{42}$$

— свойство рассматриваемой здесь функции, которое принадлежит ей с произвольными числами α, x, и которое выражалось обыкновенно, хотя не в такой обширности, уравнением

$$\Gamma(1+n) = n\,\Gamma(n).$$

Умножив уравнение (41) на такое же с $-\alpha$ вместо α, получим

266 |

$$(x+\alpha)^{\infty x}(x-\alpha)^{\infty x}\alpha^{\infty\alpha}(-\alpha)^{\infty -\alpha} =$$
$$= 2\pi\,(x^2-\alpha^2)^{x+\frac{1}{2}}\left(\frac{x+\alpha}{x-\alpha}\right)^{\alpha}e^{-2x}f(x+\alpha)f(x-\alpha)\,^{♀}.$$

Присоединяя сюда уравнение

$$x^{\infty x} = \sqrt{2\pi}\,x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x}f(x),$$

в которое переходит уравнение (41) с $\alpha=0$, находим

$$\frac{(x+\alpha)^{\infty x}}{x^{\infty x}}\cdot\frac{(x-\alpha)^{\infty x}}{x^{\infty x}}\,\alpha^{\infty\alpha}(-\alpha)^{\infty -\alpha} =$$
$$= \left(1-\frac{\alpha^2}{x^2}\right)^{x+\frac{1}{2}}\left(\frac{x+\alpha}{x-\alpha}\right)^{\alpha}\frac{f(x+\alpha)\,f(x-\alpha)}{f(x)\,f(x)}$$

---

* Функция $\psi(\alpha)$ определена для всякого α.

* В оригинале в правой части этого равенства вместо множителя $e^{-x-\alpha}$ стоит множитель e^{-x}.

$^{\oslash}$ В оригинале отсутствует множитель $\sqrt{2\pi}$ в правой части этого равенства.

♀ В оригинале в этой формуле в правой части равенства отсутствует множитель 2π, а в следующей формуле — множитель $\sqrt{2\pi}$.

и, наконец, для $x = \infty$, как выше [ур. (24), (40)]

$$\alpha^{\infty\alpha}(-\alpha)^{\infty-\alpha} = \frac{\alpha\pi}{\sin \alpha\pi}, \tag{43}$$

но здесь α произвольное, тогда как в уравнении (40) необходимо предполагалось $\alpha < 1$ по величине. Уравнение (43) — то же, что с означением Лежандра будет

267 | $$\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\alpha\pi}{\sin \alpha\pi}.$$

Пользуясь уравнением (42), можем ставить

$$\alpha^{\infty\alpha} = \alpha(\alpha-1)^{\infty\alpha-1}$$

и дать уравнению (43) другой вид

$$(\alpha-1)^{\infty\alpha-1}(-\alpha)^{\infty-\alpha} = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi}, \tag{44}$$

а по Лежандру

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi}.$$

Полагая здесь $\alpha = \frac{1}{2}$, получим

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{\infty-\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi}. \tag{45}$$

Делая то же в уравнении (43), находим

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\infty\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}. \tag{46}$$

Рассматриваем теперь интеграл

268 | $$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2n}\varphi \cos^{2m}\varphi \, d\varphi$$

с произвольными положительными n, m, или отрицательными по величине $< \frac{1}{2}$. Интегрирование по частям дает

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2n}\varphi \cos^{2m}\varphi \, d\varphi = 2\,\frac{n+m+1}{2n+1}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2n+2}\varphi \cos^{2m}\varphi \, d\varphi.$$

Продолжая такое превращение, притом означая r целое положительное, находим

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2n}\varphi \cos^{2m}\varphi \, d\varphi = \frac{(n+m+r)^{\infty r}}{\left(n+r-\frac{1}{2}\right)^{\infty r}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2n+2r}\varphi \cos^{2m}\varphi \, d\varphi.$$

Здесь выражение

$$\sin^{2n+2r}\varphi \cos^{2m}\varphi$$

под интегралом приобретает самое большое значение, когда

$$\operatorname{tang}^2\varphi = \frac{n+r}{m},$$

269 |а потому можно всегда взять r довольно большим числом, чтобы на правой стороне начальную границу в интегрировании сближать как угодно с последней $\frac{1}{2}\pi$ и довольствоваться без чувствительной разности положениями

$$\varphi = \frac{1}{2}\pi - \omega, \quad \sin\varphi = e^{-\frac{1}{2}\omega^2}, \quad \cos\varphi = \omega.$$

Так приходим к уравнению

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2n}\varphi \cos^{2m}\varphi \, d\varphi = \frac{(n+m+r)^{\infty r}}{\left(n+r-\frac{1}{2}\right)^{\infty r}} \int_0^{\omega} e^{-\omega^2(n+r)} \omega^{2m} \, d\omega, \quad [46a]$$

которое тем вернее, чем r более*; а следовательно для $r = \infty$ получим со всей строгостию

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2n}\varphi \cos^{2m}\varphi \, d\varphi = \frac{(n+m+r)^{\infty r}}{2\left(n+r-\frac{1}{2}\right)^{\infty r}} (n+r)^{-m-\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} e^{-x} x^{m-\frac{1}{2}} \, dx \, ^*.$$

270 |Между тем, уравнение (39) с нашим означением и для всякого α ⊘ дает

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha} \, dx = \alpha^{\infty\alpha}. \qquad (47)$$

---

* Хотя форма рассуждений, приводящих к [46a], необычна для современного читателя, они тем не менее с помощью соответствующих оценок могут быть обоснованы без особого труда.

* Это равенство получено формально из [46a] подстановкой $\omega^2(n+r) = x$.

⊘ $\alpha > -1$.

После чего

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2n}\varphi\cos^{2m}\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2}\,\frac{(n+m+r)^{\infty r}}{\left(n+r-\frac{1}{2}\right)^{\infty r}}\cdot\frac{\left(m-\frac{1}{2}\right)^{\infty m-\frac{1}{2}}}{(n+r)^{m+\frac{1}{2}}}. \quad (48)$$

А как здесь интеграл должен оставаться тот же с переменою чисел n, m одно на другое, то не трудно заключить, что для всех положительных n, m и отрицательных <1 по величине

$$\frac{n^{\infty n}}{m^{\infty m}} = \frac{(m+r)^{\infty r}}{(n+r)^{\infty r}}\, r^{n-m}, \quad (49)$$

где $r=\infty$. Это последнее уравнение, как сейчас увидим, справедливо для всех вообще чисел n, m. Оно никем еще не было замечено [11] и служит основанием к исследованию всех свойств функции $n^{\infty n}$.

271 | С переменой $2n$, $2m$ на $2n+1$, $2m+1$ уравнение (48) делается

$$2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2n+1}\varphi\cos^{2m+1}\varphi\, d\varphi = \frac{(n+m+r+1)^{\infty r}\, m^{\infty m}}{(n+r)^{\infty r}\, r^{m+1}}.$$

Между тем, уравнение (49), когда ставим сюда $n+m+1$ вместо m, дает

$$\frac{(n+m+r+1)^{\infty r}}{(n+r)^{\infty r}} = \frac{n^{\infty n}}{(n+m+1)^{\infty n+m+1}}\, r^{m+1}.$$

После чего

$$2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2n+1}\varphi\cos^{2m+1}\varphi\, d\varphi = \frac{n^{\infty n}\, m^{\infty m}}{(n+m+1)^{\infty n+m+1}}. \quad (50)$$

Полагая здесь $x=\operatorname{tang}^2\varphi$, потом ставя $n-1$, $m-1$ вместо n, m, получим с означением Лежандра

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{n-1}\,dx}{(1+x)^{n+m}} = \frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n+m)}$$

— то же самое, что другим образом доказывают Лежандр (Exérc.
272 de calcul intég. T. I, p. 279) и | Г. Пуассон (Jour. de l'école polyt. 1823, T. XII, p. 278).

Для $n=m$ уравнение (50) делается

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2n+1}\varphi \, d\varphi = 2^{2n} \frac{n^{\infty n} n^{\infty n}}{(2n+1)^{\infty 2n+1}}. \tag{51}$$

Если ж полагаем снова $2m+1=0$, то

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2n+1}\varphi \, d\varphi = \frac{n^{\infty n}\left(-\frac{1}{2}\right)^{\infty -\frac{1}{2}}}{2\left(n+\frac{1}{2}\right)^{\infty n+\frac{1}{2}}},$$

как найдено было по другому способу в изданной мною Воображаемой Геометрии (стр. 38 *). Вставляя значение (45)

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{\infty -\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi},$$

получим

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2n+1}\varphi \, d\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \frac{n^{\infty n}}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{\infty n+\frac{1}{2}}}, \tag{52}$$

а сравнивая с другим значением этого ж интеграла, заключаем, что

273 | $$2^{2n+1} n^{\infty n}\left(n+\frac{1}{2}\right)^{\infty n+\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi}\,(2n+1)^{\infty 2n+1}. \tag{53}$$

Полагая $m=0$ в уравнении (49), находим

$$n^{\infty n} = \frac{r^{\infty r}}{(n+r)^{\infty r}} r^n \tag{54}$$

для всякого числа n. Чтоб это доказать, то разумея под $p>n$ два положительных числа, пишем, основываясь на уравнении (42),

$$(-n)^{\infty -n} = \frac{(p-n)^{\infty p-n}}{(p-n)^{\infty p}}.$$

Здесь для $p-n>0$ уравнение (54) дает

$$(p-n)^{\infty p-n} = \frac{r^{\infty r}}{(p-n+r)^{\infty r}} r^{p-n}.$$

---

* Страница указана по оригинальному изданию сочинения «Воображаемая геометрия». В настоящем издании ей соответствует стр. 38 III тома.

После чего

$$(-n)^{\infty -n}=\frac{r^{\infty r}}{(p-n+r)^{\infty p+r}}r^{p-n}=$$

$$=\frac{r^{\infty r}}{(p-n+r)^{\infty p}(-n+r)^{\infty r}}r^{p-n}=\frac{r^{p}}{(p-n+r)^{\infty p}}\cdot\frac{r^{\infty r}}{(-n+r)^{\infty r}}r^{-n}.$$

374 | Откуда для $r=\infty$

$$(-n)^{\infty -n}=\frac{r^{\infty r}}{(-n+r)^{\infty r}}r^{-n}$$

— то же самое уравнение (54), когда здесь вместо n ставим $-n$; а следовательно в уравнении (49) числа n, m произвольные.

Например, полагая $2n+1=0$ в уравнении (54), получим

$$\frac{1}{2}\pi=(2r-1)\frac{(r-1)^{\infty r-1}(r-1)^{\infty r-1}}{\left(r-\frac{1}{2}\right)^{\infty r-1}\left(r-\frac{1}{2}\right)^{\infty r-1}}.$$

Это значит,

$$\frac{1}{2}\pi=\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\cdots$$

— известное выражение Валлиса.

Если в уравнении (49) ставим $\frac{n}{m}$, n вместо n, m и разумеем теперь под n, m целые положительные числа, то находим

$$\left(\frac{n}{m}\right)^{\infty\frac{n}{m}}=n^{\infty n}\frac{(n+r)^{\infty r}}{\left(\frac{n}{m}+r\right)^{\infty r}}\cdot\frac{r^{\frac{n}{m}}}{r^{n}}.$$

375 | Это значит,

$$\left(\frac{n}{m}\right)^{\infty\frac{n}{m}}=\left(\frac{m}{n+m}\right)^{1-\frac{n}{m}}\times$$

$$\times\frac{2m}{(n+m)^{\frac{n}{m}}(n+2m)^{1-\frac{n}{m}}}\cdot\frac{3m}{(n+2m)^{\frac{n}{m}}(n+3m)^{1-\frac{n}{m}}}\cdots\qquad(55)$$

Например, $n=1$, $m=4$ дают

$$\left\{\int_0^\infty e^{-x}x^{\frac{1}{4}}\,dx\right\}^4=\left(\frac{4}{5}\right)^3\cdot\frac{8^4}{5\cdot 9^3}\cdot\frac{12^4}{9\cdot 13^3}\cdot\frac{16^4}{13\cdot 17^3}\cdots$$

Если в уравнении (49) вместо n, m ставим $\alpha\beta$, α и разумеем под α, β произвольные числа, то получим

$$(\alpha\beta)^{\infty\alpha\beta}=\alpha^{\infty\alpha}\frac{(\alpha+r)^{\infty r}}{(\alpha\beta+r)^{\infty r}}\cdot\frac{r^{\alpha\beta}}{r^{\alpha}}.$$

Это значит

$$(\alpha\beta)^{\infty\beta} = \alpha^{\infty\alpha} \cdot \frac{(\alpha+1)^{1-\alpha}}{(\alpha\beta+1)^{1-\alpha\beta}} \cdot \frac{(\alpha+1)^{\alpha}(\alpha+2)^{1-\alpha}}{(\alpha\beta+1)^{\alpha\beta}(\alpha\beta+2)^{1-\alpha\beta}} \cdots \tag{56}$$

Например, $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$ дают

$$\left\{\int_0^\infty e^{-x} x^{\frac{1}{4}} dx\right\}^4 = \pi^2 \cdot \frac{3^2}{5^3} \cdot \frac{4^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{5 \cdot 9^3} \cdot \frac{4^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{9 \cdot 13^3} \cdots^{*} \tag{57}$$

Выражению (54) можно дать еще такой вид:

$$n^{\infty n} = \frac{(-1)^r r^n}{(-n-1)_0^{\infty r}}, \tag{58}$$

где, как и прежде, $r = \infty$.

Если ставим сюда вместо n по порядку

$$\frac{1}{n}+x, \qquad \frac{2}{n}+x, \ldots, \qquad \frac{n-1}{n}+x,$$

разумея теперь n целое, под x произвольное число; потом умножаем уравнения, то получим

$$\left(\frac{1}{n}+x\right)^{\infty\frac{1}{n}+x}\left(\frac{2}{n}+x\right)^{\infty\frac{2}{n}+x}\cdots\left(\frac{n-1}{n}+x\right)^{\infty\frac{n-1}{n}+x} =$$

$$= \frac{(-1)^{nr-r}\, r^{(n-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)}}{\left(-1-\frac{1}{n}-x\right)_0^{\infty r}\left(-1-\frac{2}{n}-x\right)_0^{\infty r}\cdots\left(-1-\frac{n-1}{n}-x\right)_0^{\infty r}} =$$

$$= \frac{(-1)^{nr-r}\, r^{(n-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)}(-2-x)^{\infty r}(r^{\infty r})^{n-1} n^{nr}}{(-n-1-nx)^{\infty nr}} =$$

$$= \frac{r^{(n-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)}(r+x+1)^{\infty r}(r^{\infty r})^{n-1} n^{nr}}{(nr+nx+n)^{\infty nr}}.$$

---

* В оригинале правая часть формулы (57) имеет вид

$$\pi^2 \frac{3^2}{5^3} \cdot \frac{3^2 \cdot 5^2}{5 \cdot 9^3} \cdot \frac{5^2 \cdot 7^2}{9 \cdot 13^3} \cdots$$

277 Пользуясь уравнением (41), ставим сюда для $r=\infty$

$$(r+x+1)^{\infty r}=\frac{\sqrt{2\pi}}{(x+1)^{\infty x+1}}(r+x+1)^{r+x+\frac{3}{2}}e^{-(r+x+1)}\,*,$$

$$r^{\infty r}=\sqrt{2\pi}\,r^{r+\frac{1}{2}}e^{-r},$$

$$(nr+nx+n)^{\infty nr}=\frac{\sqrt{2\pi}}{(nx+n)^{\infty nx+n}}(nr+nx+n)^{nr+nx+n+\frac{1}{2}}e^{-(nr+nx+n)}\,\star.$$

Так находим

$$\left(\frac{1}{n}+x\right)^{\infty\frac{1}{n}+x}\left(\frac{2}{n}+x\right)^{\infty\frac{2}{n}+x}\dots(1+x)^{\infty 1+x}=$$

$$=(nx+n)^{\infty nx+n}\frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{-nx-n-\frac{1}{2}}}{\left(1+\frac{x+1}{r}\right)^{nr-r}}e^{(n-1)(x+1)}\,\varnothing.$$

Или, ставя $x-1$ вместо x и $r=\infty$,

$$x^{\infty x}\left(x-\frac{1}{n}\right)^{\infty x-\frac{1}{n}}\left(x-\frac{2}{n}\right)^{\infty x-\frac{2}{n}}\dots\left(x-\frac{n-1}{n}\right)^{\infty x-\frac{n-1}{n}}=$$

$$=(nx)^{\infty nx}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{-nx-\frac{1}{2}}\,♀. \qquad (59)$$

Для $x=0$

278 $$\left(-\frac{1}{n}\right)^{\infty-\frac{1}{n}}\left(-\frac{2}{n}\right)^{\infty-\frac{2}{n}}\dots\left(-\frac{n-1}{n}\right)^{\infty-\frac{n-1}{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}. \qquad (60)$$

Принимая в помощь уравнение (44), выводим отсюда для всякого целого числа n

$$\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\dots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=n\,2^{-n+1}\,‡$$

---

* В оригинале вместо множителя $e^{-(r+x+1)}$ в правой части этого равенства стоит множитель e^{-n}.

★ В оригинале вместо множителя $e^{-(nr+nx+n)}$ в правой части этого равенства стоит множитель e^{-nr}.

⊘ В оригинале отсутствует множитель $e^{(n-1)(x+1)}$ в правой части этого равенства.

♀ Первый множитель правой части этого равенства имеет в оригинале вид $(nx)^{\infty x}$; кроме того, в связи с отмеченными выше ошибками в предыдущих равенствах в правой части (59) в оригинале имеется лишний множитель e^{-nx+x}.

‡ В оригинале последний множитель в правой части имеет вид 2^{n-1}.

— известное всем уравнение, на котором Лежандр основался, чтобы притти к уравнению (60), потом уже к уравнению (59) [12].

Если в уравнении (59) вместо x ставим $\frac{x}{\pi}$, потом $-\frac{x}{\pi}$ и перемножим два уравнения, принимая в помощь уравнения (43), (44), то получим

$$\sin nx = 2^{n-1}\sin x\sin\left(\frac{\pi}{n}+x\right)\sin\left(\frac{2\pi}{n}+x\right)\dots\sin\left\{\frac{(n-1)\pi}{n}+x\right\}. \quad (61)$$

Берем снова интеграл (50), который с положением $x=\sin^2\varphi$ переменяется в такой:

$$\int_0^1 x^n(1-x)^m\,dx = \frac{n^{\infty n}m^{\infty m}}{(n+m+1)^{\infty n+m+1}}. \quad (62)$$

279 | После чего

$$\int_0^1 (x^n-1)(1-x)^m\,dx = m^{\infty m}\left\{\frac{n^{\infty n}}{(n+m+1)^{\infty n+m+1}}-\frac{1}{(m+1)^{\infty m+1}}\right\}, \quad [62a]$$

а с переменой n, m на $n+\delta$, $-1-\delta$ *

$$\int_0^1 \frac{x^{n+\delta}-1}{(1-x)^{1+\delta}}\,dx = \frac{(-\delta)^{\infty-\delta}-1}{-\delta}-(-\delta)^{\infty-\delta}\frac{(n+\delta)^{\infty n+\delta}-n^{\infty n}}{\delta n^{\infty n}}\,\star. \quad [62b]$$

Откуда для $\delta=0$, $n>1$

$$\int_0^1 \frac{x^n-1}{x-1}\,dx = C+\frac{d\log n^{\infty n}}{dn}, \quad (63)$$

---

* Здесь $m<-1$ при $\delta>0$; однако интеграл сходится в силу условия, наложенного ниже на n.

⋆ В оригинале правая часть равенства [62b] имеет следующий вид:

$$\frac{(-\delta)^{\infty-\delta}-1}{\delta}-\frac{(n+\delta)^{\infty n+\delta}-n^{\infty n}}{\delta n^{\infty n}}.$$

В первом члене здесь явная опечатка, а пропуск множителя $(-\delta^{\infty-\delta})$ во втором члене не сказывается на формуле (63), так как $\lim\limits_{\delta\to 0}(-\delta)^{\infty-\delta}=1$.

Приводим промежуточные выкладки к равенству [62b]:

$$\int_0^1 \frac{x^{n+\delta}-1}{(1-x)^{1+\delta}}\,dx = (-1-\delta)^{\infty-1-\delta}\left[\frac{(n+\delta)^{\infty n+\delta}}{n^{\infty n}}-\frac{1}{(-\delta)^{\infty-\delta}}\right]=$$

$$=-\frac{1}{\delta}(-\delta)^{\infty-\delta}\left[\frac{(n+\delta)^{\infty n+\delta}}{n^{\infty n}}-\frac{1}{(-\delta)^{\infty-\delta}}\right]=$$

$$=\frac{(-\delta)^{\infty-\delta}-1}{-\delta}-(-\delta)^{\infty-\delta}\frac{(n+\delta)^{\infty n+\delta}-n^{\infty n}}{\delta n^{\infty n}}.$$

где постоянное

$$C = 0{,}577\,215\,664\,901\,582\,5.$$

Между тем, поставивши n в уравнении (47) вместо α и дифференцируя в отношении к n, находим

$$\int_0^\infty e^{-x} x^n \log x\, dx = \frac{d\,(n^{-n})}{dn}\,; \tag{64}$$

следовательно

230 $$\int_0^\infty e^{-x} x^n \log x\, dx = \int_0^\infty e^{-x} x^n\, dx \left(\int_0^1 \frac{x^n - 1}{x - 1}\, dx - C\right)^{*} \tag{65}$$

Взяв логарифм от уравнения (62) и дифференцируя потом в отношении к n, получим с помощию уравнения (63)

$$\int_0^1 x^n (1 - x)^m \log x\, dx = \int_0^1 x^n (1 - x)^m\, dx \int_0^1 \frac{x^n - x^{n+m+1}}{x - 1}\, dx. \tag{66}$$

Способ Лежандра, чтоб доказать эту зависимость трех интегралов, мне кажется весьма затруднительным (Exerc. de calcul. integ. T. I. p. 259). Сравнение интегралов (62), (53) он делает только в предположении показателей m целых; а распространение потом на произвольные числа не может уже назваться совершенно строгим (Exer. de calc. intég. T. II. p. 7 et 99).

Рассматриваем теперь интеграл

$$\int_0^\pi \sin ix \sin^n x\, dx$$

231 для $n + 1 > 0$ и числа i произвольного. Интегрирование по частям дает

$$\frac{n^2 - i^2}{n} \int \sin ix \sin^n x\, dx =$$

$$= -\sin ix \sin^{n-1} x \cos x + \frac{i}{n} \cos ix \sin^n x + (n - 1) \int \sin ix \sin^{n-2} x\, dx;$$

---

* В оригинале правая часть равенства (65) имеет вид

$$\int_0^\infty e^{-x} x^n\, dx \int_0^1 \left(\frac{x^n - 1}{x - 1} + C\right) dx.$$

следовательно

$$\int_0^\pi \sin ix \sin^n x\,dx = \frac{(n+2+i)(n+2-i)}{(n+2)(n+1)}\int_0^\pi \sin ix \sin^{n+2} x\,dx$$

и вообще для положительного целого r

$$\int_0^\pi \sin ix \sin^n x\,dx = \frac{\left(\frac{n+i}{2}+r\right)^{\infty r}\left(\frac{n-i}{2}+r\right)^{\infty r}}{\left(\frac{n}{2}+r\right)^{\infty r}\left(\frac{n-1}{2}+r\right)^{\infty r}}\int_0^\pi \sin ix \sin^{n+2r} x\,dx,$$

а для $r=\infty$, основываясь на уравнении (49), можем сюда ставить

$$\frac{\left(\frac{n-i}{2}+r\right)^{\infty r}}{\left(\frac{n}{2}+r\right)^{\infty r}} = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^{\infty \frac{n}{2}}}{\left(\frac{n-i}{2}\right)^{\infty \frac{n-i}{2}} r^{\frac{i}{2}}},$$

$$\frac{\left(\frac{n+i}{2}+r\right)^{\infty r}}{\left(\frac{n-1}{2}+r\right)^{\infty r}} = \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\infty \frac{n-1}{2}}}{\left(\frac{n+i}{2}\right)^{\infty \frac{n+i}{2}}}\, r^{\frac{i+1}{2}}.$$

232 | После чего в том же предположении

$$\int_0^\pi \sin ix \sin^n x\,dx = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^{\infty \frac{n}{2}}\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\infty \frac{n-1}{2}}\sqrt{r}}{\left(\frac{n+i}{2}\right)^{\infty \frac{n+i}{2}}\left(\frac{n-i}{2}\right)^{\infty \frac{n-i}{2}}}\int_0^\pi \sin ix \sin^{n+2r} x\,dx.$$

Здесь элемент второго интеграла приобретает самое большое значение для

$$\operatorname{tang} x = -\frac{n+2r}{i}\operatorname{tang} ix,$$

а следовательно с возрастанием r разность $\frac{1}{2}\pi - x = \omega$ уменьшается так, что наконец можно принимать по примеру выше *

$$\int_0^\pi \sin ix \sin^{n+2r} x\,dx = \sin\frac{1}{2}i\pi\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-r\omega^2}\,d\omega = \sin\frac{1}{2}i\pi\sqrt{\frac{\pi}{r}},$$

* См. вывод формулы (48) и сноску * к стр. 112. Здесь Лобачевский, кроме того, полагает

$$\int_{-\omega}^{\omega} e^{-r\omega^2}d\omega \approx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r\omega^2}\,d\omega.$$

потом

$$\int_0^{\pi} \sin ix \sin^n x\,dx = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^{\infty\frac{n}{2}}\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\infty\frac{n-1}{2}}}{\left(\frac{n+i}{2}\right)^{\infty\frac{n+i}{2}}\left(\frac{n-i}{2}\right)^{\infty\frac{n-i}{2}}}\sqrt{\pi}\,\ulcorner\sin\frac{1}{2}i\pi\,^{*}$$

281 | или, пользуясь уравнением (53), всегда для $n+1>0$

$$\int_0^{\pi} \sin ix \sin^n x\,dx = \frac{\pi}{2^n}\sin\frac{1}{2}i\pi\,\frac{n^{\infty n}}{\left(\frac{n+i}{2}\right)^{\infty\frac{n+i}{2}}\left(\frac{n-i}{2}\right)^{\infty\frac{n-i}{2}}}\,^{\star}. \quad (67)$$

Подобным образом находим

$$\int_0^{\pi} \cos ix \sin^n x\,dx = \frac{\pi}{2^n}\cos\frac{1}{2}i\pi\,\frac{n^{\infty n}}{\left(\frac{n+i}{2}\right)^{\infty\frac{n+i}{2}}\left(\frac{n-i}{2}\right)^{\infty\frac{n-i}{2}}}. \quad (68)$$

Для $i=n$

$$\int_0^{\pi} \sin nx \sin^n x\,dx = \pi 2^{-n}\sin\frac{1}{2}n\pi, \quad (69)$$

$$\int_0^{\pi} \cos nx \sin^n x\,dx = \pi 2^{-n}\cos\frac{1}{2}n\pi. \quad (70)$$

Для $i=0$ [⊘]

$$\int_0^{\pi} x \sin^n x\,dx = \pi^2 2^{-n-1}\frac{n^{\infty n}}{\left(\frac{n}{2}\right)^{\infty\frac{n}{2}}\left(\frac{n}{2}\right)^{\infty\frac{n}{2}}}, \quad (71)$$

$$\int_0^{\pi} \sin^n x\,dx = \pi 2^{-n}\frac{n^{\infty n}}{\left(\frac{n}{2}\right)^{\infty\frac{n}{2}}\left(\frac{n}{2}\right)^{\infty\frac{n}{2}}}. \quad (72)$$

---

* В оригинале отсутствует множитель $\sin\frac{1}{2}i\pi$ в правой части этого равенства.

★ В оригинале вместо множителя $\ulcorner\sin\frac{1}{2}i\pi$ напечатано $\sin\frac{1}{2}\pi$.

⊘ Лобачевский получает (71) из (67) с помощью предельного перехода при $i\to 0$.

384 |Для $n+1>i$ уравнение (50) дает

$$\left(\frac{n+i}{2}\right)^{\infty\frac{n+i}{2}}\left(\frac{n-i}{2}\right)^{\infty\frac{n-i}{2}}=2(n+1)^{\infty n+1}\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^{n+1+i}x\cos^{n+1-i}x\,dx \quad (73)$$

и переменяет уравнения (67), (68) в такие:

$$\int\limits_0^{\pi}\sin ix\sin^n x\,dx\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^{n+1+i}x\cos^{n+1-i}x\,dx=\frac{\pi}{(n+1)2^{n+1}}\sin\frac{1}{2}i\pi, \quad (74)$$

$$\int\limits_0^{\pi}\cos ix\sin^n x\,dx\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^{n+1+i}x\cos^{n+1-i}x\,dx=\frac{\pi}{(n+1)2^{n+1}}\cos\frac{1}{2}i\pi. \quad (75)$$

От двух интегралов (67), (68) легко перейти к одному такому, в котором оба заключаются:

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos ix\cos^n x\,dx=\frac{\pi}{2^{n+1}}\frac{n^{\infty n}}{\left(\frac{n+i}{2}\right)^{\infty\frac{n+i}{2}}\left(\frac{n-i}{2}\right)^{\infty\frac{n-i}{2}}}. \quad (76)$$

385 |Это значит

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos ix\cos^n x\,dx\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^{n+1+i}x\cos^{n+1-i}x\,dx=\frac{\pi}{n+1}2^{-n-2} \quad (77)$$

под условием $n+1>i$, $i>0$, хотя затем n, i могут быть уже произвольные числа *.

Для $i=n$ интеграл (76) делается

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos nx\cos^n x\,dx=\frac{\pi}{2^{n+1}}, \quad (78)$$

как и Г. Пуассон находит по другому способу ⋆.

* n и i совершенно произвольными быть не могут. Для сходимости интегралов в левой части (77) нужно, чтобы $n>-1$, $n+1+i>-1$, $n+1-i>-1$.

⋆ Journal de l'école polyt. T. XII, p. 490. Здесь, однако ж, должна быть опечатка в значении интеграла. [*Примечание Лобачевского.*]

Дифференцируя уравнение (77) в отношении к i, получим с пособием уравнений (63), (78):

285 $$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} x \sin ix \cos^n x \, dx \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{n+1+i} x \cos^{n+1-i} x \, dx =$$

$$= \frac{\pi}{(n+1)\, 2^{n+3}} \int_0^1 \frac{x^{\frac{n+i}{2}} - x^{\frac{n-i}{2}}}{x-1} \, dx \qquad (79)$$

Пользуясь уравнением (76), находим для всякого $n+1>0$ для i целого, ω произвольного

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos i(x-\omega) \cos^n x \, dx = \frac{\pi}{2^n} \cdot \frac{n^{\infty n}\{1+(-1)^{n+i}\} \cos i\omega}{\left(\frac{n+i}{2}\right)^{\infty \frac{n+i}{2}} \left(\frac{n-i}{2}\right)^{\infty \frac{n-i}{2}}}. \qquad (80)$$

Сюда можем ставить, основываясь на уравнении (42),

$$\left(\frac{n}{2}+i\right)^{\infty \frac{n}{2}+i} = \left(\frac{n}{2}+i\right)^{\infty i} \left(\frac{n}{2}\right)^{\infty \frac{n}{2}},$$

$$\left(\frac{n}{2}-i\right)^{\infty \frac{n}{2}-i} = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^{\infty \frac{n}{2}}}{\left(\frac{n}{2}\right)^{\infty i}},$$

$$\left(\frac{n-1}{2}+i\right)^{\infty \frac{n-1}{2}+i} = \left(\frac{n-1}{2}+i\right)^{\infty i} \left(\frac{n-1}{2}\right)^{\infty \frac{n-1}{2}},$$

$$\left(\frac{n+1}{2}-i\right)^{\infty \frac{n+1}{2}-i} = \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\infty \frac{n-1}{2}}}{\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\infty i-1}} \, {}^{*},$$

---

* В оригинале левая часть этого равенства имеет вид $\left(\frac{n-1}{2}-i\right)^{\infty \frac{n-1}{2}-i}$. То же относится и ко вторым множителям левых частей равенств [80b] и следующего за ним.

267 и следовательно

$$\left(\frac{n}{2}+i\right)^{\infty\frac{n}{2}+i}\left(\frac{n}{2}-i\right)^{\infty\frac{n}{2}-i}=\left\{\left(\frac{n}{2}\right)^{\infty\frac{n}{2}}\right\}^{2}\frac{\left(\frac{n}{2}+i\right)^{\infty i}}{\left(\frac{n}{2}\right)^{\infty i}},\qquad [80a]$$

$$\left(\frac{n-1}{2}+i\right)^{\infty\frac{n-1}{2}+i}\left(\frac{n+1}{2}-i\right)^{\infty\frac{n+1}{2}-i}=$$

$$=\left\{\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\infty\frac{n-1}{2}}\right\}^{2}\frac{\left(\frac{n-1}{2}+i\right)^{\infty i}}{\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\infty i-1}}.\qquad [80b]$$

Последнее уравнение можем еще переменить [урав. (53)] в такое:

$$\left(\frac{n-1}{2}+i\right)^{\infty\frac{n-1}{2}+i}\left(\frac{n+1}{2}-i\right)^{\infty\frac{n+1}{2}-i}=\frac{\pi n^{\infty n}n^{\infty n}}{2^{2n}\left[\left(\frac{n}{2}\right)^{\infty\frac{n}{2}}\right]^{2}}\cdot\frac{\left(\frac{n}{2}+i\right)^{\infty}}{\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\infty i-1}}.$$

После чего уравнение (80) дает для целых чисел i

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\cos 2i(x-\omega)\cos^{n}x\,dx=\frac{\pi}{2^{n}}\frac{[1+(-1)^{n}]\left(\frac{n}{2}\right)^{\infty i}n^{\infty n}\cos 2i\omega}{\left\{\left(\frac{n}{2}\right)^{\infty\frac{n}{2}}\right\}^{2}\left(\frac{n}{2}+i\right)^{\infty i}}\;{}^{*},\qquad (81)$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\cos(2i-1)(x-\omega)\cos^{n}x\,dx=$$

$$=2^{n}\{1-(-1)^{n}\}\frac{\left\{\left(\frac{n}{2}\right)^{\infty\frac{n}{2}}\right\}^{2}\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\infty i-1}}{n^{\infty n}\left(\frac{n}{2}+i\right)^{\infty i}}\cos(2i-1)\omega.\qquad (82)$$

268 . Два последние уравнения служат для представления степеней косинуса, какой бы показатель ни был, в тригонометрических строках с косинусами кратной дуги. Этот род разложения, понимаемый под общим видом, требует большой осторожности в суждении, чтобы соблюсти должную строгость. К стати здесь я повторю с новыми

---

* В оригинале отсутствует множитель $n^{\infty n}$ в числителе правой части.

пояснениями тот способ, который изложен был в конце моего сочинения под названием *об исчезании тригонометрических строк*; тем более что сюда вкрались ошибки во время печатания с переменой означения.

[III]

Рассматриваем значение суммы

$$S = \sum \frac{1}{i} \sin (i\omega + \alpha) \qquad \begin{cases} i = 1 \\ i = 2^n \end{cases}$$

с произвольными дугами ω, α и с целыми положительными числами i, n. Соединяя по два члена, первый со вторым, третий с четвертым и т. д., получим

$$S = \sum \frac{1}{2i(2i-1)} \sin (2i\omega + \alpha - \omega) +$$
$$+ \cos \frac{1}{2}\omega \sum \frac{1}{i} \sin \left(2i\omega + \alpha - \frac{1}{2}\omega\right) \qquad \begin{cases} i = 1 \\ i = 2^{n-1}. \end{cases}$$

289 |Итак, с условием заменять только положительные числа, меньшее большим, находим постепенно:

$$S < \log 2 + \cos \frac{1}{2}\omega S_1, \quad S_1 = \sum \frac{1}{i} \sin \left(2i\omega + \alpha - \frac{1}{2}\omega\right) \qquad \begin{cases} i = 1 \\ i = 2^{n-1}, \end{cases}$$

$$S_1 < \log 2 + \cos \omega S_2, \quad S_2 = \sum \frac{1}{i} \sin \left(2^2 i\omega + \alpha - \frac{3}{2}\omega\right) \qquad \begin{cases} i = 1 \\ i = 2^{n-2}, \end{cases}$$

$$S_2 < \log 2 + \cos 2\omega S_3, \quad S_3 = \sum \frac{1}{i} \sin \left(2^3 i\omega + \alpha - \frac{7}{2}\omega\right) \qquad \begin{cases} i = 1 \\ i = 2^{n-3}, \end{cases}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$S_{n-1} < \log 2 + \cos 2^{n-2}\omega S_n, \quad [S_n < 1.$$

Соединяя все такие неравенства, к тому замечая, что для всякого целого положительного n

$$\cos \frac{1}{2}\omega \cos \omega \cos 2\omega \ldots \cos 2^n\omega = \frac{\sin 2^{n+1}\omega}{2^{n+2} \sin \frac{1}{2}\omega} < \frac{1}{2^{n+2} \sin \frac{1}{2}\omega},$$

находим

$$S < \frac{1}{2^n \sin \frac{1}{2}\omega} + \log 2 \left(1 + \sum \frac{1}{2^i \sin \frac{1}{2}\omega}\right) < \qquad \begin{cases} i = 1 \\ i = n, \end{cases}$$

$$< \log 2 + \frac{2^{-n} + \log 2}{\sin \frac{1}{2}\omega} \tag{83}$$

290 |а следовательно, бесконечная строка

$$S=\sum_1^\infty \frac{1}{i}\sin(i\omega+\alpha)$$

исчезает * для произвольной дуги α и для всякой $\omega>0$, $<2\pi$. Полагая здесь $\alpha=0$, потом $\alpha=\frac{1}{2}\pi$, получим две строки, из которых первую помножив на $\sqrt{-1}$ и приложив к другой, получим

$$\sum\frac{1}{i}e^{i\omega\sqrt{-1}}=-L[1-e^{\omega\sqrt{-1}}],$$

где L знак функции. Чтоб определить теперь

$$\frac{L[1-e^{-\omega\sqrt{-1}}]-L[1-e^{\omega\sqrt{-1}}]}{2\sqrt{-1}}=\sum_1^\infty\frac{1}{i}\sin i\omega,$$

заметим, что строке

$$L[1+x]=-\sum_1^\infty(-1)^i\frac{1}{i}x^i \qquad [83a]$$

принадлежит такое свойство (Алгебра Лобачевского, стр. 322 *)

$$L[1+x+y+xy]=L[1+x]+L[1+y], \qquad [83b]$$

291 |какие числа x, y ни будут [18]. После чего

$$L[1-x]+L\left[1+\frac{1+x}{1-x}\right]=L[1-y]+L\left[1+\frac{1+y}{1-y}\right],$$

а следовательно для $\omega>0$, $<\pi$

$$L[1-e^{-\omega\sqrt{-1}}]-L[1-e^{\omega\sqrt{-1}}]=$$
$$=L\left[1+\sqrt{-1}\cot\frac{1}{2}\omega\right]-L\left[1-\sqrt{-1}\cot\frac{1}{2}\omega\right]=$$
$$=-2\sqrt{-1}\sum_1^\infty\frac{(-1)^i}{2i-1}\cot^{2i-1}\frac{1}{2}\omega=(\pi-\omega)\sqrt{-1}.$$

Итак

$$\pi-\omega=2\sum_1^\infty\frac{1}{i}\sin i\omega \qquad (84)$$

---

* Из самого равенства (83), дающего оценку для абсолютной величины частной суммы ряда, сходимость рассматриваемого ряда не следует; однако из существа предшествующих преобразований эта сходимость следует (см. сноску на стр. 40 наст. тома к сочинению «Об исчезании тригонометрических строк»).

* Страница указана по оригинальному изданию сочинения «Алгебра или вычисление конечных». В настоящем издании ей соответствует стр. 223 IV тома.

для всех углов $\omega > 0$, $< \pi$ и как бы впрочем ω ни был малый угол *. Ставя сюда $i\omega = x$, $\omega = \Delta x$, получим для всякого приращения Δx

$$\pi - \Delta x = 2 \sum_{1}^{\infty} \frac{\sin x}{x} \Delta x,$$

потом заменяя знаки приращения и суммы знаками дифференциалов и интеграла,

292 $$\frac{1}{2}\pi = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x} \sin x \; ⋆. \tag{85}$$

Подобный переход от суммы к интегралу предлагал Г. Коши принять за основание в интегральном вычислении. (Journal de l'école polyt. Tome XII, p. 590). В сочинении моем *Об исчезании тригонометрических строк* (стр. 29 ⊘) я старался доказывать строгость таких начал. Настоящий случай требует увериться только, что

$$L = \int_a^x \frac{dx}{x} \sin x$$

уменьшается беспредельно с возрастанием a, как бы x при том ни было велико. Действительно

$$L < \pi \int_a^{\pi + a} dx \sin x \left\{ \frac{1}{x(x+\pi)} + \frac{1}{(x+2\pi)(x+3\pi)} + \ldots \right\} ♀.$$

Выше доказано было, что значение бесконечной строки, которая входит здесь под знаком интеграла, с возрастанием x приближается к нулю; при том $\sin x < 1$, следовательно L может сделаться как угодно малым числом ⊥. Впрочем интеграл

293 $$N = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x} \sin x,$$

---

* Равенство (84) имеет, как известно, место, если $0 < \omega < 2\pi$. Вывод Лобачевского связан со сходимостью разложения функции $\operatorname{arctg} x$ в степенной ряд и пригоден, если $\frac{\pi}{2} < \omega < \frac{3\pi}{2}$. Следует также заметить, что в этом выводе под $L\,[1 + x]$ нужно понимать ряд [85a], так как равенство [85b] определяет функцию $L\,[1 + x]$ неоднозначно (при помощи этого равенства определяются все ветви логарифмической функции).

⋆ Обоснование этого заключения см. в примечании [14].

⊘ Страница указана Лобачевским по отдельному оттиску оригинального издания, что соответствует стр. 49—50 наст. тома.

♀ В оригинале отсутствует множитель π перед знаком интеграла.

⊥ Рассуждения Лобачевского правильные, однако запись несколько небрежна. См. подробнее в примечании [15].

какое бы число положительное a ни было, может быть найден еще другим образом. Заметим, что

$$N = \int_0^\pi dx \sin x \sum_0^\infty (-1)^i \frac{1}{x+i\pi}$$

или, полагая $x = \pi\omega$,

$$N = \int_0^1 \sin \pi\omega \frac{1}{d\omega} d \log \frac{\left(\frac{1}{2}\omega - 1 + r\right)^{\infty r}}{\left(\frac{\omega-1}{2} + r\right)^{\infty r}} d\omega,$$

где после вычисления должно почитать $r = \infty$. Основываясь на уравнении (49), заключаем, что

$$N = \int_0^1 \sin \pi\omega \, d \log \left\{ \frac{\left(\frac{\omega-1}{2}\right)^{\infty \frac{\omega-1}{2}}}{\left(\frac{1}{2}\omega - 1\right)^{\infty \frac{1}{2}\omega - 1}} \right\}^*.$$

Или [ур. (42)]

$$N = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{x} \sin x + \int_0^1 \sin \pi\omega \, d \log \left\{ \frac{\left(\frac{\omega+1}{2}\right)^{\infty \frac{\omega+1}{2}}}{\left(\frac{\omega}{2}\right)^{\infty \frac{\omega}{2}}} \right\}.$$

294 [А как здесь $\omega > 0$, то [ур. (63)]

$$N = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{x} \sin x + \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^{\omega+1} \sin \pi\omega}{x+1} dx \, d\omega.$$

Интегрируя сперва в отношении к ω, получим

$$N = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{x} \sin x + \int_0^\infty \frac{e^{-2\pi x} \, dx}{1+x^2}.$$

Пусть теперь

$$V = \int_0^\infty \frac{e^{-ax} \, dx}{1+x^2}$$

* Это заключение не обосновано. См. примечание [16].

с произвольным положительным числом a. Дифференцируя в отношении к a, находим

$$\frac{d^2V}{da^2}+V=\frac{1}{a} \qquad [85a]$$

— уравнение, которого интеграл должен делаться $\frac{1}{2}\pi$ для $a=0$; следовательно

$$V=\sin a\int_0 \frac{da}{a}\cos a-\cos a\int_0 \frac{da}{a}\sin a+\frac{1}{2}\pi\cos a, \qquad [85b]$$

295 | а для $a=2\pi$

$$V=-\int_0^{2\pi}\frac{da}{a}\sin a+\frac{1}{2}\pi\,^*, \qquad [85c]$$

что вставляя в последнее уравнение для N, получим, как выше, $N=\frac{1}{2}\pi$. Уравнение (85), таким образом, служит дополнением к уравнению (84), которое, следовательно, должно почитать верным в непрерывном уменьшении дуги ω до $\omega=0$.

От этого предложения переходим к другому, не менее примечательному. Начнем с того, что для всякого целого положительного числа i

$$1+2\sum_1^i\cos ix=\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}.$$

Умножая на dx, потом интегрируя от $x=0$, получим

$$x+2\sum\frac{1}{i}\sin ix=\int_0^x\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}d$$

Разумея теперь $i=\infty$, под n или нуль, или целое положительное, под α угол >0, $<\pi$, легко находим с пособием уравнения (84)

296 |
$$\left.\begin{aligned}\int_0^x\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}dx&=(2n+1)\pi \text{ для } x=2n\pi+\alpha,(2n+1)\pi+\alpha,\\ &=n\pi \qquad x=n\pi,\\ &=0 \qquad x=0,\\ &=-(2n+1)\pi \quad x=-2n\pi-\alpha,-(2n+1)\pi-\alpha,\\ &=-n\pi \qquad x=-n\pi.\end{aligned}\right\} \quad (86)$$

* Формула [85c] верна, но получена путем недостаточно аккуратных промежуточных вычислений. См. примечание [17].

Теперь для всех значений x, от $x=-\pi$ до $x=+\pi$, означаем $f(x)$ какую нибудь *аналитическую функцию* *, давая такому названию тот обширный смысл, который предполагает только возможность для всякого x, между сказанных границ, отыскивать

$$\frac{df(x)}{dx}=f'(x),$$

хотя бы $f'(x)$ для некоторых x делалось бесконечным *. Пусть еще $f(x)$ в промежутке $x=-\pi$, $x=+\pi$ не переходит за какое нибудь определенное число. При таких условиях ищем другую функцию $F(\omega)$ от переменного ω, начиная с $\omega=-\pi$ до $\omega=+\pi$, из уравнения

$$2F(\omega)=\int_{-\pi}^{+\pi}\{1+2\sum\cos i(x-\omega)\}f(x)\,dx^{\oslash}\qquad\begin{cases}i=1\\ i=\infty.\end{cases}\tag{87}$$

337 | Останавливаясь в бесконечной строке на члене с известным числом i, которое можем потом увеличивать произвольно, полагаем сперва

$$2F(\omega)=\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)(x-\omega)}{\sin\frac{1}{2}(x-\omega)}f(x)\,dx\,♀$$

или, все равно,

$$2F(\omega)=\int_{-\pi-\omega}^{+\pi-\omega}\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}f(x+\omega)\,dx.\tag{88}$$

Во всякой аналитической функции, какова здесь $f(x)$, обращать должно внимание на постепенность и непрерывность. В сочинении моем *Об исчезании тригонометрических строк* ‡ я доказывал необходимость этого различия, называя функцию $f(x)$ *постепенной*, когда приращения в ней уменьшаются до нуля вместе с приращениями

---

* См. вводную статью, стр. 17 наст. тома.

* Как видно из дальнейшего, Лобачевский фактически предполагает, что во всякой такой точке левый и правый пределы $f'(x)$ равны бесконечности определенного знака.

⊘ Запись неудачна, так как ряд под знаком интеграла расходится. При правильной записи формула (87) имеет вид

$$2F(\omega)=\lim_{i\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{1+2\sum_{i=1}^{i}\cos i(x-\omega)\right\}f(x)\,dx.$$

♀ Таким образом, в левой части нужно бы писать $2F_i(\omega)$.

‡ См. стр. 45 наст. тома, а также вводную статью (стр. 16—17).

переменного x; — *непрерывной*, когда содержание двух этих приращений с их уменьшением переходит нечувствительно в новую функцию, которая будет, следовательно, *дифференциальным множителем*. Интегралы должны быть всегда разделяемы так на промежутки, чтоб елементы под знаком каждого интеграла сохраняли постепенность и непрерывность. Применяя теперь общее наше
198 рассуждение к интег|рированию в уравнении (88), рассмотрим сперва случай, когда $f(x)$ — постепенная функция. Интегрирование по частям дает

$$\int \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x} f(x+\omega)\,dx =$$

$$= f(x+\omega)\int_0 \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}\,dx - \int f'(x+\omega)\,dx \int_0 \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}\,dx,$$

будет ли $f(x)$ непрерывной или ломаной функцией, с тою разницей, что в последнем случае каждый интеграл должен быть суммою нескольких интегралов с елементами, в состав которых войдут одни непрерывные функции. Распространяя между назначенных границ, получим

$$2F(\omega) = f(\pi)\int_0^{\pi-\omega} \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}\,dx - f(-\pi)\int_0^{-\pi-\omega} \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}\,dx -$$

$$- \int_0^{\pi-\omega} f'(x+\omega)\,dx \int_0 \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}\,dx +$$

$$+ \int_0^{-\pi-\omega} f'(x+\omega)\,dx \int_0 \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}\,dx.$$

Пусть i так уже велико, что во всяком интеграле

199 |

$$\int_0^x \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}\,dx$$

можем почитать $i=\infty$ без приметной разности, которая будет собственно

$$\sum_{i}^{\infty}\frac{1}{i}\sin ix\,^{*}$$

и, следовательно, либо нулем, либо приближаться к нулю с возрастанием i, как видели выше. С таким предположением и с пособием уравнений (86) находим для $\omega \geqq 0,\ <\pi$

$$\int_{0}^{\pi-\omega}\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}\,dx=\pi,$$

$$\int_{0}^{-\pi-\omega}\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}=-\pi,$$

$$\int_{0}^{\pi-\omega}f'(x+\omega)\,dx\int_{0}\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}\,dx=\pi\int_{0}^{\pi-\omega}f'(x+\omega)\,dx=\pi\,\{f(\pi)-f(\omega)\}^{*},$$

300 $$\int_{0}^{-\pi-\omega}f'(x+\omega)\,dx\int_{0}\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}\,dx=$$

$$=\int_{0}^{\pi+\omega}f'(\omega-x)\,dx\int_{0}\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}\,dx=\pi\,\{f(\omega)-f(-\pi)\}.$$

После чего

$$F(\omega)=\pi f(\omega) \tag{89}$$

кроме $\omega=\pi$, для которого случая должны писать

$$2F(\pi)=-f(-\pi)\int_{0}^{-2\pi}\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}\,dx+\int_{0}^{-2\pi}f'(x+\pi)\,dx\int_{0}^{x}\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}\,dx.$$

---

* Это не совсем точно. Разность, о которой идет речь, равна

$$2\sum_{i+1}^{\infty}\frac{1}{i}\sin ix.$$

* Это равенство, равно как и следующее за ним, справедливо. Подробное обоснование предельного перехода см. в примечании [18].

Здесь в последнем интеграле пренебрегая тем единственным элементом, который отвечает $x = -2\pi$, и таким образом, основываясь на уравнениях (86), к тому принимая

301 $$\int_0^{-2\pi} \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}\,dx = -2\pi, \quad \Big| \quad \int_0^{\pi} \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}\,dx = -\pi,$$

получим

$$F(\pi) = \frac{1}{2}\pi\,\{f(+\pi) + f(-\pi)\}. \tag{90}$$

Чтоб не оставить сомнения в отношении к строгости, можем также прибегнуть к вспомогательному числу $\delta > 0$, $< \pi$ и писать

$$\int_0^{-2\pi} f'(x+\pi)\,dx \int_0 \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}\,dx =$$

$$= \int_0^{-2\pi+\delta} f'(x+\pi)\,dx \int_0 \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}\,dx +$$

$$+ \int_{-2\pi+}^{-2\pi} f'(x+\pi)\,dx \int_{-2\pi+\delta}^{-2\pi} \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}\,dx^*.$$

---

* Здесь второй член правой части должен иметь вид

$$\int_{-2\pi+\delta}^{-2\pi} f'(x+\pi)\,dx \int_0^{x} \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}\,dx$$

или в обозначениях Лобачевского

$$\int_{-2\pi+\delta}^{-2\pi} f'(x+\pi)\,dx \int_0 \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}\,dx.$$

Эта и дальнейшие выкладки, имеющие целью обоснование равенства (90) непонятны. Строгое обоснование равенства (90) строится аналогично обоснованию равенства (89), приведенному в примечании [18].

Здесь

$$\int\limits_{-2\pi+\delta}^{-2\pi} \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}\,dx =$$

$$= \int\limits_{0}^{-2\pi} \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}\,dx - \int\limits_{0}^{-2\pi+\delta} \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}\,dx = -\pi.$$

302 |После чего

$$\int\limits_{0}^{-2\pi} f'(x+\pi)\,dx \int\limits_{0} \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}\,dx =$$

$$= -\pi \int\limits_{0}^{-2\pi+\delta} f'(x+\pi)\,dx - \pi \int\limits_{-2\pi+\delta}^{-2\pi} f'(x+\pi)\,dx =$$

$$= -\pi \int\limits_{0}^{-2\pi} f'(x+\pi)\,dx = \pi\{f(+\pi) - f(-\pi)\}.$$

В сочинении моем *Об исчезании тригонометрических строк* употребил я другой способ, чтобы притти к уравнению (90)*. Так как значения $f(x)$ собственно даны от $x=-\pi$ до $x=+\pi$, и следовательно произвольны для $x>\pi$, то принимая

$$f(\pi+x) = f(\pi-x)$$

для всякого $x>0$; потом разумея под $\varphi(x)$ новую постепенную функцию x, которая происходит, когда в $f(x)$ ставим $x+\delta$ вместо x с известным числом $\delta>0$, можем писать, смотря на уравнения (88), (89),

303 | $$2\pi\,\varphi(\pi-\delta) = \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \frac{\sin\left[\left(i+\frac{1}{2}\right)(x-\pi+\delta)\right]}{\sin\frac{1}{2}(x-\pi+\delta)}\,\varphi(x)\,dx. \qquad [90a]$$

---

* См. стр. 78—80 наст. тома.

Это значит

$$2\pi f(\pi) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\sin\left[\left(i+\frac{1}{2}\right)(x-\pi+\delta)\right]}{\sin\frac{1}{2}(x-\pi+\delta)} f(x+\delta)\,dx =$$

$$= \int_{-\pi+\delta}^{+\pi+\delta} \frac{\sin\left[\left(i+\frac{1}{2}\right)(x-\pi)\right]}{\sin\frac{1}{2}(x-\pi)} f(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\sin\left[\left(i+\frac{1}{2}\right)(x-\pi)\right]}{\sin\frac{1}{2}(x-\pi)} f(x)\,dx - \int_{-\pi}^{-\pi+\delta} \frac{\sin\left[\left(i+\frac{1}{2}\right)(x-\pi)\right]}{\sin\frac{1}{2}(x-\pi)} f(x)\,dx +$$

$$+ \int_{\pi}^{\pi+\delta} \frac{\sin\left[\left(i+\frac{1}{2}\right)(x-\pi)\right]}{\sin\frac{1}{2}(x-\pi)} f(x)\,dx =$$

$$= 2F(\pi) - \int_{0}^{\delta} \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x} f(x-\pi)\,dx + \int_{0}^{\delta} \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x} f(\pi+x)\,dx. \quad [90b]$$

Для δ столько малого, чтоб $f(x+\delta)$, $f(x-\delta)$ можно было принимать за $f(x)$, получим

304 $$2\pi f(\pi) = 2F(\pi) + \{f(+\pi) - f(-\pi)\} \int_{0}^{\delta} \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}\,dx\,^{*}. \quad [90c]$$

Последний интеграл представляет π, как бы дуга δ мала ни была [урав. (86)]; после чего получим опять уравнение (90).

---

* В правых частях [90a], [90b] и [90c] подразумевается переход к пределу при $i \to \infty$ после вычисления соответствующих интегралов. Равенство [90c] Лобачевский получает из [90b] фактически применением первой теоремы о среднем (под знаком предела) и переходом к пределу при $\delta \to 0$, но применять эту теорему нельзя, так как, как бы мало ни было δ, функция $\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}$ при достаточно большом i не является знакопостоянной в интервале $(0, \delta)$. Обосновать равенство [90c] можно при помощи рассуждений, аналогичных тем, которые приведены в примечании [18].

Так как $f(x)$ в уравнении (87) — произвольная функция, то поставя $f(-x)$ вместо $f(x)$, потом $-x$ вместо x, наконец $f(-\omega)$ вместо $f(\omega)$, как сейчас доказано было для непрерывных функций кроме случая $\omega = \pi$, находим

$$2\pi f(-\omega) = \int_{-\pi}^{+\pi} \{1 + 2\sum \cos i(x+\omega)\} f(x)\,dx\,^*.$$

Это значит, что предложение (89) справедливо для всех отрицательных значений ω по величине $< \pi$; а в уравнении (90) вместо $F(\pi)$ можем писать $F(-\pi)$. Итак, для всех углов ω внутри границ $-\pi$, $+\pi$ и для всякой непрерывной функции $f(x)$, будет

$$\pi f(\omega) = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx + \sum \int_{-\pi}^{+\pi} \cos i(x-\omega) f(x)\,dx \quad \begin{cases} i = 1 \\ i = \infty. \end{cases} \qquad (91)$$

Если ж $\omega = \pi$ в бесконечной строке, то

305 $$\frac{1}{2}\pi \{f(+\pi) + f(-\pi)\} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx + \sum \int_{-\pi}^{+\pi} (-1)^i \cos ix\, f(x)\,dx \quad \begin{cases} i = 1 \\ i = \infty. \end{cases} \qquad (92)$$

Особенного внимания не нужно было до сих пор обращать на тот случай, когда $f'(x)$ для какого нибудь x делается бесконечно великим, потому что в интегральном исчислении принимают всегда

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a),$$

каковы значения $f'(x)$ ни будут, лишь бы $f(x)$ не делалось бесконечно великим между границ a, b интеграла *.

Если ж $f(x)$ не постепенная функция, так что $x = a$ отвечают два значения $f(x) = A$, $f(x) = B$, из которых одно переходит грубо в другое с возрастанием x, то стоит только под $f(a)$ разуметь A,

---

* В правильной записи

$$2\pi f(-\omega) = \lim_{i\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{1 + 2\sum_{i=1}^{i} \cos i(x+\omega)\right\} f(x)\,dx.$$

* Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке интегрирования.

за $x = a$* вместо $f(x)$ писать $f(x) + A - B$, чтобы постепенность уже везде сохранялась. Уравнения (88) и (89) должны, следовательно, теперь давать для $\omega < a$

306 $$2\pi f(\omega) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\sin\left[\left(i+\frac{1}{2}\right)(x-\omega)\right]}{\sin\frac{1}{2}(x-\omega)} f(x)\,(dx) + (A-B)\int_{a}^{\pi} \frac{\sin\left[\left(i+\frac{1}{2}\right)(x-\omega)\right]}{\sin\frac{1}{2}(x-\omega)}\,dx.$$

Здесь

$$\int_{a}^{\pi} \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)(x-\omega)}{\sin\frac{1}{2}(x-\omega)}\,dx = \int_{a-\omega}^{\pi-\omega} \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}\,dx = 0.$$

Для $\omega > a$ те же уравнения (88), (89) дают

$$2\pi\{f(\omega) + A - B\} = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\sin\left[\left(i+\frac{1}{2}\right)(x-\omega)\right]}{\sin\frac{1}{2}(x-\omega)} f(x)\,dx + (A-B)\int_{a-\omega}^{\pi-\omega} \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}\,dx.$$

Здесь

$$\int_{a-\omega}^{\pi-\omega} \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}\,dx = \int_{0}^{\omega-a} \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}\,dx + \int_{0}^{\pi-\omega} \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}\,dx = 2\pi.$$

307 Таким образом, уравнение (91) в этих двух случаях остается верным; но для $x = a$ находим

$$2\pi A = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\sin\left[\left(i+\frac{1}{2}\right)(x-a)\right]}{\sin\frac{1}{2}(x-a)} f(x)\,dx + (A-B)\int_{0}^{\pi-a} \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}\,dx,$$

где последний интеграл представляет π. Отсюда

$$\pi(A+B) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\sin\left[\left(i+\frac{1}{2}\right)(x-a)\right]}{\sin\frac{1}{2}(x-a)} f(x)\,dx.$$

---

* То-есть при $x > a$.

Это значит:

$$\frac{1}{2}\pi(A+B)=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx+\sum\int_{-\pi}^{+\pi}\cos i(x-a)f(x)\,dx \quad \begin{cases} i=1 \\ i=\infty \end{cases} \quad (93)$$

всякий раз, когда с $x=a$ постепенность функции $f(x)$ нарушается грубым переходом от $f(a)=A$ к $f(a)=B$.

[IV]

Применяя предложение (91) к уравнениям (80), (81), получим для всякого числа $n>0$ и для всякой дуги $\omega>-\pi$, $<+\pi$

308 $$\left.\begin{aligned} 2^n\cos^n\omega &= \frac{[1+(-1)^n]\,n^{\infty n}}{\left(\frac{1}{2}n\right)^{\infty\frac{1}{2}n}\left(\frac{1}{2}n\right)^{\infty\frac{1}{2}n}}\left\{\frac{1}{2}+\sum_{1}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}n\right)^{\infty i}}{\left(\frac{1}{2}n+i\right)^{\infty i}}\cos 2i\omega\right\}+ \\ &+\frac{[1-(-1)^n]\,n^{\infty n}}{\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\infty\frac{n-1}{2}}\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\infty\frac{n-1}{2}}}\sum_{1}^{\infty}\frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\infty i-1}}{\left(\frac{n-1}{2}+i\right)^{\infty i}}\cos(2i-1)\omega. \end{aligned}\right\} (94)$$

Если здесь $n=2m$ четное число, то

$$2^{2m}\cos^{2m}\omega=\frac{(2m)^{\infty 2m}}{m^{\infty m}m^{\infty m}}\left\{1+2\sum_{1}^{m}\frac{m^{\infty i}}{(m+i)^{\infty i}}\cos 2i\omega\right\}$$

или можем написать иначе

$$2^{2m}\cos^{2m}\omega=\frac{(2m)^{\infty 2m}}{m^{\infty m}m^{\infty m}}\sum m^{\infty i}m^{\infty -i}\cos 2i\omega\,^{*} \quad \begin{cases} i=-m \\ i=+m. \end{cases}$$

Поставя сюда

$$i=\lambda-m,$$
$$(2m)^{\infty 2m}=(2m)^{\infty\lambda}(2m-\lambda)^{\infty m-\lambda}m^{\infty m},$$
$$m^{\infty m}=m^{\infty m-\lambda}\lambda^{\infty\lambda},$$

получим

$$2^{2m}\cos^{2m}\omega=\sum(2m)_0^{\infty\lambda}\cos(2m-2\lambda)\omega \quad \begin{cases} \lambda=0 \\ \lambda=2m \end{cases}$$

---

* Из основного равенства $(x+\alpha)^{\infty x+\alpha}=(x+\alpha)^{\infty x}\alpha^{\infty\alpha}$, положив $x+\alpha=m$, $x=-i$, имеем $m^{\infty m}=m^{\infty -i}(m+i)^{\infty m+i}$, откуда

$$m^{\infty -i}=\frac{1}{(m+i)^{\infty i}}.$$

309 |— известное разложение чотной степени косинуса в косинусы кратной дуги.

С нечотным числом $n=2m+1$ уравнение (94) делается

$$2^{2m+1}\cos^{2m+1}\omega=\frac{(2m+1)^{\infty 2m+1}}{m^{\infty m}m^{\infty m}}\sum_{-m}^{m+1}m^{\infty i-1}m^{\infty -i}\cos(2i-1)\omega,$$

а ставя сюда

$$i=\lambda-m,$$

$$(2m+1)^{\infty 2m+1}=(2m+1)^{\infty\lambda}(2m+1-\lambda)^{\infty m+1-\lambda}(m+1)^{\infty m+1},$$

получим навестное выражение

$$2^{2m+1}\cos^{2m+1}\omega=\sum(2m+1)_0^{\infty\lambda}\cos(2m+1-2\lambda)\omega \quad \begin{cases}\lambda=0\\ \lambda=2m+1.\end{cases}$$

Если в уравнении (91) полагаем $f(x)=\cos^n x$ от $x=-\frac{1}{2}\pi$ до $x=+\frac{1}{2}\pi$, а вне таких границ почитаем $f(x)=0$, то с пособием уравнения (76) для всякого целого i находим

$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi}\cos i(x-\omega)\cos^n x\,dx=\frac{\pi n^{\infty n}\cos i\omega}{2^n\left(\frac{n+i}{2}\right)^{\infty\frac{n+i}{2}}\left(\frac{n-i}{2}\right)^{\infty\frac{n-i}{2}}}\;* . \qquad [94a]$$

Отсюда, поставя $2i$ вместо чотного, $2i+1$ вместо нечотного i [урав. (42)]*,

310 |

$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi}\cos 2i(x-\omega)\cos^n x\,dx=\frac{\pi n^{\infty n}\left(\frac{n}{2}\right)^{\infty i}\left(\frac{n}{2}\right)^{\infty -i}}{2^n\left(\frac{1}{2}n\right)^{\infty\frac{1}{2}n}\left(\frac{1}{2}n\right)^{\infty\frac{1}{2}n}}\cos 2i\omega,$$

$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi}\cos[(2i+1)(x-\omega)]\cos^n x\,dx=$$

$$=\frac{\pi n^{\infty n}\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\infty i}\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\infty -i}}{2^n\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\infty\frac{n+1}{2}}\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\infty\frac{n-1}{2}}}\cos(2i+1)\omega.$$

---

* Это равенство непосредственно следует из (76).

* Следующие далее равенства вытекают из равенств [80a], [80b], если учесть сказанное в сноске к стр. 138.

После чего для $\omega \geqq 0$, $\leqq \frac{1}{2}\pi$

$$\left.\begin{aligned}2^n\cos^n\omega = &\frac{n^{\infty n}}{\left(\frac{1}{2}n\right)^{\infty\frac{1}{2}n}\left(\frac{1}{2}n\right)^{\infty\frac{1}{2}n}}\left\{\frac{1}{2}+\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}n\right)^{\infty i}\left(\frac{1}{2}n\right)^{\infty-i}\cos 2i\omega\right\}+\\ &+\frac{n^{\infty n}}{\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\infty\frac{n+1}{2}}\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\infty\frac{n-1}{2}}}\sum_{0}^{\infty}\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\infty i}\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\infty-i}\cos(2i+1)\omega,\end{aligned}\right\}\quad(95)$$

$$\begin{aligned}0 = &\frac{n^{\infty n}}{\left(\frac{1}{2}n\right)^{\infty\frac{1}{2}n}\left(\frac{1}{2}n\right)^{\infty\frac{1}{2}n}}\left\{\frac{1}{2}+\sum_{1}^{\infty}(-1)^i\left(\frac{1}{2}n\right)^{\infty i}\left(\frac{1}{2}n\right)^{\infty-i}\cos 2i\omega\right\}-\\ &-\frac{n^{\infty n}}{\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\infty\frac{n+1}{2}}\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\infty\frac{n-1}{2}}}\times\\ &\times\sum_{0}^{\infty}(-1)^i\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\infty i}\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\infty-i}\sin(2i+1)\omega.\quad[95a]\end{aligned}$$

Последнее уравнение справедливо также для положительных углов
311 $\omega > \frac{1}{2}\pi$, $< \pi$, как можно видеть | из сличения двух уравнений (94), (95) в предположении $\omega \geqq 0$, $\leqq \frac{1}{2}\pi$ *. А когда сюда ставим $\frac{1}{2}\pi+\omega$ вместо ω, то получим для всех углов от $\omega=-\frac{1}{2}\pi$ до $\omega=\frac{1}{2}\pi$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}+\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{n}{2}\right)^{\infty i}\left(\frac{n}{2}\right)^{\infty-i}\cos 2i\omega = &\frac{\left(\frac{1}{2}n\right)^{\infty\frac{1}{2}n}\left(\frac{1}{2}n\right)^{\infty\frac{1}{2}n}}{\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\infty\frac{n+1}{2}}\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\infty\frac{n-1}{2}}}\times\\ &\times\sum_{0}^{\infty}\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\infty i}\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\infty-i}\cos(2i+1)\omega.\quad(96)\end{aligned}$$

---

* Равенство (95) дает разложение в ряд Фурье непрерывной функции, равной $2^n\cos^n\omega$ в интервале $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ и равной нулю в интервалах $\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$; поэтому при замене ω через $\omega+\frac{\pi}{2}$ сумма ряда будет равна нулю, если $0\leqslant\omega\leqslant\frac{\pi}{2}$; эта замена и приводит к [95a].

Но так как сумма ряда (95) является периодической функцией с периодом 2π, то она равна нулю и в интервале $\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$; следовательно, равенство [95a] имеет также место в интервале $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

После чего уравнение (95) может быть представлено двояким образом для всех углов от $\omega = 0$ до $\omega = \frac{1}{2}\pi$ *.

$$2^{n-1}\cos^n\omega = \frac{n^{\infty n}}{\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\infty\frac{n+1}{2}}\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\infty\frac{n-1}{2}}}\times$$

$$\times\sum_0^\infty\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\infty i}\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\infty -i}\cos(2i+1)\omega, \quad (97)$$

$$2^{n-1}\cos^n\omega = \frac{n^{\infty n}}{\left(\frac{1}{2}n\right)^{\infty\frac{1}{2}n}\left(\frac{1}{2}n\right)^{\infty\frac{1}{2}n}}\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{2}+\sum_1^\infty\left(\frac{1}{2}n\right)^{\infty i}\left(\frac{1}{2}n\right)^{\infty -i}\cos 2i\omega\right\}. \quad (98)$$

Для $n = 2m$ чотного числа последнее дает то же, что было выше; между тем, в первом

312 $$\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\infty\frac{n+1}{2}} = \left(m+\frac{1}{2}\right)^{\infty m}\left(\frac{1}{2}\right)^{\infty\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(m+\frac{1}{2}\right)^{\infty m}\sqrt{\pi}$$

и следовательно

$$\pi\, 2^{2m-1}\cos^{2m}\omega = \frac{4(2m)^{\infty 2m}\left(m+\frac{1}{2}\right)}{\left(m+\frac{1}{2}\right)^{\infty m}\left(m+\frac{1}{2}\right)^{\infty m}}\times$$

$$\times\sum_1^\infty\left(m-\frac{1}{2}\right)^{\infty i}\left(m+\frac{1}{2}\right)^{\infty -i}\cos(2i+1)\omega\,^\star. \quad (99)$$

---

* Равенства (97) и (98) справедливы не только в интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, но и во всем интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, так как в этом интервале имеют место равенства (95) и (96). Из непрерывности разлагаемой в ряд функции следует также справедливость этих равенств и на концах интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

⋆ В оригинале отсутствует множитель $m+\frac{1}{2}$ в числителе дроби, стоящей в правой части этого равенства.

Это значит:

$$(2m+1)\frac{1}{4}\pi\cos^{2m}\omega=\frac{2m(2m-2)\ldots2}{(2m-1)(2m-3)\ldots1}\left\{\cos\omega+\right.$$
$$\left.+\frac{2m-1}{2m+3}\cos3\omega+\frac{(2m-1)(2m-3)}{(2m+3)(2m+5)}\cos5\omega+\ldots\right\}^{*}.$$

Для $n=2m+1$ нечотного уравнение (97) дает обыкновенное разложение на косинусы нечотно кратной дуги. Напротив, уравнение (98) делается

$$\pi\,2^{2m-2}\cos^{2m+1}\omega=\frac{(2m+1)^{\infty 2m+1}}{\left(m+\frac{1}{2}\right)^{\infty m}\left(m+\frac{1}{2}\right)^{\infty m}}\times$$
$$\times\left\{\frac{1}{2}+\sum_{1}^{\infty}\left(m+\frac{1}{2}\right)^{\infty i}\left(m+\frac{1}{2}\right)^{\infty -i}\cos2i\omega\right\}. \quad (100)$$

313 | Это значит

$$\frac{1}{4}\pi\cos^{2m+1}\omega=\frac{2m(2m-2)\ldots2}{(2m+1)(2m-1)\ldots1}\left\{\frac{1}{2}+\frac{2m+1}{2m+3}\cos2\omega+\right.$$
$$\left.+\frac{(2m+1)(2m-1)}{(2m+3)(2m+5)}\cos4\omega+\ldots\right\}^{*}.$$

Уравнение (96) умножая на $d\omega$ и интегрируя от $\omega=0$, получим для всех углов от $\omega=0$ до $\omega=\frac{1}{2}\pi$

$$\frac{1}{2}\omega=\frac{\left(\frac{1}{2}n\right)^{\infty\frac{1}{2}n}\left(\frac{1}{2}n\right)^{\infty\frac{1}{2}n}}{\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\infty\frac{n+1}{2}}\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\infty\frac{n-1}{2}}}\times$$
$$\times\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{2i+1}\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\infty i}\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\infty -i}\sin(2i+1)\omega-$$
$$-\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{2i}\left(\frac{n}{2}\right)^{\infty i}\left(\frac{n}{2}\right)^{\infty -i}\sin2i\omega^{\oslash}. \quad (101)$$

---

* В оригинале это равенство имеет вид

$$(2m+1)^2\frac{1}{8}\pi\cos^{2m}\omega=\frac{2m\cdot2m-2\ldots2}{2m\quad1\cdot2m-3\ldots1}\left\{\frac{2m-1}{2m-3}\cos\omega+\right.$$
$$\left.+\frac{2m-1\cdot2m-3}{2m+3\cdot2m+5}\cos3\omega+\frac{2m-1\cdot2m-3\cdot2m-5}{2m+3\cdot2m+5\cdot2m+7}\cos5\omega+\ldots\right\}.$$

* В оригинале вместо множителя $\frac{1}{4}$ в левой части равенства напечатано $\frac{1}{2}$.

$\oslash$ Равенство (101) имеет место, так же как и (96), в интервале $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Оно справедливо также и при $\omega=\pm\frac{\pi}{2}$.

Чтоб уверену быть в справедливости такого выражения, надобно только доказать исчезание бесконечной строки*. Это можно видеть, принимая тотчас i так большим числом, чтобы без чувствительной разности полагать уже

$$\left(\frac{1}{2}n\right)^{\infty i}=\frac{(-1)^i i^{\infty i} i^{-\frac{1}{2}n-1}}{\left(-\frac{1}{2}n-1\right)^{\infty -\frac{1}{2}n-1}}, \qquad [101a]$$

314 $$\left(\frac{1}{2}n\right)^{\infty -i}=\frac{i^{-\frac{1}{2}n}\left(\frac{n}{2}\right)^{\infty \frac{n}{2}}}{i^{\infty i}} [^{19}]^{*}. \qquad [101b]$$

Откуда

$$\left(\frac{1}{2}n\right)^{\infty i}\left(\frac{1}{2}n\right)^{\infty -i}=\frac{(-1)^i i^{-n-1}\left(\frac{n}{2}\right)^{\infty \frac{n}{2}}}{\left(-\frac{1}{2}n-1\right)^{\infty -\frac{1}{2}n-1}}. \qquad [101c]$$

Таким же образом

$$\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\infty i}=\frac{(-1)^i i^{\infty i} i^{-\frac{n+1}{2}}}{\left(-\frac{n+1}{2}\right)^{\infty -\frac{n+1}{2}}}, \qquad [101d]$$

---

* Это излишне, так как Лобачевским доказана (см., например, сочинение «Об исчезании тригонометрических строк», стр. 68—70 наст. издания) возможность почленного интегрирования ряда Фурье.

* Нами исправлены почти все правые части формулы [101b] — [101h]. В оригинале:

1) в формуле [101b] вместо множителя $\left(\frac{n}{2}\right)^{\infty \frac{n}{2}}$ напечатано $(-1)^i$,

2) в формуле [101c] отсутствуют множители $(-1)^i$ и $\left(\frac{n}{2}\right)^{\infty \frac{n}{2}}$,

3) в формуле [101e] вместо множителя $\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\infty \frac{n+1}{2}}$ напечатано $(-1)^i$,

4) в формуле [101f] отсутствуют множители $(-1)^i$ и $\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\infty \frac{n+1}{2}}$,

5) в формуле [101g] отсутствуют множители $(-1)^i$ и $\left(\frac{n}{2}\right)^{\infty \frac{n}{2}}$,

6) в формуле [101h] в знаменателе имеется лишний множитель $\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\infty \frac{n+1}{2}}$.

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\infty-i} = \frac{i^{-\frac{n+1}{2}}\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\infty\frac{n+1}{2}}}{i^{\infty i}}, \tag{101e}$$

$$\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\infty i}\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\infty-i} = \frac{(-1)^i i^{-n-1}\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\infty\frac{n+1}{2}}}{\left(-\frac{n+1}{2}\right)^{\infty-\frac{n+1}{2}}}, \tag{101f}$$

а следовательно множитель при $\sin 2i\omega$ в строке (101) будет

$$-(-1)^i\,\frac{1}{2i^{n+2}}\cdot\frac{\left(\frac{n}{2}\right)^{\infty\frac{n}{2}}}{\left(-\frac{1}{2}n-1\right)^{\infty-\frac{1}{2}n-1}}; \tag{101g}$$

215 | множитель при $\sin\,(2i+1)\omega$:

$$\frac{1}{(2i+1)\,i^{n+1}}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}n\right)^{\infty\frac{1}{2}n}\left(\frac{1}{2}n\right)^{\infty\frac{1}{2}n}}{\left(-\frac{n+1}{2}\right)^{\infty-\frac{n+1}{2}}\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\infty\frac{n-1}{2}}}. \tag{101h}$$

После того, что было доказано выше, строка (101) должна, следовательно, под конец делаться исчезающей.

В уравнении (101) полагая $\omega=\frac{1}{2}\pi$, получим

$$\frac{1}{4}\pi = \frac{\left(\frac{1}{2}n\right)^{\infty\frac{1}{2}n}\left(\frac{1}{2}n\right)^{\infty\frac{1}{2}n}}{\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\infty\frac{n+1}{2}}\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\infty\frac{n-1}{2}}}\times$$
$$\times\sum_0^\infty\frac{(-1)^i}{2i+1}\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\infty i}\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\infty-i}\text{*}. \tag{102}$$

Если же поставим сюда

$$n=2m+p,$$

* В оригинале вместо множителя $\frac{1}{4}$ напечатано $\frac{1}{2}$.

то находим

$$\frac{1}{4}\pi\frac{\left(\frac{p+1}{2}\right)^{\infty\frac{p+1}{2}}\left(\frac{p-1}{2}\right)^{\infty\frac{p-1}{2}}}{\left(\frac{1}{2}p\right)^{\infty\frac{1}{2}p}\left(\frac{1}{2}p\right)^{\infty\frac{1}{2}p}}=$$

$$=\frac{\left(m+\frac{1}{2}p\right)^{\infty m}\left(m+\frac{1}{2}p\right)^{\infty m}}{\left(m+\frac{p-1}{2}\right)^{\infty m}\left(m+\frac{p+1}{2}\right)^{\infty m}}\times$$

$$\times\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{2i+1}\left(m+\frac{p-1}{2}\right)^{\infty i}\left(m+\frac{p+1}{2}\right)^{\infty -i},\quad(103)$$

316 где m, p — произвольные числа. Для $m=\infty$ с пособием уравнения (41) последняя строка обращается в

$$\frac{1}{4}\pi=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$$

Для всякого другого m уравнение (103) с обыкновенным означением представляет

$$\frac{\left(\frac{p+1}{2}\right)^{\infty\frac{p+1}{2}}}{\left(\frac{1}{2}p\right)^{\infty\frac{1}{2}p}}\cdot\frac{(p+3)(p+5)\ldots(p+2m+1)\sqrt{\pi}}{(p+2)(p+4)\ldots(p+2m)\sqrt{2(p+2m+1)}}=$$

$$=\sqrt{1-\frac{1}{3}\,\frac{2m+p-1}{2m+p+3}+\frac{1}{5}\,\frac{(2m+p-1)(2m+p-3)}{(2m+p+3)(2m+p+5)}-\ldots}$$

Уравнение (102) помножив на такое же с переменой n на $n+1$ получим весьма примечательное выражение

$$\frac{1}{16}\pi^2=\frac{n+1}{n+2}\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{2i+1}\left(\frac{1}{2}n\right)^{\infty i}\left(\frac{1}{2}n+1\right)^{\infty -i}\times$$

$$\times\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{2i+1}\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\infty i}\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\infty -i},\quad(104)$$

которое значит

317

$$\frac{1}{16}\pi^2=\frac{n+1}{n+2}\left\{1-\frac{1}{3}\,\frac{n}{n+4}+\frac{1}{5}\,\frac{n(n-2)}{(n+4)(n+6)}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{7}\,\frac{n(n-2)(n-4)}{(n+4)(n+6)(n+8)}+\ldots\right\}\times$$

$$\times\left\{1-\frac{1}{3}\,\frac{n-1}{n+3}+\frac{1}{5}\,\frac{(n-1)(n-3)}{(n+3)(n+5)}-\frac{1}{7}\,\frac{(n-1)(n-3)(n-5)}{(n+3)(n+5)(n+7)}+\ldots\right\}.$$

Для $n=0$ это будет

$$\frac{1}{8}\pi^2 = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots$$

Для $n=1$, $n=2$

$$\frac{1}{32}\pi^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{1\cdot 3^2\cdot 5} - \frac{1}{3\cdot 5^2\cdot 7} - \frac{1}{5\cdot 7^2\cdot 9} - \ldots$$

Для $n=3$, $n=4$

$$\frac{\pi^2}{16\cdot 32} = \frac{2}{3\cdot 5\cdot 7} + \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5^2\cdot 7\cdot 9} + \frac{1}{3\cdot 5\cdot 7^2\cdot 9\cdot 11} + $$
$$+ \frac{1}{5\cdot 7\cdot 9^2\cdot 11\cdot 13} + \ldots$$

318 |Подобных уравнению (104) можем найти много, продолжая брать интегралы в обеих частях уравнения (101). Так, следующий интеграл дает

$$\frac{\left(\frac{1}{2}n\right)^{\omega \frac{1}{2}n}\left(\frac{1}{2}n\right)^{\omega \frac{1}{2}n}}{\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\omega \frac{n+1}{2}}\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\omega \frac{n-1}{2}}} \times$$
$$\times \sum_0^\infty \left(\frac{1}{2i+1}\right)^2 \left(\frac{n-1}{2}\right)^{\omega i} \left(\frac{n+1}{2}\right)^{\omega - i} [1-\cos(2i+1)\omega] =$$
$$= \frac{1}{2}\omega_0^2 + \sum_0^\infty \left(\frac{1}{2i}\right)^2 \left(\frac{n}{2}\right)^{\omega i} \left(\frac{n}{2}\right)^{\omega - i} (1-\cos 2i\omega).$$

Полагая здесь $\omega = \frac{1}{2}\pi$, потом умножая на такое ж уравнение с переменой n на $n+1$, получим

$$\left\{\frac{1}{8}\pi^2 + \sum_0^\infty \left(\frac{1}{2i+1}\right)^2 \left(\frac{1}{2}n\right)^{\omega 2i+1} \left(\frac{1}{2}n\right)^{\omega -2i-1}\right\} \times$$
$$\times \left\{\frac{1}{8}\pi^2 + \sum_0^\infty \left(\frac{1}{2i+1}\right)^2 \left(\frac{n+1}{2}\right)^{\omega 2i+1} \left(\frac{n+1}{2}\right)^{\omega -2i-1}\right\} =$$
$$= 4\,\frac{n+1}{n+2} \sum_0^\infty \left(\frac{1}{2i+1}\right)^2 \left(\frac{1}{2}n\right)^{\omega i} \left(\frac{1}{2}n+1\right)^{\omega - i} \times$$
$$\times \sum_0^\infty \left(\frac{1}{2i+1}\right)^2 \left(\frac{n-1}{2}\right)^{\omega i} \left(\frac{n+1}{2}\right)^{\omega - i}\ {}^* \qquad (105)$$

* В оригинале в этой и в следующей формулах в начале каждой скобки в левой части вместо $\frac{1}{8}$ напечатано $\frac{1}{2}$, а в начале правой части вместо 4 напечатано 2.

319 | Это значит

$$\left\{\frac{1}{8}\pi^2+\frac{n}{n+2}+\frac{1}{3^2}\,\frac{n(n-2)}{(n+2)(n+4)}+\ldots\right\}\times$$
$$\times\left\{\frac{1}{8}\pi^2+\frac{n+1}{n+3}+\frac{1}{3^2}\,\frac{(n+1)(n-1)}{(n+3)(n+5)}+\ldots\right\}=$$
$$=4\,\frac{n+1}{n+2}\left\{1+\frac{1}{3^2}\,\frac{n}{n+4}+\frac{1}{5^2}\,\frac{n(n-2)}{(n+4)(n+6)}+\ldots\right\}\times$$
$$\times\left\{1+\frac{1}{3^2}\,\frac{n-1}{n+3}+\frac{1}{5^2}\,\frac{(n-1)(n-3)}{(n+3)(n+5)}+\ldots\right\},$$

Для $n=0$ будет

$$\frac{1}{8}\pi^3\left\{\frac{1}{8}\pi^2+\frac{1}{3}-\frac{1}{3^3\cdot 5}+\frac{1}{5^3\cdot 7}-\frac{1}{7^3\cdot 9}+\ldots\right\}=$$
$$=2\left(1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\ldots\right)^{*}.$$

Для $n=1$

$$\frac{1}{8}\left(\frac{\pi^3}{8}+\frac{1}{2}\right)\left\{\frac{1}{3}\pi^2+\frac{1}{3}-\frac{1}{3^3\cdot 5}+\frac{1}{5^3\cdot 7}-\frac{1}{7^3\cdot 9}+\ldots\right\}=$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^3\cdot 5}-\frac{1}{3\cdot 5^3\cdot 7}+\frac{1}{5\cdot 7^3\cdot 9}-\ldots$$

320 | Уравнение (105) разделяя на такое же с переменой n на $n+1$, находим

$$\frac{\frac{1}{8}\pi^2+\sum_0^\infty\left(\frac{1}{2i+1}\right)^2\left(\frac{1}{2}n\right)^{\infty 2i+1}\left(\frac{1}{2}n\right)^{\infty -2i-1}}{\frac{1}{8}\pi^2+\sum_0^\infty\left(\frac{1}{2i+1}\right)^2\left(\frac{1}{2}n+1\right)^{\infty 2i+1}\left(\frac{1}{2}n+1\right)^{\infty -2i-1}}=$$
$$=\frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)(n+2)}\cdot\frac{\sum_0^\infty\left(\frac{1}{2i+1}\right)^2\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\infty i}\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\infty -i}}{\sum_0^\infty\left(\frac{1}{2i+1}\right)^2\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\infty i}\left(\frac{n+3}{2}\right)^{\infty -i}}\,^{*}.$$

---

* В оригинале это равенство имеет вид

$$\frac{1}{2}\pi^3\left\{\frac{1}{2}\pi^2+\frac{1}{3}-\frac{1}{3^3\cdot 5}+\frac{1}{5^3\cdot 7}-\frac{1}{7^3\cdot 9}+\ldots\right\}=1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\ldots,$$

а левая часть следующего равенства — вид

$$\frac{1}{3}(\pi^3+1)\left\{\frac{1}{2}\pi^2+\frac{1}{3}-\frac{1}{3^3\cdot 5}+\frac{1}{5^3\cdot 7}-\frac{1}{7^3\cdot 9}+\ldots\right\}.$$

* В оригинале в числителе и в знаменателе левой части вместо $\frac{1}{8}\pi^2$ напечатано $\frac{1}{3}\pi^2$.

Например для $n=0$

$$\frac{4\pi^2}{\pi^2+4}=\frac{1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\dots}{\frac{1}{3}+\frac{1}{3^3\cdot 5}-\frac{1}{3\cdot 5^3\cdot 7}+\frac{1}{5\cdot 7^3\cdot 9}-\dots}\ *.$$

Когда в уравнение (98) ставим $\frac{1}{2}\pi-\omega$ вместо ω, потом, умножив на $\cos^m\omega\, d\omega$, интегрируем от $\omega=0$ до $\omega=\frac{1}{2}\pi$, то получим

$$2^{n-1}\int\sin^n\omega\cos^m\omega\, d\omega=$$

$$=\frac{n^{\infty n}}{\left(\frac{1}{2}n\right)^{\infty\frac{1}{2}n}\left(\frac{1}{2}n\right)^{\infty\frac{1}{2}n}}\left\{\frac{1}{2}\int\cos^m\omega\, d\omega+\right.$$

$$\left.+\sum_{1}^{\infty}(-1)^i\left(\frac{1}{2}n\right)^{\infty i}\left(\frac{1}{2}n\right)^{\infty -i}\int\cos 2i\omega\cos^m\omega\, d\omega\right\}.$$

321 |Здесь, как видели выше [ур. (76)],

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos^m\omega\, d\omega=\frac{\pi m^{\infty m}}{2^{m+1}\left(\frac{1}{2}m\right)^{\infty\frac{1}{2}m}\left(\frac{1}{2}m\right)^{\infty\frac{1}{2}m}}, \qquad [105a]$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos 2i\omega\cos^m\omega\, d\omega=\frac{\pi m^{\infty m}}{2^{m+1}\left(\frac{1}{2}m+i\right)^{\infty\frac{1}{2}m+i}\left(\frac{1}{2}m-i\right)^{\infty\frac{1}{2}m-i}}=$$

$$=\frac{\pi m^{\infty m}\left(\frac{1}{2}m\right)^{\infty i}\left(\frac{1}{2}m\right)^{\infty -i}}{2^{m+1}\left(\frac{1}{2}m\right)^{\infty\frac{1}{2}m}\left(\frac{1}{2}m\right)^{\infty\frac{1}{2}m}}. \qquad [105b]$$

После чего

$$2^{n+m}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^n\omega\cos^m\omega\, d\omega=\frac{\pi n^{\infty n}m^{\infty m}}{\left[\left(\frac{1}{2}n\right)^{\infty\frac{1}{2}n}\left(\frac{1}{2}m\right)^{\infty\frac{1}{2}m}\right]^2}\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{2}+\sum_{1}^{\infty}(-1)^i\left(\frac{1}{2}n\right)^{\infty i}\left(\frac{1}{2}n\right)^{\infty -i}\left(\frac{1}{2}m\right)^{\infty i}\left(\frac{1}{2}m\right)^{\infty -i}\right\},$$

---

* В оригинале левая часть этого равенства имеет вид

$$\frac{4\pi^2}{\pi^2+1}.$$

а с переменой n, m на $2n$, $2m$ и принимая в рассуждение интеграл (50), находим

$$2^{2n+2m-1}\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)^{\infty n-\frac{1}{2}}\left(m-\frac{1}{2}\right)^{\infty m-\frac{1}{2}}}{(n+m)^{\infty n+m}}=$$

$$=\frac{\pi(2n)^{\infty 2n}(2m)^{\infty 2m}}{n^{\infty n}n^{\infty n}m^{\infty m}m^{\infty m}}\left\{\frac{1}{2}+\sum_{1}^{\infty}(-1)^{i}n^{\infty i}n^{\infty -i}m^{\infty i}m^{\infty -i}\right\}.$$

392 |Наконец, отсюда

$$\frac{n^{\infty n}m^{\infty m}}{(n+m)^{\infty n+m}}=1+2\sum_{1}(-1)^{i}n^{\infty i}n^{\infty -i}m^{\infty i}m^{\infty -i}\,*. \qquad (106)$$

Например, для $m=-n$ это дает *

$$\frac{n\pi}{2\sin n\pi}=\frac{1}{2}-\frac{n^2}{n^2-1}+\frac{n^2}{n^2-2^2}-\frac{n^2}{n^2-3^2}+\dots \qquad (107)$$

Для $m=1-n$

$$\frac{\pi}{2n(1-n)\sin n\pi}=\frac{1}{2n^2(n-1)^2}-\frac{1}{n(n^2-1)(n-2)}+$$
$$+\frac{1}{(n+1)(n^2-2^2)(n-3)}-\frac{1}{(n+2)(n^2-3^2)(n-4)}+\dots \qquad (108)$$

Для $m=2-n$

$$\frac{\pi}{4n(n-1)(n-2)\sin n\pi}=\frac{1}{2n^2(n-1)^2(n-2)^2}-$$
$$-\frac{1}{(n-1)(n^2-1^2)(n-2)(n-3)}+$$
$$+\frac{1}{n(n+1)(n^2-2^2)(n-3)(n-4)}-\dots \qquad (109)$$

Уравнение (107) умножив на dn и интегрируя, получим

393 |
$$\int_0 \frac{\pi x-\sin\pi x}{x^2\sin\pi x}\,dx=\log\left\{\frac{1+x}{1-x}\left(\frac{2-x}{2+x}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{3+x}{3-x}\right)^{\frac{1}{3}}\dots\right\}^{\circ}.$$

---

* Это равенство получается из предыдущего, если воспользоваться теоремой умножения гамма-функции (59), на основании которой

$$n^{\infty n}\left(n-\frac{1}{2}\right)^{\infty n-\frac{1}{2}}=(2\pi)^{\frac{1}{2}}\,2^{-2n-\frac{1}{2}}\,(2n)^{\infty 2n}.$$

* На основании (43).

° В оригинале в знаменателе под знаком интеграла пропущен множитель x^2. Если $|x|<1$, то ввиду равномерной сходимости ряда (107) в интервале $(0, x)$ почленное интегрирование этого ряда допустимо.

Если ж уравнение (107), разделив сперва на n, умножаем потом на dn и интегрируем, то приходим к известному выражению

$$\log\frac{2\operatorname{tang}\frac{1}{2}n\pi}{n\pi}=\log\frac{\left(1-\frac{n^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{n^2}{4^2}\right)\dots}{(1-n^2)\left(1-\frac{n^2}{3^2}\right)\dots}\ *.$$

В уравнении (106) полагая $n=m=\frac{1}{2}$, получим

$$\frac{1}{8}\pi=\frac{1}{2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^2\cdot5^2}-\frac{1}{5^2\cdot7^2}+\dots \qquad [109a]$$

Откуда

$$\frac{1}{64}\pi=\frac{1}{16}-\frac{1}{3\cdot5^2}-\frac{1}{5^2\cdot7\cdot9^2}-\frac{1}{9^2\cdot11\cdot13^2}-\dots\ *$$

или

$$\frac{1}{64}\pi=\frac{7}{9\cdot16}+\frac{1}{3^2\cdot5\cdot7^2}+\frac{1}{7^2\cdot9\cdot11^2}+\frac{1}{11^2\cdot13\cdot15^2}+\dots\ ⊘ \qquad [109b]$$

Делая же $n=m=\frac{1}{4}$,

324 $$\left(\frac{1}{4}\right)^{\infty\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{\pi}\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{5^2}+\left(\frac{3}{5\cdot9}\right)^2-\left(\frac{3\cdot7}{5\cdot9\cdot13}\right)^2+\dots}\ ♀.$$

Заметим еще интеграл

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin ix\cos^n x\sin x\,dx=$$

$$=\frac{i\pi n^{\infty n}}{2^{n+2}\left(\frac{n+1+i}{2}\right)^{\infty\frac{n+1+i}{2}}\left(\frac{n+1-i}{2}\right)^{\infty\frac{n+1-i}{2}}}, \qquad (110)$$

---

* В оригинале левая часть этого равенства имеет вид

$$\log\left(n^2\pi\operatorname{tang}\frac{1}{2}n\pi\right).$$

* В оригинале вместо последнего члена $\frac{1}{9^2\cdot11\cdot13^2}$ напечатано $\frac{1}{7^2\cdot9\cdot11^2}$. Это равенство получено из [109a] попарным соединением членов правой части, начиная со второго. Аналогичное соединение членов правой части [109a], начиная с первого, приводит к [109b].

⊘ В оригинале первый член правой части этого равенства равен $\frac{1}{9\cdot16}$.

♀ В оригинале вместо первого множителя правой части $\sqrt[4]{\pi}$ напечатано $\sqrt[4]{\frac{1}{8}\pi}$.

который легко вывести с пособием интеграла (76) и уравнения

$$\int \cos (i+1) x \cos^n x \, dx = \int \cos ix \cos^{n+1} x \, dx - \int \sin ix \cos^n x \sin x \, dx.$$

Перейдем теперь к интегралу

$$X = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos (nx - p \operatorname{tang} x) \cos^{n-2} x \, dx, \qquad [110a]$$

где p произвольное, n всякое положительное. Без назначения границ интегрирование по частям дает на правой стороне

325 $$-\frac{1}{p} \cos^n x \sin (nx - p \operatorname{tang} x) + \frac{n}{p} \int \cos^n x \cos (nx - p \operatorname{tang} x) \, dx -$$

$$- \frac{n}{p} \int \cos^{n-1} x \sin (nx - p \operatorname{tang} x) \sin x \, dx; \qquad [110b]$$

следовательно, для $n > 0$ [20]

$$X = \frac{n}{p} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos (nx + x - p \operatorname{tang} x) \cos^{n-1} x \, dx, \qquad (111)$$

$$\frac{d(pX)}{dp} + (p - n) X = 0 \, {}^*;$$

потом интегрируя:

$$X = p^{n-1} e^{-p} N. \qquad [111a]$$

Чтоб определить функцию N, которая не содержит более p, называем X' выражение X, поставя сюда $p + r$ вместо p и разумея под r целое положительное число. Основываясь на уравнении (111),

---

* При помощи [110b] получаем:

$$pX = n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cos (nx - p \operatorname{tg} x) \, dx - n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \sin (nx - p \operatorname{tg} x) \sin x \, dx.$$

Отсюда легко найти, что

$$\frac{d\,(pX)}{dx} + pX = n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x \cos (nx - p \operatorname{tg} x) \, dx = nX.$$

получим

$$(n-1)^{\infty-r}(p+r)^r X' =$$

$$=\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos(nx+rx-p\,\mathrm{tang}\,x-r\,\mathrm{tang}\,x)\cos^{n+r-2}x\,dx\,^*. \qquad [111b]$$

336 [Если r — чрезвычайно большое число, то под интегралом можно довольствоваться весьма малой дугой x, а потому для $r=\infty$ почитать со всей строгостию *

$$X'=\frac{1}{(n-1)^{\infty-r}(p+r)^r}\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos^{n+r-2}x\,dx \qquad [111c]$$

и поставя значения интеграла [ур. (76)],

$$X'=\frac{\pi(n+r-2)^{\infty\, n+r-2}}{2^{n+r-1}(n-1)^{\infty-r}(p+r)^r\left(\frac{n+r}{2}-1\right)^{\infty\frac{n+r}{2}-1}\left(\frac{n+r}{2}-1\right)^{\infty\frac{n+r}{2}-1}}$$

или [ур. (54)]

$$X'=\frac{\pi(n+r-2)^{\infty\, n+r-2}r^{\infty r}r^{n-1}}{2^{n+r-1}(n-1)^{\infty\, n-1}(p+r)^r\left(\frac{n+r}{2}-1\right)^{\infty\frac{n+r}{2}-1}\left(\frac{n+r}{2}-1\right)^{\infty\frac{n+r}{2}-1}}.$$

Между тем для $r=\infty$ [ур. (26)]

$$(n+r-2)^{\infty\, n+r-2}=\sqrt{2\pi}\,(n+r-2)^{n+r-\frac{3}{2}}e^{-n-r+2},$$

$$\left(\frac{n+r}{2}-1\right)^{\infty\frac{n+r}{2}-1}=\sqrt{2\pi}\left(\frac{n+r}{2}-1\right)^{\frac{1}{2}(n+r-1)}e^{-\frac{1}{2}(n+r)+1},$$

$$r^{\infty r}=\sqrt{2\pi}\,r^{r+\frac{1}{2}}e^{-r}.$$

---

* Из сопоставления [110a] и (111) следует:

$$X(p,\,n)=\frac{n}{p}X(p,\,n+1),$$

откуда

$$X(p,\,n)=\frac{n(n+1)\ldots(n+r-1)}{p^r}X(p,\,n+r).$$

Подставив сюда $p+r$ вместо p, получим:

$$X'=\frac{(n+r-1)^{\infty r}}{(p+r)^r}X(p+r,\,n+r),$$

то-есть, если учесть, что $(n+r-1)^{\infty r}=\dfrac{1}{(n-1)^{\infty-}}$, равенство [111b].

* Подробное обоснование см. в примечании [21].

327 После чего

$$X' = \frac{\pi\, r^{n+r-1}\, e^{-r}}{(n-1)^{\infty\, n-1}(p+r)^r}$$

и следовательно

$$N = \frac{\pi\, e^p\, r^{n+r-1}}{(n-1)^{\infty\, n-1}(p+r)^{n+r-1}}.$$

Здесь для $r = \infty$ [ур. (9)]

$$\left(1 + \frac{p}{r}\right)^{n+r-1} = e^p.$$

Так находим

$$N = \frac{\pi}{(n-1)^{\infty\, n-1}} \quad [^{22}] \qquad [111d]$$

и наконец для всякого $n > 0$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos(nx - p \operatorname{tang} x) \cos^{n-2} x\, dx = \frac{\pi\, e^{-p}\, p^{n-1}}{(n-1)^{\infty\, n-1}}. \qquad (112)$$

С переменой $\operatorname{tang} x$ на x этот интеграл принимает вид

328 $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{x\sqrt{-1}}\, dx}{(p + x\sqrt{-1})^n} = \frac{2\pi e^{-p}}{(n-1)^{\infty\, n-1}} \; [^{23}], \qquad (113)$$

который дал ему Г. Пуассон с доказательством собственно для целых чисел n (Journal de l'école Polyt. Tom XII, p. 480). Случай $p = n$ рассматривал Лаплас еще прежде, переходя к воображаемым от действительных. Впрочем, этот способ, как замечает сам Лаплас, может служить только руководством в исследованиях и первым средством к открытиям, не представляя должной строгости (Théorie analyt. des probabilités, éd. 1814, p. 134, introd. p. 32).

Уравнение (112) помножив на dp и интегрируя от $p = 0$, получим примечательное выражение

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin nx - \sin(nx - r \operatorname{tang} x)}{\sin x} \cos^{n-1} x\, dx = \pi, \qquad (114)$$

где после интегрирования должно полагать $r = \infty$ и где n не только положительное число, но может быть нулем, потому что

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin(r \operatorname{tang} x)}{\sin x \cos x}\, dx = \int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{x} \sin rx = \pi\,^{*}. \qquad [114a]$$

209 | До сих пор принимали в рассуждение только x^{-n} с показателем n действительным числом, хотя затем уже произвольным. Теперь будем говорить более в обширном предположении, допуская в n даже воображаемый множитель $\sqrt{-1}$.

[V]

Уравнения (11), (12), (13), (14), (15) соединяются в такие три *:

$$\left.\begin{aligned} (x+\alpha)^{-x} &= e^{-x}(x+\alpha)^{x+\alpha+\frac{1}{2}} f(x+\alpha), \\ \log f(x+\alpha) &= \log\psi(\alpha) + \sum_1^{\infty} \log\frac{f(x+\alpha+i-1)}{f(x+\alpha+i)}, \\ 2\log\frac{f(x+\alpha-1)}{f(x+\alpha)} &= \sum_1^{\infty} \frac{i}{(i+2)(i+1)(x+\alpha)^{i+1}}, \end{aligned}\right\} (115)$$

где x целое число, α произвольное, знак суммы относится к целым положительным i; наконец

$$\psi(\alpha) = \frac{e^{-\alpha}\sqrt{2\pi}}{\alpha^{-\alpha}}$$

может быть принимаема за функцию α всякий раз, когда бесконечные строки (115) исчезают, хотя бы x представляло не только целое, но произвольное действительное или воображаемое число. Этот последний случай остается теперь доказывать и при том разумея под x всю действительную, под α всю воображаемую часть.

---

* Здесь у Лобачевского ошибка. В действительности

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin rx}{x}\, dx = \frac{\pi}{2},$$

и, таким образом, формула (114) не верна, если $n = 0$.

* В равенствах (115) нужно писать $f(x, \alpha)$ вместо $f(x+\alpha)$ и соответственно $f(x-1, \alpha)$ вместо $f(x+\alpha-1)$, $f(x+i, \alpha)$ вместо $f(x+\alpha+i)$, $f(x+i-1, \alpha)$ вместо $f(x+\alpha+i-1)$.

Итак, ставя $\alpha\sqrt{-1}$ вместо α, полагаем

330 | $$\sin\theta = \frac{\alpha}{\sqrt{x^2+\alpha^2}}, \quad \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+\alpha^2}}$$

$$L = \sum_1^\infty \frac{i\cos[(i+1)\theta]}{(i+2)(i+1)(x^2+\alpha^2)^{\frac{i+1}{2}}},$$

$$M = L\,\mathrm{tang}\,\theta \sum_1^\infty \frac{i\sin[(i+1)\theta]}{(i+2)(i+1)(x^2+\alpha^2)^{\frac{i+1}{2}}}\,^*.$$

Получим

$$2\log\frac{f(x+\alpha\sqrt{-1}-1)}{f(x+\alpha\sqrt{-1})} = L - M\sqrt{-1},$$

а следовательно, по величине как L, так и M всегда будут менее

$$\sum_1^\infty \frac{i}{(i+2)(i+1)(x^2+\alpha^2)^{\frac{i+1}{2}}}\,^\star.$$

Этого замечания довольно, чтобы принимать $\psi(\alpha)$ за функцию только α, всегда с определенным значением [34]. Таким образом, недостаток в сличении двух выражений

$$(x+\alpha)^{\infty x} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\alpha^{\infty\alpha}}\,e^{-x-\alpha}(x+\alpha)^{x+\alpha+\frac{1}{2}} \qquad (116)$$

331 | исчезает вместе с возрастанием x, будут ли x, α действительные числа или заключать в себе множителя $\sqrt{-1}$. Весьма примечательную здесь функцию $\alpha^{\infty\alpha}$ Лежандр предлагал назвать *гамма*, которое название можно распространить даже на все выражения $x^{\infty n}$, с каким бы то показателем n ни было.

---

* В оригинале

$$L = \cos\theta\sum_1^\infty \frac{i}{(i+2)(i+1)(x^2+\alpha^2)^{\frac{i+1}{2}}}, \quad M = L\,\mathrm{tang}\,\theta.$$

⋆ В оригинале в знаменателе вместо $(x^2+\alpha^2)^{\frac{i+1}{2}}$ напечатано $(x-\alpha)^{i+1}$.

Уравнение (116), как видели прежде, дает $0^{\infty 0}=1$; а потому для произвольных x, n и целых чисел r можем допускать

$$x^{\infty n}=x^{\infty r}(x-r)^{\infty n-r} \qquad [116a]$$

и таким образом определение гаммы пополнять тем самым положением, которое приводит к уравнению (116)*. Сюда поставя $x+\beta$, $\alpha-\beta$ вместо x, α, с произвольными α, β, должны, следовательно, получить

$$(x+\alpha)^{\infty x}\alpha^{\infty\beta}=\frac{\sqrt{2\pi}}{(\alpha-\beta)^{\infty\alpha-\beta}}e^{-x-\alpha}(x+\alpha)^{x+\alpha+\frac{1}{2}}\ \star.$$

После чего

$$\alpha^{\infty\alpha}=\alpha^{\infty\beta}(\alpha-\beta)^{\infty\alpha-\beta},$$

332 |и для другого произвольного γ

$$\alpha^{\infty\alpha}=\alpha^{\infty\gamma}(\alpha-\gamma)^{\infty\beta-\gamma}(\alpha-\beta)^{\infty\alpha-\beta},$$

а потому

$$\alpha^{\infty\beta}=\alpha^{\infty\gamma}(\alpha-\gamma)^{\infty\beta-\gamma}, \qquad (117)$$

какие бы числа α, β, γ ни были, действительные или воображаемые.

Пусть в α заключается ρ действительная часть и $\alpha-\rho$ воображаемая с $\sqrt{-1}$. Интегрирование по частям дает

$$\int e^{-x}x^{\alpha}\,dx=\frac{1}{\alpha+1}e^{-x}x^{\alpha+1}+\frac{1}{\alpha+1}\int e^{-x}x^{\alpha+1}\,dx.$$

Для всякого, следовательно, целого положительного r, как скоро $\rho+1>0$,

$$\int\limits_0^{\infty}e^{-x}x^{\alpha}\,dx=\alpha^{\infty-r}\int\limits_0^{\infty}e^{-x}x^{\alpha+r}\,dx \qquad [117a]$$

---

* Неясно, о каком дополнении определения идет речь. Равенство [116a] и следующее далее равенство (117) следуют из свойства (42).

Действительно,

$$x^{\infty n}=\frac{x^{\infty x}}{(x-n)^{\infty x-n}};\quad x^{\infty r}=\frac{x^{\infty x}}{(x-r)^{\infty x-r}};\quad (x-r)^{\infty n-r}=\frac{(x-r)^{\infty x-r}}{(x-n)^{\infty x-n}},$$

откуда $x^{\infty n}=x^{\infty r}(x-r)^{\infty n-r}$, причем r совсем не обязательно целое.

$\star$ В правой части этого равенства, а также в правой части (116) следует приписать множитель $X(x+\alpha)$; иначе эти равенства — только асимптотические.

или [урав. (116)]

333 | $$\int_0^\infty e^{-x} x^\alpha\, dx = \frac{\alpha^{\infty\alpha}}{\sqrt{2\pi}} (r+\alpha)^{-r-\alpha-\frac{1}{2}} e^{r+\alpha} \int_0^\infty e^{-x} x^{r+\alpha}\, dx;$$

с возрастанием r границы второго интеграла сближаются к самому большому значению, которое приобретает елемент вместе с тем, как будет удовлетворено требованию

$$e^{-x} x^{r+\rho-1}(r+\rho-x) = 0\,^*.$$

Откуда в праве заключить, что воображаемая часть интеграла уничтожается для $r=\infty$, тогда как в действительной можно довольствоваться значением

$$x = r + \rho + t\,^\star$$

с числом t действительным и весьма малым; а следовательно

$$\int_0^\infty e^{-x} x^\alpha\, dx = \frac{\alpha^{\infty\alpha}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t}^{+t} e^{-t} \left(1+\frac{t}{r}\right)^r \frac{dt}{\sqrt{r}}\,.$$

Мы видели выше, что для весьма большого r

334 | $$\left(1+\frac{t}{r}\right)^r = e^{t-\frac{t^2}{2r}}.$$

После чего с переменой t на $x\sqrt{r}$ получим [25]

$$\int_0^\infty e^{-x} x^\alpha\, dx = \alpha^{\infty\alpha} \tag{118}$$

для всякого α, лишь бы в нем действительная часть была >-1.

Рассматриваем интеграл

$$\int \sin^{2n+1} x \cos^{2m+1} x\, dx =$$

$$= \frac{1}{2n+2} \sin^{2n+2} x \cos^{2m} x + \frac{m}{n+1} \int \sin^{2n+2} x \cos^{2m-1} x\, dx\,^{\oslash};$$

---

* Если $\alpha = \rho + i\tau$, где $i = \sqrt{-1}$, то $|e^{-x} x^{r+\alpha}| = e^{-x} x^{r+\rho}$. Левая часть равенства является производной этого выражения. В оригинале равенство имеет вид:

$$e^{-x} x^{r+\alpha}(r+\alpha-x) = 0. \; ●$$

⋆ В оригинале: $x = \alpha + \rho + t$.

⊘ Правая часть этого равенства в оригинале имеет вид

$$\frac{1}{2n+1} \sin^2 x \cos^{2m} x + \frac{m}{n+1} \int \sin^{2m+3} x \cos^{2m-1} x\, dx.$$

как скоро здесь в $n+1$ действительная часть >0, то для всякого целого положительного r находим, продолжив интегрирование по частям,

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2n+1} x \cos^{2m+1} x \, dx = n^{\infty - r} m^{\infty r} \int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2n+2r+1} x \cos^{2m-2r+1} x \, dx,$$

226 покуда действительная часть в $m-r+1$ более нуля. Ставя сюда $m+r$ вместо m, получим

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2n+1} x \cos^{2m+2r+1} x \, dx = \frac{n^{\infty - r}}{m^{\infty - r}} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+2r+1} x \cos^{2m+1} x \, dx \qquad [118a]$$

всякий раз, когда действительная часть в $n+1$, $m+1$ превышает нуль. Поставя $r=\infty$, можем довольствоваться в первом интеграле весьма близкими значениями к $x=0$, во втором — к $x=\frac{1}{2}\pi$, а следовательно

$$\int\limits_0 e^{-rx^2} x^{2n+1} \, dx = \frac{n^{\infty - r}}{m^{\infty - r}} \int\limits_0 e^{-rx^2} x^{2m+1} \, dx. \qquad [118b]$$

Откуда для всякого числа n, когда в $n+1$ действительная часть >0,

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-x} x^n \, dx = A r^{\infty r} n^{\infty - r} r^n. \qquad [118c]$$

Здесь $A=1$ для $n=0$, а следовательно, вообще [ур. (118)]

227 $$n^{\infty n} = r^{\infty r} n^{\infty - r} r^n \qquad (119)$$

— то же уравнение, какое было выше (54), но теперь уже доказанное без всякого ограничения для всех как действительных, так и воображаемых чисел n [26].

С условием, чтобы в $n+1$, $m+1$ действительная часть была положительной, интегрирование по частям дает

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2n+1} x \cos^{2m+1} x \, dx = \frac{m+n+2}{m+1} \int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2n+1} x \cos^{2m+3} x \, dx$$

и следовательно для всякого целого положительного r

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2n+1}x\cos^{2m+1}x\,dx = \frac{m^{\infty-r}}{(m+n+1)^{\infty-r}}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^{2n+1}x\cos^{2m+2r+1}x\,dx^{*}.$$

По примеру выше для $r=\infty$, вставляя

337 $$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2n+1}x\cos^{2m+2r+1}x\,dx = \frac{1}{2}r^{-n-1}\int_0^{\infty}e^{-x}x^n\,dx$$

и принимая в помощь уравнение (119), получим

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2n+1}x\cos^{2m+1}x\,dx = \frac{n^{\infty n}m^{\infty m}}{2(n+m+1)^{\infty n+m+1}} \qquad (120)$$

— то же уравнение, какое было выше (50), но здесь уже n, m могут быть воображаемые числа.

Например для $2n+1=a+b\sqrt{-1}$, $2m+1=0$, с a, b действительными числами находим после всех приведений

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^a x\,\{\cos(b\log\sin x)+\sqrt{-1}\sin(b\log\sin x)\}\,dx =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2\left(\frac{a+b\sqrt{-1}}{2}\right)^{\infty\frac{1}{2}}} \text{ [27]}$$

или в другом виде

338 $$\int_0^{\infty}\frac{e^{-ay}\,dy\,(\cos by-\sqrt{-1}\sin by)}{\sqrt{1-e^{-y}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\left(\frac{a-1+b\sqrt{-1}}{2}\right)^{\infty\frac{1}{2}}}^{*}. \quad (121)$$

---

* В оригинале в множителе перед интегралом в правой части переставлены числитель и знаменатель.

* В оригинале формула (121) имеет следующий вид:

$$\int_0^{\infty}\frac{e^{-ay}\,dy\,(\cos by+\sqrt{-1}\sin by)}{\sqrt{1-e^{-y}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2(a-1+b\sqrt{-1})^{\infty\frac{1}{2}}}.$$

Равенство (121) получается из предыдущего подстановкой $\log\sin x=-y$ и заменой a на $a-1$.

Для $b=0$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^a x\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\left(\frac{1}{2}a\right)^{\infty -\frac{1}{2}}}. \tag{122}$$

Уравнение (119) будучи помножено на такое же с переменой n на $-n$, дает

$$n^{\infty n}(-n)^{\infty -n} = r^{\infty r} r^{\infty r} n^{\infty -r}(-n^{\infty})^{-r}.$$

Это значит

$$\frac{1}{n^{\infty n}(-n)^{\infty -n}} = (1-n^2)\left(1-\frac{n^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{n^2}{3^2}\right)\ldots$$

Итак для n действительного

$$(n\sqrt{-1})^{\infty n\sqrt{-1}}(-n\sqrt{-1})^{\infty -n\sqrt{-1}} = \frac{2n\pi}{e^{n\pi}-e^{-n\pi}}. \tag{123}$$

339 [Если же в уравнении (119) вместо n ставим $a+b\sqrt{-1}$ и переменяя знаки перед a и b, после перемножим, то находим:

$$-\log\{(a+b\sqrt{-1})^{\infty a+b\sqrt{-1}}(a-b\sqrt{-1})^{\infty a-b\sqrt{-1}}\times$$
$$\times(-a+b\sqrt{-1})^{\infty -a+b\sqrt{-1}}(-a-b\sqrt{-1})^{\infty -a-b\sqrt{-1}}\} =$$
$$= \sum_1^\infty \log\left[\left(1+\frac{a}{i}\right)^2+\frac{b^2}{i^2}\right] + \sum_1^\infty \log\left[\left(1-\frac{a}{i}\right)^2+\frac{b^2}{i^2}\right].$$

Это значит

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x-y-z-u}\left(\frac{xy}{zu}\right)^a\left(\frac{xz}{yu}\right)^{b\sqrt{-1}} dx\,dy\,dz\,du =$$
$$= \frac{4\pi^2(a^2+b^2)}{e^{2b\pi}+e^{-2b\pi}-2\cos 2a\pi} \text{ [28]}. \tag{124}$$

Берем наконец интеграл

$$\int_0^\pi e^{ix}\sin^n x\,dx = \frac{(n+2)^2+i^2}{(n+2)(n+1)}\int_0^\pi e^{ix}\sin^{n+2} x\,dx$$

340 [с произвольными числами i, n, лишь бы действительная часть в $n+1$ была >0. Продолжая интегрировать по частям, находим для целого положительного r

$$\int_0^\pi e^{ix}\sin^n x\,dx = \frac{2^{2r} n^{\infty -2r}}{\left(\frac{n+i\sqrt{-1}}{2}\right)^{\infty -r}\left(\frac{n-i\sqrt{-1}}{2}\right)^{\infty -r}}\int_0^\pi e^{ix}\sin^{n+2r} x\,dx.$$

Для $r=\infty$ получим

$$\int_0^\pi e^{ix}\sin^{n+2r}x\,dx=2e^{\frac{1}{2}i\pi}\int_0^\infty e^{-rx^2}\,dx=e^{\frac{1}{2}i\pi}\sqrt{\frac{\pi}{r}}\quad [29].$$

Что вставляя, находим

$$\int_0^\pi e^{ix}\sin^n x\,dx=\frac{2^{2r}n^{\infty-2r}e^{\frac{1}{2}i\pi}\sqrt{\pi}}{\sqrt{r}\left(\frac{n+i\sqrt{-1}}{2}\right)^{\infty-r}\left(\frac{n-i\sqrt{-1}}{2}\right)^{\infty-r}},$$

а принимая в помощь уравнение (119),

341 $$\int_0^\pi e^{ix}\sin^n x\,dx=\frac{\pi n^{\infty n}e^{\frac{1}{2}i\pi}}{2^n\left(\frac{n+i\sqrt{-1}}{2}\right)^{\infty\frac{n+i\sqrt{-1}}{2}}\left(\frac{n-i\sqrt{-1}}{2}\right)^{\infty\frac{n-i\sqrt{-1}}{2}}}\text{*}. \quad (125)$$

Отсюда нетрудно заключить, что

$$\int_0^\infty e^{ix}\sin^n x\,dx=$$

$$=\frac{2^{-n}\pi n^{\infty n}e^{\frac{1}{2}i\pi}}{\left(\frac{n+i\sqrt{-1}}{2}\right)^{\infty\frac{n+i\sqrt{-1}}{2}}\left(\frac{n-i\sqrt{-1}}{2}\right)^{\infty\frac{n-i\sqrt{-1}}{2}}\{1-(-1)^n e^{i\pi}\}}\text{*}\ [30]. \quad (126)$$

Интегралы (125), (126) относятся к произвольным числам i, n под условием, чтобы в $n+1$ действительная часть была положитель-

---

* Это равенство получается из предыдущего, если выразить $n^{\infty-2r}$, $\left(\frac{n+i\sqrt{-1}}{2}\right)^{\infty-r}$ и $\left(\frac{n-i\sqrt{-1}}{2}\right)^{\infty-r}$ по формуле (119) и воспользоваться асимптотическими формулами

$$r^{\infty r}\approx\sqrt{2\pi}\,e^{-r}r^{r+\frac{1}{2}},\quad (2r)^{\infty 2r}\approx\sqrt{2\pi}\,e^{-2r}(2r)^{2r+\frac{1}{2}}.$$

* В оригинале множитель $\{1-(-1)^n e^{i\pi}\}$ стоит не в знаменателе, а в числителе.

ной. Первому можно дать еще другой вид:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (e^{2ix}+e^{-2ix})\cos^{2n} x\, dx =$$

$$= \frac{\pi (2n)^{\infty 2n}}{2^{2n}(n+i\sqrt{-1})^{\infty n+i\sqrt{-1}}(n-i\sqrt{-1})^{\infty n-i\sqrt{-1}}}\text{*}. \tag{127}$$

342 Вставляя сюда значение (98) для $\cos^{2n} x$, находим

$$\frac{2\pi\, n^{\infty n} n^{\infty n}}{i(e^{i\pi}-e^{-i\pi})(n+i\sqrt{-1})^{\infty n+i\sqrt{-1}}(n-i\sqrt{-1})^{\infty n-i\sqrt{-1}}} =$$

$$= \frac{1}{i^2} + 2\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{\lambda} n^{\infty\lambda} n^{-\lambda}}{i^2+\lambda^2}, \tag{128}$$

где знак суммы относится к целым числам λ. С переменой i на $i\sqrt{-1}$ получим

$$\frac{\pi n^{\infty n} n^{\infty n}}{i \sin i\pi\, (n+i)^{\infty n+i}(n-i)^{\infty n-i}} = \frac{1}{i^2} - 2\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{\lambda} n^{\infty\lambda} n^{\infty-\lambda}}{\lambda^2-i^2}. \tag{129}$$

---

* (127) легко получить из (125), если учесть, что

$$\int_0^{\pi} e^{2ix}\sin^{2n} x\, dx = e^{i\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-2ix}\cos^{2n} x\, dx = e^{i\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{2ix}+e^{-2ix})\cos^{2n} x\, dx.$$

В оригинале в знаменателе правой части (127) отсутствует множитель 2^{2n}.

METEOROLOGISCHE BEOBACHTUNGEN

AUS DEM LEHRBEZIRK DER KAISERLICH RUSSISCHEN

UNIVERSITAET KASAN.

AUF KOSTEN DER UNIVERSITAET HERAUSGEGEBEN

VON

ERNEST KNORR,

Dr. der Philos. K. R. Collegien-Rath, Prof. ord. der Physik und physik. Geographie bey der Univ. Kasan.

HEFT I.

1835 — 1836.

KASAN,

IN DER UNIVERSITAETS-BUCHDRUCKEREY,

1841.

Титульный лист «Метеорологических наблюдений учебного округа Казанского университета»; тетрадь I, в которой было напечатано сочинение «О сходимости бесконечных рядов».

К стр. 163.

UEBER DIE CONVERGENZ DER UNENDLICHEN REIHEN,

von *NICOL. LOBATSCHEWSKY,*

PROF. ORD. DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITAET KASAN.

Jede unendliche Reihe kann dargestellt werden durch das Zeichen

$$\sum_{i=1}^{\infty} f(i)$$

wo sich die angedeutete Summation auf alle ganzen positiven Werthe von i bezieht, von $i=1$ an, während $f(i)$ irgend eine bestimmte Function von i bezeichnet. Nehmen die Werthe der Function $f(i)$ mit wachsendem i dergestalt ab, dass ihre Summe sich um so mehr einer bestimmten Grenze S nähert, je grösser die Anzahl derselben ist, so wird die Reihe convergirend genannt, den Werth S der Reihe kann man alsdann mit beliebiger Genauigkeit bestimmen, indem man als letzten Werth von i eine Zahl r nimmt, die so gross ist, dass man die Summe aller Glieder jenseits $f(i)$ vernachlässigen kann. Alle Reihen denen diese Eigenschaft nicht zukommt, können nicht zu Berechnungen dienen, und stellen keine bestimmte Zahl dar.

Das characteristische Merkmal einer convergenten unendlichen Reihe besteht demnach darinn, dass die Summe aller Glieder von $i=r+1$ bis $i=p$ mit wachsendem r fortwährend abnimt, wie gross auch p gedacht werde; setzt man $p=\infty$, so soll diese Summe der *Rest der Reihe* jenseits des Gliedes $f(r)$ genannt werden. Ein solcher Rest kann wieder als eine unendliche Reihe betrachtet, und durch

$$R=\sum_{i=r+1}^{\infty} f(i) \qquad (1)$$

dargestellt werden.

Es sey z. B. $f(i)=x^i$ so hat man

$$\frac{1}{1-x}=1+\sum_{i=1}^{r} x^i+\frac{x^{r+1}}{1-x}$$

Первая страница оригинального издания сочинения «О сходимости бесконечных рядов» (1-я стр. приложения к «Метеорологическим наблюдениям учебного округа Казанского университета», тетрадь I, 1841 г.).

О СХОДИМОСТИ БЕСКОНЕЧНЫХ РЯДОВ

Перевод с немецкого В. В. Степанова

[I]

Каждый бесконечный ряд может быть представлен при помощи обозначения

$$\sum_{i=1}^{\infty} f(i),$$

где показанное суммирование относится ко всем целым положительным значениям i, начиная с $i=1$, тогда как $f(i)$ обозначает какую-нибудь определенную функцию от i. Если значения функции $f(i)$ убывают при возрастании i таким образом, что их сумма тем более приближается к некоторому определенному пределу S, чем больше их число, то ряд называется сходящимся; тогда можно определить значение ряда S с любой точностью, если брать в качестве последнего значения i число r столь большое, что можно пренебречь суммой всех членов после $f(i)$. Все ряды, не обладающие этим свойством, не могут служить для вычислений и не представляют определенного числа.

Таким образом, характеристический признак сходящегося ряда состоит в том, что сумма всех членов от $i=r+1$ до $i=p$ все больше убывает при возрастании r, как бы велико ни было p; если положить $p=\infty$, то эта сумма называется *остатком ряда* после члена $f(r)$. Такой остаток опять может быть рассматриваем как бесконечный ряд и представлен выражением

$$R=\sum_{i=r+1}^{\infty} f(i). \qquad (1)$$

Пусть, например, $f(i)=x^i$; тогда

$$\frac{1}{1-x}=1+\sum_{i=1}^{r} x^i+\frac{x^{r+1}}{1-x}.$$

Далее, мы имеем для каждого действительного значения $x<1$ *:

$$\frac{x}{1-x}=\sum_{i=1}^{\infty}x^i.$$

Остаток этого ряда после члена $i=r$ есть

$$R=\frac{x^{r+1}}{1-x};$$

он убывает при возрастании r и имеет пределом нуль.

Вообще, если $f(i)$ принимает положительные значения для всех $i>r$ и, кроме того, убывает с возрастанием i, то для таких членов ряда имеем:

$$f(i)=f(r)\sum_{\lambda=1}^{\infty}l\,2^{-\lambda},$$

где l хотя и зависит от λ, мыслится таким образом, что для каждого λ оно равно 0 или 1.

Уравнение (1) дает в этом случае для остатка ряда после члена $f(r)$

$$R=f(r)\sum_{\lambda=1}^{\infty}L\,2^{-\lambda},$$

где целое положительное число L зависит от λ.

Если теперь определить величину μ так, что она не меньше значения, получающегося из уравнения *

$$f(\mu)=f(r)\,2^{-\lambda}, \tag{2}$$

то отсюда следует, что при разложении $f(i)$ по убывающим степеням числа 2 член $2^{-\lambda}$ в остатке R может войти только со множителем L, который не больше чем $\mu-r$. Поэтому равенство (1) дает всегда

$$R<f(r)\sum_{\lambda=1}^{\infty}(\mu-r)\,2^{-\lambda}, \tag{3}$$

где величина μ должна быть определена из уравнения (2) или по

* $-1<x<1$.

* Функция $f(i)$ определена, по сути дела, только для целочисленных значений аргумента, и поэтому с помощью равенства (2), вообще говоря, нельзя определить μ как функцию от λ. Вместо равенства (2) следует писать неравенства:

$$f(\mu)\geqslant f(r)\,2^{-\lambda},\quad f(\mu+1)<f(r)\,2^{-\lambda},$$

как это Лобачевский и делал в предыдущих сочинениях (см. стр. 37 и 88 наст. тома).

крайней мере должна быть не меньше, чем получаемое из этого уравнения значение μ, и где μ должно быть выражено как функция λ.

В качестве примера рассмотрим опять ряд

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} x^i.$$

Уравнение (2) дает:

$$x^\mu = x^r\, 2^{-\lambda},$$

откуда следует:

$$\mu - r = \frac{\lambda \log 2}{\log\left(\frac{1}{x}\right)};$$

следовательно, в силу (3)

$$R < x^r \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\lambda\, 2^{-\lambda} \log 2}{\log\left(\frac{1}{x}\right)}.$$

Суммирование дает:

$$R < \frac{2 \log 2}{\log\left(\frac{1}{x}\right)}\, x^r.$$

Сравнивая с точным выражением для R, мы получаем для положительных значений $x < 1$:

$$x \log\left(\frac{1}{x}\right) < (1 - x)\, 2 \log 2.$$

Если сюда подставить $ax < 1$ на место x, то получится:

$$x \log\left(\frac{1}{x}\right) < \left(\frac{1}{a} - x\right) 2 \log 2 + x \log a\, {}^*.$$

Принимая здесь a произвольным, можно всегда мыслить x настолько уменьшившимся, что в конце концов получим:

$$x \log\left(\frac{1}{x}\right) < \frac{2 \log 2}{a}.$$

Отсюда следует для $x = 0$ в качестве границы приближения:

$$x \log\left(\frac{1}{x}\right) = 0\, [31].$$

* В оригинале вместо множителя $\left(\frac{1}{a} - x\right)$ стоит $\frac{1 - x}{a}$.

[II]

Для краткости в дальнейшем мы будем под символом

$$n^{\infty i}$$

понимать произведение

$$n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-i+1), \qquad [3a]$$

содержащее i множителей, которые начинаются с n и следуют друг за другом, уменьшаясь на единицу. Если такое произведение разделено на подобное же, в котором $n=i$, то это будет записываться так:

$$n_0^{\infty i},$$

и, кроме того,

$$n^{\infty 0}=1, \quad n_0^{\infty 0}=1, \quad n_0^0=1,$$

и для всякого положительного значения i полагаем:

$$(-i)^{\infty -i}=\infty\,^*. \qquad [3b]$$

---

* *Примеч.* Чтобы облегчить рассмотрение некоторых последующих приведений, мы добавим здесь некоторые предложения, относящиеся к применению знака $x^{\infty n}$. Если p и m — целые положительные числа и $p>m$, то легко получается:

$$n^{\infty p}=n^{\infty m}(n-m)^{\infty(p-m)}, \qquad \text{I}$$

$$(n+m)^{\infty(p+m)}=(n+m)^{\infty m}\cdot n^{\infty p}; \qquad \text{II}$$

Если полагать уравнение I справедливым и в случае отрицательного m и если подставить $-m$ на место m, то получается:

$$n^{\infty(-m)}=\frac{1}{(n+m)^{\infty m}}. \qquad \text{III}$$

Далее,

$$(-n)^{\infty m}=(-1)^m(n+m-1)^{\infty m}, \qquad \text{IV}$$

откуда

$$(-n)^{\infty(-m)}=(-1)^m\cdot\frac{1}{(n-1)^{\infty m}}. \qquad \text{V}$$

Далее

$$n_0^{\infty r}=\frac{n^{\infty r}}{r^{\infty r}}=\frac{n^{\infty n-r}}{(n-r)^{\infty n-r}}, \qquad \text{VI}$$

$$n_0^{\infty r}+n_0^{\infty r-1}=n_0^{\infty r-1}\left\{\frac{n-r+1}{r}+1\right\}=\frac{n+1}{r}\,\frac{n^{\infty r-1}}{(r-1)^{\infty r-1}}=(n+1)_0^{\infty r} \qquad \text{VII}$$

и если $r=\infty$ или по крайней мере означает весьма большое число,

$$n^{\infty n}=\frac{r^{\infty r}}{(n+r)^{\infty r}}\cdot r^n \quad [32]. \qquad \text{VIII}$$

[*Примечание Лобачевского.*]

Наконец, обозначение

$$x_c^i$$

для всякого целого положительного значения i равнозначно выражению

$$\frac{x^i}{i^{\cdot\infty i\cdot}}.$$

Предпослав это, переходим к рассмотрению ряда, который получается из разложения показательной функции. Он таков:

$$S = \sum_{i=0}^{\infty} x_c^i. \tag{4}$$

Для положительных значений x в силу (2) значение μ получается из уравнения

$$x_c^\mu = x_c^r 2^{-\lambda},$$

откуда следует:

$$(\mu - r)\log x = \log(\mu^{\infty\mu - r}) - \lambda \log 2;$$

следовательно,

$$(\mu - r)\log x > (\mu - r)\log(r+1) - \lambda \log 2$$

и, наконец,

$$\mu - r < \frac{\lambda \log 2}{\log\left(\frac{r+1}{x}\right)}.$$

Отсюда получается для остатка ряда (4) после члена $i = r$:

$$R < \frac{2\log 2}{\log\left(\frac{r+1}{x}\right)} x_c^r.$$

Теперь, если r так велико, что $r+1 > x$, то при дальнейшем увеличении r остаток R убывает до нуля; следовательно, ряд (4) сходится для всякого положительного x, тем более для отрицательных значений x. Если бы мы пожелали рассмотреть этот последний случай отдельно, то мы должны были бы положить

$$S = \sum_{i=0}^{\infty} x_c^{2i}\left(1 - \frac{x}{2i+1}\right)$$

и определить μ по (2) из уравнения

$$x_c^{2\mu}\left(1 - \frac{x}{2\mu+1}\right) = x_c^{2r}\left(1 - \frac{x}{2r+1}\right)2^{-\lambda\,*};$$

---

* Здесь $0 < x < 2r+1$.

но из него следует:

$$(2\mu-2r)\log x=\log[(2\mu)^{\infty 2\mu-2r}]-\lambda\log 2+\log\frac{1-\frac{x}{2r+1}}{1-\frac{x}{2\mu+1}}.$$

Отсюда мы имеем:

$$(2\mu-2r)\log\frac{2r+1}{x}<\lambda\log 2-\log\left(1-\frac{x}{2r+1}\right);$$

следовательно,

$$\mu-r<\frac{\lambda\log 2}{2\log\frac{2r+1}{x}}-\frac{\log\left(1-\frac{x}{2r+1}\right)}{2\log\frac{2r+1}{x}}$$

и, наконец (по № 3),

$$R<\left(1-\frac{x}{2r+1}\right)\frac{\log\left(2\sqrt{1-\frac{x}{2r+1}}\right)}{\log\left(\frac{2r+1}{x}\right)}x_c^{2r}.$$

Если мы будем продолжать увеличивать r после того, как уже $2r+1>x$, то мы можем сделать R сколь угодно малым.

Следовательно, ряду (4) при всех действительных x, а также, как легко видеть, и при всех мнимых принадлежит определенное значение, которое мы обозначим через $f(x)$.

Следовательно, если x и y обозначают две любые величины, можно положить

$$f(x)=\sum_{i=0}^{r}x_c^i+R,$$

$$f(y)=\sum_{i=0}^{r}y_c^i+R',$$

где R и R' обозначают две величины, которые можно сделать сколь угодно малыми, увеличивая r. Произведение этих рядов дает:

$$f(x)f(y)=\sum_{p=0}^{2r}\sum_{i=0}^{p}x_c^i y_c^{p-i}+P^*,$$

* Нетрудно найти это выражение, если рассматривать произведение обоих рядов, но его также легко получить, если заменить ряды суммами, ибо, например,

$$\sum_{i=0}^{r}x_0^i\sum_{\lambda=0}^{r}y_c^\lambda=\sum_{\lambda=0}^{r}\sum_{i=0}^{r}x_c^i y_c^\lambda=\sum_{p=\alpha}^{r+\alpha}\sum_{i=0}^{r}x_c^i y_c^{p-\alpha},$$

где α для всякого i произвольно; следовательно, можно также положить $\alpha=i$, от-

где

$$P = R\sum_{i=0}^{r} y_0^i + R'\sum_{i=0}^{r} x_0^i + RR',$$

если здесь сначала отброшены все члены, относящиеся к пополнению двойной суммы, в которой мы можем положить

$$\sum_{i=0}^{p} x_0^i\, y_0^{p-i} = (x+y)_0^p;$$

следовательно, мы имеем также

$$f(x)f(y) = \sum_{i=0}^{2r} (x+y)_0^i + P.$$

Но так как P состоит из произведений, в которые входят целиком или частично множители R и R', то, увеличивая r, можно сделать также и P произвольно малым; следовательно,

$$f(x)f(y) = f(x+y).$$

Предшествующее служит для определения степеней с действительными показателями, тогда как ряд (4) распространяется на действительные и мнимые показатели. С основанием непёровых логарифмов e этот ряд дает:

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\sin x.$$

куда получаем:

$$\sum_{i=0}^{r} x_0^i \sum_{\lambda=0}^{r} y_0^\lambda = \sum_{i=0}^{r}\sum_{p=i}^{r+i} x_0^i\, y_0^{p-i} = \sum_{i=0}^{r}\sum_{p=0}^{r+i} x_0^i\, y_0^{p-i} =$$

$$= \sum_{p=0}^{2r}\sum_{i=0}^{r} x_0^i\, y_0^{p-i} - \sum_{i=0}^{r-1}\sum_{p=r+i+1}^{2r} x_0^i\, y_0^{p-i} =$$

$$= \sum_{p=0}^{2r}\sum_{i=0}^{2r} x_0^i\, y_0^{p-i} - \sum_{i=0}^{r-1}\sum_{p=r+i+1}^{2r} x_0^i\, y_0^{p-i} - \sum_{p=0}^{2r}\sum_{i=r+1}^{2r} x_0^i\, y_0^{p-i} =$$

$$= \sum_{p=0}^{2r}\sum_{i=0}^{p} x_0^i\, y_0^{p-i} - \sum_{i=0}^{r-1}\sum_{p=r+i+1}^{2r} x_0^i y_0^{p-i} - \sum_{p=0}^{2r}\sum_{i=r+1}^{2r} x_0^i\, y_0^{p-i}.$$

Отсюда сразу видно, какие члены из RR' нужно взять для пополнения. [Примечание Лобачевского. В оригинале некоторые из стоящих рядом знаков $\sum$ переставлены местами. В преобразованиях Лобачевский использует равенство $(-n)^{\infty-n}=0$ (если $n>0$ и целое), из которого следует, что $y_0^{\infty-n}=0$].

Таким образом, тригонометрические функции могут быть введены в анализ независимо от геометрических рассмотрений, как я это показал в алгебре, изданной мною в 1832 г. *.

Теперь мы перейдем к рассмотрению ряда

$$S = \sum_{i=0}^{\infty} n_c^{\infty i} x^i. \tag{5}$$

Чтобы здесь найти границу, которую не превосходит остаток ряда, надо сначала рассматривать все члены ряда как положительные числа. Тогда уравнение (2) дает:

$$n_c^{\infty \mu} x^\mu = n_c^{\infty r} x^r 2^{-\lambda},$$

откуда следует:

$$\frac{(\mu - n - 1)^{\infty \mu - r}}{\mu^{\infty \mu - r}} 2^\lambda = \left(\frac{1}{x}\right)^{\mu - r} \star.$$

При $n+1 \geqq 0$ коэффициент при 2^λ состоит из множителей вида

$$1 - \frac{n+1}{i},$$

где i надо полагать равным всем целым числам от $r+1$ до μ; поэтому мы имеем $^{\Phi}$:

$$\mu - r \leqq \frac{\lambda \log 2}{\log\left(\frac{1}{x}\right)},$$

откуда

$$R < \frac{2 \log 2}{\log\left(\frac{1}{x}\right)} n_c^{\infty r} x^r.$$

Здесь наибольший множитель в $n_c^{\infty r}$ есть

$$1 - \frac{n+1}{r} \text{ ♀};$$

* См. сочинение «Алгебра или вычисление конечных», т. IV наст. издания, стр. 230. Это сочинение вышло в свет в 1834 г.; указывая 1832 г., Лобачевский имеет в виду год утверждения цензурой (см. т. IV, стр. 9).

★ В обеих частях этого и предыдущего равенств подразумевается знак абсолютной величины.

$^{\Phi}$ При достаточно большом r.

♀ $n_c^{\infty r} = \frac{n-r+1}{r} \cdot \frac{n-r+2}{r-1} \cdots \frac{n}{1} = (-1)^r \left(1 - \frac{n+1}{r}\right)\left(1 - \frac{n+1}{r-1}\right) \cdots \left(1 - \frac{n+1}{1}\right)$.

следовательно, $n_c^{\omega r}$ убывает при возрастании r, если $r > n+1$, тогда как абсолютное значение величины

$$\frac{x^r}{\log\left(\frac{1}{x}\right)}$$

при $x < 1$ может быть сделано произвольно малым.

Если в случае $n+1 < 0$ положим

$$\omega = 1 - \frac{n+1}{r},$$

то необходимо только взять r достаточно большим, чтобы по абсолютной величине было $\omega x < 1$; тогда мы имеем:

$$\mu - r < \frac{\lambda \log 2}{\log\left(\frac{1}{\omega x}\right)},$$

$$R < \frac{2\log 2}{\log\left(\frac{1}{\omega x}\right)} n_c^{\omega r} x^r.$$

Хотя здесь $n_c^{\omega r}$ возрастает одновременно с r, все же оказывается, если подставить $r+t$ на место r, если только $\omega x < 1$:

$$R < \frac{2\log 2}{\log\left(\frac{1}{\omega x}\right)} n_c^{\omega r} x^r (\omega x)^t \,*,$$

а эта последняя величина при возрастании t убывает до нуля. Следовательно, ряд (5) сходится для всех действительных значений n, а также для всякого x или для $x\sqrt{-1}$ вместо x, если только по величине $x < 1$.

Для целых положительных значений n легко показать, что

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{\infty} n_c^{\omega i} x^i$$

и что, следовательно, произведение двух таких сумм для двух положительных чисел n и m должно дать:

$$\sum_{i=0}^{\infty} (n+m)_c^{\omega i} x^i = \sum_{i=0}^{\infty} x^i \sum_{\lambda=0}^{i} n_c^{\omega \lambda} m_c^{\omega i-\lambda},$$

* Чтобы в этом убедиться, достаточно учесть, что

$$n_c^{\omega r+t} = n_c^{\omega r} \frac{(n-r)(n-r-1)\ldots(n-r-t+1)}{(r+1)(r+2)\ldots(r+t)},$$

и применить преобразование, подобное указанному в предыдущей сноске.

откуда следует:

$$(n+m)_c^{\infty i}=\sum_{\lambda=0}^{i} n_c^{\infty\lambda} m_c^{\infty i-\lambda}. \tag{6}$$

Для того чтобы это уравнение, в котором i — наивысший показатель чисел n и m, было справедливо для любых целых положительных чисел, оно должно быть верным вообще для всех значений n и m*.

Если поэтому обозначить значение ряда (5) через $f(n)$, то мы будем иметь вообще для всех значений n и m:

$$f(n)f(m)=f(n+m). \tag{7}$$

Ряд (5) служит для обобщения при определении степеней, если подставить $x\sqrt{-1}$ на место x; но этот случай в соответствии с уравнением (7) должно всегда предварительно свести к случаю, где входит степень $1+x\sqrt{-1}$, и по абсолютной величине $x<1$.

Например,

$$(-1)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{-1},$$

$$(-1)^{\frac{1}{4}}=\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}},$$

$$(-1)^{\frac{1}{8}}=\left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{1+(-1+\sqrt{2})\sqrt{-1}\right\}; \qquad [7a]$$

следовательно, по уравнению (7) для всех действительных значений n

$$1^n=\left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right)^{8n}\left\{1+(-1+\sqrt{2})\sqrt{-1}\right\}^{16n}$$

и, наконец, полагая $-1+\sqrt{2}=\omega$,

$$1^n=\left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right)^{8n}\sum_{i=0}^{\infty}(16n)_c^{\infty i}(\omega\sqrt{-1})^i. \qquad [7b]$$

Если подставить сюда $\frac{1}{n}$ на место n, ввести величину t из условия $nt=16$ и понимать под $n>2$ целое простое число*, то

* Если два многочлена равны при любых целых значениях аргументов, то они тождественны.

* Для дальнейшего нужно только, чтобы 16 не делилось на n.

найдем мнимый корень

$$\sqrt[n]{1} = \left(L + M\sqrt{-1}\right)\left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right)^{\frac{t}{2}} {}^{*}, \qquad [7c]$$

где L и M могут быть вычислены с помощью рядов

$$L = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i\, t_c^{\infty\, 2i} \omega^{2i},$$
$$M = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i\, t_c^{\infty\, 2i+1} \omega^{2i+1}.$$

Остается только показать, что M не обращается в нуль, если только t — не целое число и не больше $5\frac{1}{3}$ ⋆. В ряде для M два последовательных члена объединяются в следующее выражение:

$$(-1)^i\, t^{\infty\, 2i+1} \omega_c^{2i+3} \{ (2i+2)(2i+3)(3+2\sqrt{2}) +$$
$$+ (4i+3)\,t - t^2 - (2i+1)(2i+2) \}^{⊘}. \qquad [7d]$$

Это выражение не меняет своего алгебраического знака с возрастанием i, как только $2i > t$. Если в этом выражении положить $i = 0$, то в качестве суммы двух первых членов M получим:

$$\frac{1}{6}\, t\omega^3 \{ (t+4)(7-t) - 10 + 12\sqrt{2} \} >$$
$$> \frac{1}{6}\, t\omega^3 \{ (t+4)(7-t) - 16 + 12\sqrt{2} \}^{♀}. \qquad [7e]$$

---

* В оригинале отсутствует множитель $\left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right)^{\frac{t}{2}}$.

⋆ Из того, что $n \geqslant 3$, следует, что $t \leqslant 5\frac{1}{3}$.

⊘ В оригинале [7d] имеет вид

$$(-1)^i\, t^{\infty\, 2i+1}\, \omega_c^{2i+3} \{ (2i+2)(2i+3)(2+2\sqrt{2}) + (4i+3)\,t - t^2 \} =$$
$$= (-1)^i\, t^{\infty\, 2i+1}\, \omega_c^{2i+3} \{ (t+4)(7+4i-t) +$$
$$+ 8i^2(1+\sqrt{2}) + 4i(1+5\sqrt{2}) - 16 + 12\sqrt{2} \}.$$

Аналогичная ошибка, оставшаяся, к сожалению, не исправленной и в настоящем издании, имеется и в «Алгебре» Лобачевского (IV том наст. издания, стр. 203).

Так как

$$(2i+2)(2i+3)(3+2\sqrt{2}) + (4i+3)\,t - t^2 - (2i+1)(2i+2) >$$
$$> (2i+1)(2i+3)(3+2\sqrt{2}) + (4i+3)\,t - t^2 - (2i+2)(2i+3) =$$
$$= (2i+2)(2i+3)(2+2\sqrt{2}) + (4i+3)\,t - t^2,$$

то следующие далее из [7d] заключения все же справедливы.

♀ В оригинале формула [7e] в связи с отмеченной выше ошибкой в [7d] имеет вид

$$\frac{1}{6}\, t\omega^3 \{ (t+4)(7-t) - 16 + 12\sqrt{2} \} > \frac{1}{6}\, t\omega^3 (t+4)(7-t).$$

что является положительным числом для всех $t < 6$. Следовательно, при $t < 2$ в ряде M суммы всяких двух последовательных членов положительны.

Для $t > 2 < 3$* 3-й и 4-й члены дают:

$$t_c^{\infty 5}\omega^5\left\{1-\frac{(t-5)(t-6)}{6\cdot 7}\right\},$$

что является положительным числом; начиная отсюда, остальные члены объединяются по два в положительные суммы.

Для $t > 3 < 4$ три первых члена M дают:

$$t\omega - t_c^{\infty 3}\omega^3 + t_c^{\infty 5}\omega^5 > t\omega^3\left\{\frac{1}{6}(t+4)(7-t)-\frac{1}{20}\omega^2\right\} > 3\,\frac{19}{20}\,t\omega^3 \star \qquad [7f]$$

— положительное число; начиная отсюда каждые два члена, соединенные по порядку, дают только положительные числа.

Для $t > 4 < 5$ первый член M со вторым и далее по два члена дают только положительные числа⊘.

Для $t > 5 < 6$ первые три члена M дают:

$$t\omega - t_c^{\infty 3}\omega^3 + t_c^{\infty 5}\omega^5 > t\omega^3\left\{\frac{1}{6}(t+4)(7-t)-5\omega^2\right\}^{♀} >$$

$$> t\omega^3\{10\sqrt{2}-13{,}5\} > 0{,}64\,t\omega^3.$$

Начиная отсюда, соединение следующих членов по два дает только положительные числа.

Этим способом я показал в своей Алгебре ‡, как всегда можно найти по крайней мере один мнимый корень из единицы, если показатель есть простое число. При помощи одного корня легко

---

* То-есть $2 < t < 3$. Аналогичный смысл имеют и последующие неравенства такого же вида.

⋆ В оригинале в последней части неравенств [7f] напечатано $3\,\frac{9}{20}\,t\omega^3$. См. примечание [83].

⊘ Положительность суммы первых двух членов следует из [7e]; с помощью [7d] легко убедиться, что сумма третьего и четвертого членов тоже положительна, а дальше $2i > t$ и, следовательно, суммы всех других пар также положительны.

♀ Это неравенство справедливо; однако, по всей вероятности, здесь у Лобачевского ошибка в вычислениях, так как из [7f] немедленно следует более сильное неравенство

$$t\omega - t_c^{\infty 3}\omega + t_c^{\infty 5}\omega^5 > \frac{1}{6}\,t\omega^3(t+4)(7-t)$$

ввиду того, что $t_c^{\infty 5} > 0$ при $t > 4$.

‡ См. т. IV наст. издания, стр. 203—205.

найти также остальные мнимые корни также и в случае, когда показатель — составное число.

Если подставить на место действительного числа n мнимый показатель $n\sqrt{-1}$, то ряд (5) служит также для определения степеней, если только абсолютная величина $x<1$, так как только в этом случае ряду соответствует некоторое значение. Чтобы доказать это, достаточно заметить, что если для некоторого действительного числа n предположить сходимость обоих рядов

$$\sum_{i=0}^{\infty}\{n_c^{\infty i}+(-n)_c^{\infty i}\}x^i,$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}\{n_c^{\infty i}-(-n)_c^{\infty i}\}x^i,$$

в которых множитель при x^i, расположенный по степеням n, состоит из членов с одинаковыми знаками, то ряды тем более будут сходящимися, если подставить $n\sqrt{-1}$ на место n, так как вследствие этого входят члены с переменными знаками.

Все остальные случаи возведения в степень могут быть сведены к этим, если пользоваться уравнением (7).

Возведение в степень с мнимым показателем $n\sqrt{-1}$ может быть произведено также при помощи ряда (4), который всегда сходится, как это только что было доказано; но для этого мы должны сначала определить две действительные величины π и p из уравнений

$$\left.\begin{aligned} pe^{\frac{1}{8}\pi\sqrt{-1}}&=1+(-1+\sqrt{2})\sqrt{-1},\\ pe^{-\frac{1}{8}\pi\sqrt{-1}}&=1-(-1+\sqrt{2})\sqrt{-1},\end{aligned}\right\}\qquad [7g]$$

откуда получается:

$$p^2=\frac{4}{2+\sqrt{2}};\quad e^{\pi\sqrt{-1}}=-1\,[34]. \qquad [7h]$$

Рассмотрим еще ряд

$$-f(1-x)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}x^i. \qquad (8)$$

Для него μ определяется из уравнения

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{\mu-r}=\frac{r}{\mu}2^{\lambda};$$

следовательно,

$$(\mu - r)\log\frac{1}{x} = \lambda\log 2 + \log\left(\frac{r}{\mu}\right) < \lambda\log 2^{*}.$$

Следовательно, остаток ряда после члена $i = r$ есть

$$R < \frac{2}{r}\log 2\cdot x^{r}\cdot\frac{1}{\log\frac{1}{x}}.$$

Таким образом, ряд (8) сходится для любого положительного $x < 1$ и тем более он сходится, если на место x поставить $-x$ или $x\sqrt{-1}$, если только по абсолютной величине $x < 1$.

Если в ряд (8) на место x подставить выражение $-(x + y + xy)$, то получится *:

$$-f\{(1+x)(1+y)\} = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i}}{i}(x+y+xy)^{i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i}(i-1)^{\infty i-1}(x+y+xy)_{c}^{i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i}(i-1)^{\infty i-1}x_{c}^{n}y_{c}^{m}(xy)_{c}^{i-n-m},$$

где целым числам n и m должно быть придано любое значение, при котором $i - n - m$ не отрицательно. Пусть теперь

$$i - m = p, \quad i - n = q;$$

тогда множитель при $x^{p}y^{q}$ в ряде для $-f\{(1+x)(1+y)\}$ выразится через

$$\sum\frac{(-1)^{i}(i-1)^{\infty i-1}}{(i-p)^{\infty i-p}(i-q)^{\infty i-q}(p+q-i)^{\infty p+q-i}},$$

где знак суммы распространяется на все значения i, для которых $i-p$, $i-q$, $p+q-i$ не отрицательны. Для $p=0$ или $q=0$ этот коэффициент соответственно равен

$$\frac{(-1)^{q}}{q} \quad \text{или} \quad \frac{(-1)^{p}}{p}.$$

---

* В оригинале в левой части этого равенства и в правой части следующего далее неравенства отсутствует множитель $\log\frac{1}{x}$.

* Предполагается, что $|x + y + xy| < 1$.

Если $q > 0$ и если, кроме того, положить $p = q + t$, $i = q + t + \lambda$, то этот множитель можно представить следующим образом:

$$(-1)^{q+t} \sum_{\lambda=0}^{q} \frac{(-1)^{\lambda} (q+t+\lambda-1)^{\infty\, q+t+\lambda-1}}{\lambda^{\infty\lambda} (t+\lambda)^{\infty\, t+\lambda} (q-\lambda)^{\infty\, q-\lambda}} = {}^{*}$$

$$= (-1)^{q+t} \sum_{\lambda=0}^{q} \frac{(-1)^{\lambda} (q+t+\lambda-1)^{\infty\, q-1}}{(q-\lambda)^{\infty\, q-\lambda} \lambda^{\infty\lambda}} =$$

$$= (-1)^{q+t} \sum_{\lambda=0}^{q} \frac{(-1)^{\lambda}}{q} (q+t+\lambda-1)_c^{\infty\, q-1} q_c^{\infty\lambda} =$$

$$= \frac{(-1)^{q}}{q} \sum_{\lambda=0}^{q} (-q)_c^{\infty\, t+\lambda} q_c^{\infty\, q-\lambda}.$$

Отсюда следует, что этот множитель равен нулю [ур. (6)] и что ряд (8) обладает свойством

$$f\{(1+x)(1+y)\} = f(1+x) + f(1+y), \tag{9}$$

откуда мы далее заключаем, что $f(x) = \log x$ *, пока x обозначает действительное число. Ряд (8) служит также для вычисления $\log x$ для мнимых значений x, пока этот ряд не перестанет сходиться, или пока он при помощи (9) может быть сделан сходящимся. Например, ряд (8) дает для $x = -\sqrt{-1}$

$$\log(1+\sqrt{-1}) = \sqrt{-1} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^{i}}{2i+1} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i}}{i} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i+2)^{\infty 2}} + \frac{1}{2} \sqrt{-1} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\left(i+\frac{3}{2}\right)^{\infty 2}} {}^{\oslash}.$$

---

* Суммирование распространено на значения λ от 0 до q, потому что при $\lambda < 0$ и при $q - \lambda < 0$ знаменатель делается бесконечным, так как $(-r)^{\infty\, -r} = \infty$, если $r > 0$ и целое.

* Это не совсем ясно. Казалось бы, что равенство (8) служит *определением* логарифма.

⊘ В оригинале второй член последней части этих равенств имеет вид

$$\frac{1}{4} \sqrt{-1} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^{i}}{\left(i+\frac{3}{2}\right)^{\infty 2}}.$$

Входящие сюда ряды, которые всегда сходятся, как мы покажем ниже, дают:

$$\log(1+\sqrt{-1})=\frac{1}{2}\log 2+\frac{1}{4}\pi\sqrt{-1}\,^{*},$$

где π обозначает отношение окружности к диаметру. На том же основании [ур. (9)] находим:

$$\log(\sqrt{-1})=2\log\left(\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2}\pi\sqrt{-1},$$

$$\log(-1)=2\log(\sqrt{-1})=\pi\sqrt{-1}.$$

То, что здесь сказано о рядах для степеней, логарифмов и показательных функций, я привел в такой же форме в изданной мною Алгебре *, чтобы не лишить этот отдел математики существенной пользы, которую можно извлечь из тригонометрических функций и из разложения в бесконечные ряды, а также чтобы дать прочное обоснование вычислениям с мнимыми величинами.

[III]

Разложение тригонометрических и показательных функций не может в современных доказательствах рассматриваться как вполне обоснованное. Если рассмотреть ряд

$$S=\sum_{i=1}^{\infty}\log\left(1-\frac{x^2}{i^2\pi^2}\right), \qquad [10^{⊘}]$$

то из уравнения

$$\log\left(1-\frac{x^2}{\mu^2\pi^2}\right)=2^{-\lambda}\log\left(1-\frac{x^2}{\nu^2\pi^2}\right)$$

---

* Сумму ряда

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{2i+1}$$

Лобачевский, повидимому, получает из разложения в степенной ряд арктангенса, как и в своей «Алгебре», где определение числа π основано на этом ряде (см. т. IV наст. издания, стр. 232).

* См. т. IV наст. издания, гл. XI—XIV.

⊘ В оригинале номер формулы пропущен.

следует, что

$$\frac{x^2}{\mu^2\pi^2 - x^2} > -2^{-\lambda}\log\left(1 - \frac{x^2}{r^2\pi^2}\right)^*,$$

а отсюда

$$\mu < \frac{x}{\pi}\sqrt{1 - \frac{2^\lambda}{\log\left(1 - \frac{x^2}{r^2\pi^2}\right)}}.$$

Наконец,

$$\mu < \frac{x}{\pi} + \frac{x}{\pi}\, 2^{\frac{1}{2}\lambda}\left\{\log\left(\frac{r^2\pi^2}{r^2\pi^2 - x^2}\right)\right\}^{-\frac{1}{2}}.^*$$

Таким образом, остаток ряда (10) после члена $i = r$

$$R < \log\left(\frac{r^2\pi^2}{r^2\pi^2 - x^2}\right)\sum_{\lambda=1}^{\infty}\left(\frac{x}{\pi} - r\right)2^{-\lambda} +$$

$$+ \frac{x}{\pi}\sqrt{\log\left(\frac{r^2\pi^2}{r^2\pi^2 - x^2}\right)} \cdot \sum_{\lambda=1}^{\infty} 2^{-\frac{1}{2}\lambda} =$$

$$= \left(\frac{x}{\pi} - r\right)\log\left(\frac{r^2\pi^2}{r^2\pi^2 - x^2}\right) + \frac{x}{\pi}(1 + \sqrt{2})\sqrt{\left(\log\frac{r^2\pi^2}{r^2\pi^2 - x^2}\right)} <$$

$$< \frac{x^2}{\pi}\left\{\frac{1 + \sqrt{2}}{\pi r - x} - \frac{1}{\pi r + x}\right\}^{\varnothing} =$$

$$= \frac{x^2}{\pi}\left\{\frac{\sqrt{2}}{\pi r - x} + \frac{2x}{\pi^2 r^2 - x^2}\right\};$$

следовательно, он убывает до нуля при возрастании r. Поэтому произведение бесконечного числа множителей

$$f(x) = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\ldots$$

---

* Если $0 < t < 1$, то

$$-\log(1 - t) = t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \ldots < t + t^2 + t^3 + \ldots = \frac{t}{1 - t}.$$

Положив $t = \frac{x^2}{\mu^2\pi^2}$, получим:

$$\frac{t}{1 - t} = \frac{x^2}{\mu^2\pi^2 - x^2}$$

и

$$-\log\left(1 - \frac{x^2}{\mu^2\pi^2}\right) < \frac{x^2}{\mu^2\pi^2 - x^2}.$$

* Если $t > 0$, то $\sqrt{1 + t} < 1 + \sqrt{t}$.

$^{\varnothing}$ Здесь используется неравенство $\log t < t - 1$, а также неравенство $\pi r - x < \sqrt{\pi^2 r^2 - x^2}$, справедливое, если $x > 0$ и r достаточно велико (члены исследуемого ряда содержат только четные степени x, и можно считать, что $x > 0$).

представляет функцию $f(x)$ переменного x, какое бы конечное значение мы ни придали x. Чтобы определить эту функцию, рассмотрим известное выражение

$$\log\sin x = 2n\log\cos\frac{x}{2n} + \log(2np) + \sum_{i=1}^{n}\log(1-p^2\cot i\omega^2)\,^*, \quad [10a]$$

в котором n есть любое целое число, $\omega=\frac{\pi}{2n}$, $p=\operatorname{tang}\frac{x}{2n}$. Если n достаточно велико, так что можно принять $r<n$, $\pi r>x$, и если положить

$$\log(1-p^2\cot^2\mu\omega)=2^{-\lambda}\log(1-p^2\cot^2 r\omega),$$

то получим:

$$\mu\omega<p+\frac{p\,2^{\frac{1}{2}\lambda}}{\sqrt{-\log(1-p^2\cot^2 r\omega)}}\ [^{86}].$$

Следовательно, остаток суммы *

$$\sum_{i=1}^{n}\log(1-p^2\cot^2 i\omega)$$

после члена, для которого $i=r$:

$$R<-\left(\frac{p}{\omega}-r\right)(1-2^{-\lambda})\log(1-p^2\cot^2 r\omega)+$$
$$+\frac{p}{\omega}(1+\sqrt{2})\,(1-2^{-\frac{1}{2}\lambda})\sqrt{-\log(1-p^2\cot^2 r\omega)}\,,$$

где для λ надо взять значение из уравнения для μ, в котором на место μ подставлено n ⊘. Далее имеем:

$$R<\frac{(1-2^{-\lambda})\left(\frac{p}{\omega}-r\right)p^2}{\operatorname{tang}^2 r\omega-p^2}+\frac{p^2(1+\sqrt{2})(1-2^{-\frac{1}{2}\lambda})}{\omega(\operatorname{tang} r\omega-p)}\,^{♀}, \qquad [10b]$$

---

* Доказательство этого тождества см. в примечании [85].

* Вернее, абсолютная величина этого остатка.

⊘ На основании признака сходимости Лобачевского

$$|R|<\left|\sum_{1}^{\lambda}(\mu-r)\,2^{-\lambda}\log(1-p^2\operatorname{ctg}^2\omega r)\right|,$$

где верхний индекс суммирования представляет собой то значение λ, которое соответствует $\mu=n$.

♀ Здесь Лобачевский пользуется неравенствами

$$-\log(1-t)<\frac{t}{1-t}\quad(0<t<1)\ \text{ и }\ \sqrt{a^2-b^2}>a-b\quad(a>b>0).$$

и если r настолько велико, что $r\omega > p$, то имеем также:

$$R < \frac{p^2}{\omega}\left\{\frac{(1+\sqrt{2})\left(1-2^{-\frac{1}{2}\lambda}\right)}{r\omega - p} - \frac{1-2^{-\lambda}}{r\omega + p}\right\} <$$

$$< \frac{p^2}{\omega}\left\{\frac{\sqrt{2}}{r\omega - p} + \frac{2p}{r^2\omega^2 - p^2} - 2^{-\lambda}\left[\frac{(1+\sqrt{2})\,2^{\frac{1}{2}\lambda}}{r\omega + p} - \frac{1}{r\omega + p}\right]\right\}. \quad [10c]$$

Если здесь отбросить те члены, которые заведомо отрицательны, то получим:

$$R < \frac{p^2}{\omega}\left\{\frac{\sqrt{2}}{r\omega - p} + \frac{2p}{r^2\omega^2 - p^2}\right\}^*. \quad [10d]$$

Следовательно, можно всегда взять $r < n$ настолько большим, чтобы остаток R ряда стал сколько угодно малым и далее при возрастании n таким и оставался.

В то же время

$$2n \log \cos \frac{x}{2n} \quad \text{и} \quad \log\left(\frac{2n}{x} \operatorname{tang} \frac{x}{2n}\right)$$

при возрастании n приближаются к нулю; следовательно, равенство

$$\log \frac{\sin x}{x f(x)} = \sum_{i=1}^{r} \log \frac{1 - p^2 \cot^2 i\omega}{1 - \frac{x^2}{i^2\pi^2}}$$

при возрастании n может быть сделано справедливым с любой точностью *.

Если здесь положить

$$\frac{1 - p^2 \cot^2 i\omega}{1 - \frac{x^2}{i^2\pi^2}} = 1 + \alpha,$$

то α представляет величину, которая при возрастании n убывает до нуля; но так как r, число логарифмов в сумме, является огра-

---

* По поводу неравенств [10c] и [10d] см. примечание [37].

* При достаточно большом r. Иными словами, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, если r достаточно велико, то

$$\left|\log \frac{\sin x}{x f(x)} - \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{r} \log \frac{1 - p^2 \operatorname{ctg}^2 i\omega}{1 - \frac{x^2}{i^2\pi^2}}\right| < \varepsilon.$$

ниченным, то мы необходимо имеем:

$$\log \frac{\sin x}{x f(x)} = 0 \,^*,$$

и следовательно,

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

Подобным же образом можно показать, что

$$\log \cos x = \sum_{i=0}^{\infty} \log \left\{ 1 - \frac{x^2}{\left(i + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2} \right\}, \tag{11}$$

$$\log \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2x} \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \log \left\{ \left(1 + \frac{x^2}{i^2 \pi^2} \right) \right\}, \tag{12}$$

$$\log \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \log \left\{ 1 + \frac{x^2}{\left(i + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2} \right\}, \tag{13}$$

если применить здесь известные равенства, справедливые для любого целого числа n *:

$$\log \cos x = 2n \log \cos \frac{x}{2n} + \sum_{i=1}^{n} \log \left\{ 1 - \frac{\operatorname{tang}^2 \frac{x}{2n}}{\operatorname{tang}^2 \left(\frac{2i-1}{4n} \pi \right)} \right\},$$

$$\log \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) = \sum_{i=0}^{n} \log \left\{ \left(\frac{e^{\frac{x}{2n}} + e^{-\frac{x}{2n}}}{2} \right)^2 + \left(\frac{e^{\frac{x}{2n}} - e^{-\frac{x}{2n}}}{2} \right)^2 \left(\cot \frac{2i-1}{4n} \pi \right)^2 \right\},$$

---

* То-есть, как велико бы ни было r,

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{r} \log \frac{1 - p^2 \operatorname{ctg}^2 i\omega}{1 - \frac{x^2}{i^2\pi^2}} = 0;$$

следовательно,

$$\log \frac{\sin x}{x f(x)} = 0;$$

так как эта величина от r не зависит.

* Первое из следующих далее равенств можно получить подобно тому, как это было показано для равенства [10a]. Второе и третье равенства получаются соответственно из первого и [10a] с помощью формул, выражающих тригонометрические функции через гиперболические.

$$\log\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)=$$

$$=\log\left\{2n\frac{e^{\frac{x}{2n}}-e^{-\frac{x}{2n}}}{e^{\frac{x}{2n}}+e^{-\frac{x}{2n}}}\right\}+\sum_{i=1}^{n}\log\left\{\left(\frac{e^{\frac{x}{2n}}+e^{-\frac{x}{2n}}}{2}\right)^{2}+\left(\frac{e^{\frac{x}{2n}}-e^{-\frac{x}{2n}}}{2}\right)^{2}\left(\cot\frac{i\pi}{2n}\right)^{2}\right\}^{*}.$$

Чтобы найти для ряда (11) остаток R после члена $i=r$, полагаем

$$\log\left\{1-\frac{x^2}{\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}\right\}=2^{-\lambda}\log\left\{1-\frac{x^2}{\left(r+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}\right\}.$$

Отсюда следует *:

$$\mu+\frac{1}{2}<\frac{x}{\pi}\sqrt{1-\frac{2^{\lambda}}{\log\left\{1-\frac{x^2}{\left(r+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}\right\}}},$$

$$\mu+\frac{1}{2}<\frac{x}{\pi}\left\{1+2^{\frac{1}{2}\lambda}\left[\log\frac{\left(r+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}{\left(r+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2-x^2}\right]^{-\frac{1}{2}}\right\}$$

и, наконец,

$$R<\frac{x^2}{\pi}\cdot\frac{(2+\sqrt{2})x+\pi\left(r+\frac{1}{2}\right)\sqrt{2}}{\left(r+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2-x^2}\,{}^{\oslash}.$$

Для ряда (12) μ определяется из уравнения

$$\log\left(1+\frac{x^2}{\mu^2\pi^2}\right)=2^{-\lambda}\log\left(1+\frac{x^2}{r^2\pi^2}\right).$$

Отсюда следует, если r и μ весьма большие числа:

$$\mu<\frac{x}{\pi}2^{\frac{1}{2}\lambda}\frac{1}{\sqrt{\log\left(1+\frac{x^2}{r^2\pi^2}\right)}}.^{9}$$

---

* В оригинале в левой части предыдущего равенства стоит $\log(e^x+e^{-x})$, а этого равенства: $\log(e^x-e^{-x})$; имеются и другие опечатки, которые здесь исправлены.

* Следующие далее выкладки повторяют соответствующие вычисления при выводе оценки для остатка ряда (10).

⊘ В оригинале отсутствует множитель $2+\sqrt{2}$ при x в числителе правой части этого неравенства.

9) Так как $\log\left(1+\frac{x^2}{\mu^2\pi^2}\right)<\frac{x^2}{\mu^2\pi^2}$.

и, наконец,

$$R < -r \log\left(1+\frac{x^2}{r^2\pi^2}\right) + (1+\sqrt{2})\frac{x}{\pi}\sqrt{\log\left(1+\frac{x^2}{r^2\pi^2}\right)} < \frac{x^2\sqrt{2}}{\pi^2 r}, \quad [13a]$$

если только

$$1 > 2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i-1}}{i+2}\left(\frac{x}{\pi r}\right)^{2i}, \quad [13b]$$

а это условие выполняется, если $\pi r > x$ *.

Для ряда (13) имеем:

$$\log\left\{1+\frac{x^2}{\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}\right\} = 2^{-\lambda}\log\left\{1+\frac{x^2}{\left(r+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}\right\}.$$

Если r настолько велико, что $\left(r+\frac{1}{2}\right)\pi > x$, то

$$\mu+\frac{1}{2} < \frac{x}{\pi}\,2^{-\frac{1}{2}\lambda}\frac{1}{\sqrt{\log\left\{1+\frac{x^2}{\left(r+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}\right\}}};$$

Отсюда для остатка ряда (13) после члена $i = r$ получаем:

$$R < -\left(r+\frac{1}{2}\right)\log\left\{1+\frac{x^2}{\left(r+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}\right\} +$$
$$+(1+\sqrt{2})\frac{x}{\pi}\sqrt{\log\left\{1+\frac{x^2}{\left(r+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}\right\}} < \frac{2x^2\sqrt{2}}{\pi(2r+1)}\ \star.$$

[IV]

Разложение функции в сумму бесконечного числа дробей требует такого же уточнения, как и разложение на множители; между тем с помощью изложенного здесь метода легко доказать сходимость таких рядов. Пусть, например,

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} i^{-n}; \quad (14)$$

тогда имеем:

$$\mu = r\cdot 2^{\frac{\lambda}{n}},$$

* Подробное обоснование неравенства [13a] см. в примечании [38].

* См. примечание [38].

и следовательно, остаток ряда после члена $i=r$:

$$R<r^{1-n}\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{1-2^{\frac{1-n}{n}}}\ *.$$

Поэтому ряд (14) всегда сходится при $n>1$ и представляет некоторое определенное значение S, как бы мала, впрочем, ни была разность $n-1$.

Для ряда

$$S=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(i+a)(i+b)},\tag{15}$$

где разность $a-b\geqslant 0$, надо положить

$$(\mu+a)(\mu+b)=2^{\lambda}(r+a)(r+b);$$

отсюда следует:

$$\mu=-\frac{1}{2}(a+b)+\sqrt{(r+a)(r+b)\,2^{\lambda}+\frac{1}{4}(a-b)^{2}},$$

откуда

$$\mu<-b+2^{\frac{1}{2}\lambda}\sqrt{(r+a)(r+b)}\ *.$$

Остаток ряда (15) после члена $i=r$ оказывается, таким образом,

$$R<-\frac{1}{r+a}+\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{(r+a)(r+b)}}.\tag{16}$$

Если a и b — положительные числа и если положить $r=0$, то получается:

$$S<\frac{1}{a}+\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{ab}}.$$

Пусть теперь

$$S=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^{n}(i^{n}-p)},\tag{17}$$

---

* В соответствии с признаком Лобачевского

$$R<r^{-n}\sum_{\lambda=1}^{\infty}\left(r\,2^{\frac{\lambda}{n}}-r\right)2^{-\lambda}<r^{1-n}\sum_{\lambda=1}^{\infty}2^{\frac{1-n}{n}\lambda}=r^{1-n}\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{1-2^{\frac{1-n}{n}}}.$$

* Так как $\sqrt{\alpha^{2}+\beta^{2}}\leqslant|\alpha|+|\beta|$. Предполагается, что r достаточно велико.

где p обозначает положительное число. Уравнение

$$\mu^n(\mu^n - p) = 2^\lambda r^n(r^n - p)$$

дает:

$$\mu^n = \frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + r^n(r^n - p)2^\lambda};$$

следовательно,

$$\mu^n < p + 2^{\frac{1}{2}\lambda}\sqrt{r^n(r^n - p)}.$$

Если к тому же заметить, что когда m, a, b положительны и сверх того $m < 1$, $a > b$, то

$$1 + \left(\frac{b}{a}\right)^m > 1 + \frac{b}{a};$$

поэтому

$$m\log a + \log\left\{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^m\right\} > m\log a + m\log\left(1 + \frac{b}{a}\right)$$

и, наконец, учитывая

$$a^m + b^m > (a+b)^m, \tag{17a}$$

получаем для $n > 1$:

$$\mu < \sqrt[n]{p} + 2^{\frac{\lambda}{2n}} r^{\frac{1}{2}} (r^n - p)^{\frac{1}{2n}}.$$

Следовательно, остаток ряда (17) после члена $i = r$ будет:

$$R < \frac{-r + \sqrt[n]{p}}{r^n(r^n - p)} + \frac{r^{1-2n}}{\left(2^{1-\frac{1}{2n}} - 1\right)\left(1 - pr^{-n}\right)^{1-\frac{1}{2n}}}\,^*.$$

Ряд (17) сходится также при $n > \frac{1}{2}$. В этом случае имеем:

$$\mu^{2n} < p^2 + p\,2^{\frac{1}{2}\lambda + 1}\sqrt{r^n(r^n - p)} + 2^\lambda r^n(r^n - p),$$

$$\mu < p^{\frac{1}{n}} + (2p)^{\frac{1}{2n}} r^{\frac{1}{4}} (r^n - p)^{\frac{1}{4n}} 2^{\frac{\lambda}{4n}} + r^{\frac{1}{2}} (r^n - p)^{\frac{1}{2n}} 2^{\frac{\lambda}{2n}}\,\star.$$

---

* В оригинале показатель степени множителя $(1 - pr^{-n})$ имеет вид $\frac{1}{2n} - 1$.

⋆ В оригинале показатель степени множителя $(2p)$ имеет вид $\frac{1}{n}$.

Отсюда получаем для остатка ряда (17) после члена $i = r$:

$$R < \frac{p^{\frac{1}{n}} - r}{r^n (r^n - p)} + \frac{(2p)^{\frac{1}{2n}} (1 - pr^{-n})^{\frac{1}{4n} - 1}}{r^{2n - \frac{1}{2}} (2^{1 - \frac{1}{4n}} - 1)} + \frac{(1 - pr^{-n})^{\frac{1}{2n} - 1}}{r^{2n-1} (2^{1 - \frac{1}{2n}} - 1)} \text{*}.$$

Таким образом, этот ряд сходится при возрастании r, как бы мала ни была разность $2n - 1$.

[V]

Перейдем теперь к рассмотрению тригонометрического ряда

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \sin(ix + \alpha). \qquad (18)$$

Пусть сначала для целых и положительных значений n

$$P = \sum_{i=1}^{2^n} \frac{\sin(ix + \alpha)}{i + p},$$

где p означает любое положительное число. Если в этой сумме объединить каждые два следующих друг за другом члена и поступить так же со вновь образованными суммами, то получим:

$$P = \cos \frac{1}{2} x \; P_1 + Q_1,$$
$$P_1 = \cos x \; P_2 + Q_2,$$
$$P_2 = \cos 2x \; P_3 + Q_3.$$

Вообще мы имеем для целых значений $m \leqq n$:

$$P_{m-1} = \cos(2^{m-2} x) \; P_m + Q_m,$$

где

$$P_m = \sum_{i=1}^{2^{n-m}} \frac{\sin\{2^m ix + \alpha - \frac{1}{2}(2^m - 1)x\}}{i + p\,2^{-m}},$$

$$Q_m = \sum_{i=1}^{2^{n-m}} \frac{\sin\{2^m ix + \alpha - \frac{1}{2}(3 \cdot 2^{m-1} - 1)x\}}{(2i + p\,2^{-m+1})(2i + p\,2^{-m+1} - 1)}.$$

* В оригинале это неравенство имеет вид

$$R < \frac{p^{\frac{1}{n}}}{r^n (r^n - p)} + \frac{(2p)^{\frac{1}{n}} (1 - pr^{-n})^{\frac{1}{4n} - 1}}{r^{n - \frac{1}{2}} (2^{1 - \frac{1}{4n}} - 1)} + \frac{(1 - pr^{-n})^{1 - \frac{1}{2n}}}{r^{3n-1} (2^{1 - \frac{1}{2n}} - 1)}.$$

Таким образом, получаем:

$$P = Q_1 + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\sin(2^{i-1}x)}{2^i \sin\frac{1}{2}x} Q_{i+1} + \frac{\sin(2^{m-1}x)}{2^m \sin\frac{1}{2}x} P_m,$$

и для $m = n$:

$$P = Q_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\sin(2^{i-1}x)}{2^i \sin\frac{1}{2}x} Q_{i+1} + \frac{\sin(2^{n-1}x)}{\sin\frac{1}{2}x} \cdot \frac{\sin\left[2^n x + a - \frac{1}{2}(2^n - 1)x\right]}{2^n + p}.$$

Здесь *

$$\sin(2^{i-1}x) Q_{i+1} < \sum_{\lambda=1}^{2^{n-i-1}} \frac{1}{(2\lambda + p2^{-i})(2\lambda + p2^{-i} - 1)} <$$

$$< \frac{1}{4} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda + p2^{-i-1})\left(\lambda + p2^{-i-1} - \frac{1}{2}\right)}$$

и, наконец [ур. (16)],

$$\sin(2^{i-1}x) Q_{i+1} <$$

$$< \frac{1}{(2 + p2^{-i})(1 + p2^{-i})} + \frac{1}{4} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\lambda + p2^{-i-1} + \frac{1}{2}\right)(\lambda + p2^{-i-1} + 1)} <$$

$$< \frac{1}{(2 + p2^{-i})(1 + p2^{-i})} - \frac{1}{2(p2^{-i} + 2)} + \frac{1 + \sqrt{2}}{2\sqrt{(p2^{-i} + 2)(p2^{-i} + 1)}} <$$

$$< \frac{(1 - p2^{-i}) + (1 + \sqrt{2})\{\sqrt{2} + 2^{-\frac{1}{2}i}\sqrt{3p} + p2^{-i}\}}{2(2 + p2^{-i})(1 + p2^{-i})} \star =$$

$$= \frac{3 + \sqrt{2} + p2^{-i+\frac{1}{2}} + (1 + \sqrt{2})2^{-\frac{1}{2}i}\sqrt{3p}}{2(2 + p2^{-i})(1 + p2^{-i})};$$

---

* По абсолютной величине.

⋆ Здесь используется неравенство [17а].

следовательно,

$$P < Q_1 + \frac{1}{\sin\frac{1}{2}x}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{p\,2^{-i+\frac{1}{2}} + (1+\sqrt{2})\sqrt{3p}\cdot 2^{-\frac{1}{2}i} + 3 + \sqrt{2}}{2(p+2^{i+1})(p+2^{i})} + \frac{1}{p\sin\frac{1}{2}x}$$ [*].

Здесь [*]

$$Q_1 < \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(2i+p)(2i+p-1)} < \frac{1}{p\sqrt{2}} + \frac{1+\sqrt{2}}{2p\sqrt{p-1}}.$$

Остальные бесконечные ряды в выражении для границы P суть:

$$1.\ S = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(p+2^{i})(p+2^{i+1})},$$

$$2.\ S' = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{2^{-\frac{1}{2}i}}{(p+2^{i+1})(p+2^{i})},$$

$$3.\ S'' = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{2^{-i}}{(p+2^{i})(p+2^{i+1})}.$$

Для ряда S мы имеем:

$$(p+2^{\mu})(p+2^{\mu+1}) = 2^{\lambda}(p+2)(p+1)$$ [⊘],

откуда следует:

$$2^{\mu} < 2^{\frac{\lambda-1}{2}}\sqrt{(p+2)(p+1)}\ ;$$

далее

$$\mu < \frac{1}{2}(\lambda-1) + \frac{\log[(p+2)(p+1)]}{2\log 2}$$ [♀];

---

[*] Подразумевается, что каждый член как левой, так и правой частей этого неравенства находится под знаком абсолютной величины.

Само неравенство в оригинале содержит две *ошибки*: под знаком $\sum$ в числителе вместо $2^{-i+\frac{1}{2}}$ напечатано $\sqrt{2^{-i}}$, а в знаменателе пропущен множитель 2.

[*] По абсолютной величине.

[⊘] Здесь Лобачевский пользуется своим признаком для оценки остатка ряда, положив $r = 0$.

[♀] В оригинале отсутствует двойка перед логарифмом в знаменателе; нет множителя 2 также в обоих знаменателях следующего неравенства.

следовательно,

$$S<\frac{1}{2(p+1)(p+2)}+\frac{\log[(p+2)(p+1)]}{2\log 2\cdot(p+2)(p+1)}.$$

Для ряда S' в свою очередь

$$(p+2^{\mu+1})(p+2^{\mu})2^{\frac{1}{2}\mu}=2^{\lambda}(p+2)(p+1);$$

отсюда

$$2^{\frac{5\mu}{2}}<2^{\lambda-1}(p+2)(p+1),$$

далее

$$2^{\mu}<2^{\frac{2\lambda-2}{5}}(p^2+3p+2)^{\frac{2}{5}}$$

и, наконец,

$$\mu<\frac{2}{5}(\lambda-1)+\frac{2\log[(p+1)(p+2)]}{5\log 2},$$

$$S'<\frac{2}{5(p+1)(p+2)}+\frac{2\log[(p+1)(p+2)]}{5\log 2\cdot(p+1)(p+2)}\,*.$$

Для бесконечного ряда S'' имеем уравнение

$$(p+2^{\mu})(p+2^{\mu+1})2^{\mu}=2^{\lambda}(p+1)(p+2),$$

а отсюда

$$2^{\mu}<2^{\frac{\lambda-1}{3}}[(p+1)(p+2)]^{\frac{1}{3}};$$

наконец,

$$\mu<\frac{1}{3}(\lambda-1)+\frac{\log[(p+1)(p+2)]}{3\log 2}$$

и

$$S''<\frac{1}{3(p+1)(p+2)}+\frac{\log[(p+1)(p+2)]}{3\log 2\cdot(p+1)(p+2)}\,*.$$

После подстановки найденных границ для Q_1, S, S', S'' получаем:

$$P<\frac{1}{p\sqrt{2}}+\frac{1+\sqrt{2}}{2p\sqrt{p-1}}+$$

$$+\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}x}\left\{\frac{\frac{1}{2}(3+\sqrt{2})+\frac{2}{5}(1+\sqrt{2})\sqrt{3p}+p\sqrt{2}}{(p+1)(p+2)}+\right.$$

---

* В оригинале числитель первого члена правой части равен 4.

* В оригинале числитель первого члена правой части равен 2.

$$+\frac{\log(p+1)+\log(p+2)}{30(p+1)(p+2)\log 2}\times$$
$$\times\left[45+15\sqrt{2}+(12+12\sqrt{2})\sqrt{3p}+10p\sqrt{2}\right]\Bigg\}+\frac{1}{p\sin\frac{x}{2}}\,^{*}. \quad [18a]$$

Так как при возрастании p оба отношения

$$\frac{\log(p+1)}{p+1},\quad \frac{\log(p+2)}{p+2}$$

становятся исчезающе малыми, то P тем более приближается к нулю, чем больше взято число p, если только $\sin\frac{1}{2}x>0$ ⋆. Найденная граница для P, которая не зависит от дуги α ⊘, служит также границей для остатка после члена $i=p$ в ряде (18) ♀, который тем самым представляет определенную функцию дуги $x<2\pi$.

Отсюда, далее, следует уравнение

$$\varphi(x)\sin\alpha+\psi(x)\cos\alpha=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}\sin(ix+\alpha)\ ^{‡},$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ обозначают две функции, не зависящие от α. Если

---

* В связи с отмеченными выше ошибками в предшествующих вычислениях неравенство [18a] в оригинале имеет вид

$$P<\frac{1}{p\sqrt{2}}+\frac{1+\sqrt{2}}{2p\sqrt{p-1}}+\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}x}\left\{\frac{(3+\sqrt{2})+\frac{4}{5}(1+\sqrt{2})\sqrt{3p}+p\sqrt{2}}{(p+1)(p+2)}+\right.$$
$$\left.+\frac{\log(p+1)+\log(p+2)}{30(p+1)(p+2)\log 2}\,[45+15\sqrt{2}+(12+12\sqrt{2})\sqrt{3p}+20p\sqrt{2}]\right\}.$$

⋆ Вернее, если $\sin\frac{x}{2}\neq 0$.

⊘ А также и от n.

♀ Действительно, для ряда (18) имеем:

$$R_p=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i+p}\sin[(i+p)x+\alpha]=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i+p}\sin(ix+\alpha'),$$

где $\alpha'=px+\alpha$.

‡ $$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}\sin(ix+\alpha)=\sin\alpha\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}\sin\left(ix+\frac{\pi}{2}\right)+\cos\alpha\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}\sin ix=$$
$$=\sin\alpha\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}\cos ix+\cos\alpha\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}\sin ix.$$

Таким образом,

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}\cos ix,\quad \psi(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}\sin ix.$$

здесь положить сначала $\alpha=0$, затем $\alpha=\frac{\pi}{2}$, то получим:

$$\varphi(x)+\sqrt{-1}\cdot\psi(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}e^{ix\sqrt{-1}}.$$

Вместо этого последнего ряда, в сходимости которого мы теперь уже убедились, мы вправе положить $-\log(1-e^{-x\sqrt{-1}})$, что легко обнаружить, если при помощи равенства (9) так изменить ряд, чтобы получить другой сходящийся ряд, значение которого уже известно.

Для $x\geqq\frac{1}{2}\pi$, $<\pi$ можно написать:

$$-\log(1-e^{x\sqrt{-1}})=-\log\left(2\sin^2\frac{1}{2}x\right)-\log\left(1-\sqrt{-1}\cot\frac{1}{2}x\right)=$$

$$=-\log\left(2\sin^2\frac{1}{2}x\right)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i}\left(\cot\frac{1}{2}x\right)^{2i}+$$

$$+\sqrt{-1}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{2i+1}\left(\cot\frac{1}{2}x\right)^{2i+1}=$$

$$=-\log\left(2\sin\frac{1}{2}x\right)+\frac{1}{2}(\pi-x)\sqrt{-1}\ *.$$

Если $x<\frac{1}{2}\pi$, >0, то мы имеем:

$$-\log(1-e^{x\sqrt{-1}})=-\log(\sin x)-\log\left(\operatorname{tang}\frac{1}{2}x\cdot\sqrt{-1}\right)=$$

$$=\log\sqrt{-1}-\log\sin x-\log\left(1+\operatorname{tang}\frac{1}{2}x\cdot\sqrt{-1}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}-\log\sin x+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i}\left(\operatorname{tang}\frac{1}{2}x\right)^{2i}-$$

$$-\sqrt{-1}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{2i+1}\left(\operatorname{tang}\frac{1}{2}x\right)^{2i+1}=$$

$$=-\log\left(2\sin\frac{1}{2}x\right)+\frac{1}{2}(\pi-x)\sqrt{-1}.$$

Отсюда для любой дуги $x>0$, $<\pi$

$$-\log\left(2\sin\frac{1}{2}x\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}\cos ix,$$

---

* $$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i}\left(\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right)^{2i}=-\log\left(1+\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}\right)=2\log\sin\frac{x}{2},$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i}\left(\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right)^{2i+1}=\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right)=\frac{\pi-x}{2}.$$

$$\frac{1}{2}(\pi - x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \sin ix^{*}. \tag{19}$$

Если в последнем ряде подставить $\pi - x$ на место x, то получается

$$\frac{1}{2}x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i} \sin ix$$

для всех значений от $x = 0$ до $x < \pi$.

Ряд (19) может быть также представлен в виде

$$\pi = x + 2\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \sin ix$$

и

$$\pi = \int_0^x \frac{\sin\left(i + \frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}\, dx^{*}, \tag{20}$$

---

* См. сноску ‡ на стр. 191.

* Мы имеем:

$$\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(i-\frac{1}{2}\right)x = 2\cos ix \sin\frac{1}{2}x,$$

$$\sin\left(i-\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(i-\frac{3}{2}\right)x = 2\cos(i-1)x \sin\frac{1}{2}x,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sin\frac{3}{2}x \quad - \quad \sin\frac{1}{2}x \quad = \quad 2\cos x \sin\frac{1}{2}x,$$

откуда

$$\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x} = 1 + 2\sum_{i=1}^{i} \cos ix.$$

Если здесь умножить на dx и проинтегрировать, то получим:

$$\int_0^x \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}\, dx = x + 2\sum_{i=1}^{i} \frac{1}{i}\sin ix.$$

Следовательно,

$$\pi = \int_0^x \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}\, dx + K_{(i)},$$

где $K_{(i)}$ при возрастающем i приближается к нулю. [*Примечание Лобачевского.*]

если последнему выражению придать тот смысл, что пока $x < \pi$, значение интеграла тем менее отличается от π, чем больше взято i так что разность может быть сделана произвольно малой. Значение вышенаписанного интеграла для других значений x, которые не заключаются в указанных границах, легко определяется. Если ω означает острый угол и n — любое целое положительное число, то получаем *:

$$\int_0^x \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}\,dx = (2n+1)\pi \quad \text{для} \quad x = 2n\pi+\omega, \quad \text{и } x = (2n+1)\pi+\omega$$

$$= n\pi \quad \ldots \quad x = n\pi$$

$$= -(2n+1)\pi \ldots \quad x = -2n\pi-\omega \ldots x = -(2n+1)\pi-\omega$$

$$= -n\pi \quad \ldots \quad x = -n\pi.$$

Все эти случаи содержатся, таким образом, в следующем правиле: «Значение интеграла не изменяется, пока x не достигает границ 2π, 4π, и т. д.; при достижении одной из этих границ значение интеграла увеличивается всегда на π, и такое же увеличение еще происходит, когда одна из этих границ становится превзойденной. При достижении границ $-2\pi, -4\pi$ и т. д. к значению интеграла должно прибавить $-\pi$ и еще раз $-\pi$, когда эта граница превзойдена».

С помощью интеграла (20) можно показать известное разложение любой функции в тригонометрический ряд. Этот метод впервые изложен г-ном Дирихле и заслуживает предпочтения перед всеми другими; мы повторим здесь его в несколько измененном виде.

Пусть

$$F(\omega) = \int_a^b \frac{\sin\left[\left(i+\frac{1}{2}\right)(x-\omega)\right]}{\sin\frac{1}{2}(x-\omega)} f(x)\,dx, \tag{21}$$

где пределы интеграла a и b произвольны, $f(x)$ обозначает произвольную непрерывную или разрывную функцию от x, которая, однако, здесь сначала должна рассматриваться как непрерывная, и где ω представляет некоторую определенную величину, в то время как $F(\omega)$ — искомую функцию от ω.

---

* В следующих далее равенствах нужно, как это, впрочем, указано выше Лобачевским, перейти к пределу при $i \to \infty$.

Если умножить равенство (21) на $d\omega$, затем проинтегрировать по ω от $\omega=\alpha$ до $\omega=\beta$, предполагая $\alpha>a$, $\beta<b$, то получим:

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} F(\omega)\,d\omega=\int\limits_{a}^{\alpha} dx\,f(x)\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{\sin\left[\left(i+\frac{1}{2}\right)(x-\omega)\right]}{\sin\frac{1}{2}(x-\omega)}\,d\omega+$$

$$+\int\limits_{\beta}^{b} dx\,f(x)\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{\sin\left[\left(i+\frac{1}{2}\right)(x-\omega)\right]}{\sin\frac{1}{2}(x-\omega)}\,d\omega+$$

$$+\int\limits_{\alpha}^{\beta} dx\,f(x)\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{\sin\left[\left(i+\frac{1}{2}\right)(x-\omega)\right]}{\sin\frac{1}{2}(x-\omega)}\,d\omega=$$

$$=\int\limits_{a}^{\alpha} dx\,f(x)\int\limits_{\alpha-x}^{\beta-x}\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega}{\sin\frac{1}{2}\omega}\,d\omega+$$

$$+\int\limits_{\beta}^{b} dx\,f(x)\int\limits_{\alpha-x}^{\beta-x}\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega}{\sin\frac{1}{2}\omega}\,d\omega+$$

$$+\int\limits_{\alpha}^{\beta} dx\,f(x)\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)(x-\omega)}{\sin\frac{1}{2}(x-\omega)}\,d\omega.$$

Так как $\alpha-x$, $\beta-x$ положительные числа, если x заключено в границах a, α и отрицательные для x в границах β и b, то для таких значений x, если предположить $\beta-a\leqq 2\pi$, $\alpha-b\geqq -2\pi$, мы будем иметь в силу равенства (20)

$$\int\limits_{\alpha-x}^{\beta-x}\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega}{\sin\frac{1}{2}\omega}\,d\omega=0\ ^{*};$$

* В левой части подразумевается переход к пределу при $i\to\infty$

следовательно,

$$\int_{\alpha}^{\beta} F(\omega)\,d\omega = \int_{\alpha}^{\beta} dx\,f(x) \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)(x-\omega)}{\sin\frac{1}{2}(x-\omega)}\,d\omega =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} dx\,f(x) \int_{0}^{\beta-x} \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega}{\sin\frac{1}{2}\omega}\,d\omega + \int_{\alpha}^{\beta} dx\,f(x) \int_{0}^{x-\alpha} \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega}{\sin\frac{1}{2}\omega}\,d\omega =$$

$$= 2\pi\int_{\alpha}^{\beta} dx\,f(x)\,^{*}, \qquad [21a]$$

как бы ни были близки между собою пределы α и β. Если $f(x)$ есть непрерывная функция и кроме того $\omega > a$, $< b$ *, то сближение пределов α и β приводит в конце концов к заключению, что

$$F(\omega) = 2\pi f(\omega)^{\varnothing}$$

или

$$2\pi f(\omega) = \int_{a-\omega}^{b-\omega} f(x+\omega)\,\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}\,dx,$$

если $b-a \leqq 2\pi$; но так как ω должно быть заключено между границами a и b, то отсюда следует, что значение $x=0$ лежит между границами $b-\omega$ и $a-\omega$.

Если $\omega < \pi$, $> -\pi$ ♀ не заключено между границами b и a и, следовательно, значение $x=0$ не лежит между $b-\omega$ и $a-\omega$‡, то можно

---

* Здесь Лобачевский производит предельный переход при $i\to\infty$, и в левой части этого равенства следует писать:

$$\lim_{i\to\infty}\int_{\alpha}^{\beta} F(\omega)\,d\omega.$$

Законность предельного перехода в правой части равенства может быть обоснована без особого труда (см. примечание [30]).

* В оригинале $\omega > -\pi$, $< +\pi$.

$^{\varnothing}$ Здесь в левой части вместо $F(\omega)$ нужно писать $\lim\limits_{i\to\infty} F(\omega)$. Это равенство не обосновано. Оно справедливо, если предел $\lim\limits_{i\to\infty} F(\omega)$ существует (т. е. соответствующий ряд Фурье сходится) и стремление к пределу равномерно в некоторой окрестности точки ω.

♀ В оригинале $\omega < 2\pi$, $> -2\pi$.

‡ Точнее: если $-\pi < \omega < \pi$ и $\omega + 2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ не заключено между a и b, т. е. если значение $x = 2k\pi$ не находится между $b-\omega$ и $a-\omega$ [функция $F(\omega)$, определенная с помощью (21), имеет период 2π].

так удалить друг от друга границы a и b, чтобы ω * лежало между ними, и в то же время положить $f(\omega)$ равным нулю, так как значение $f(x)$ вне границ a, b произвольно. Отсюда следует $F(\omega)=0$, за исключением значений, соответствующих самым границам a и b, для которых не могла бы иметь места непрерывность функции.

Если $\omega=\pi$ или $\omega=-\pi$ и кроме того

$$F(\omega)=\int\limits_{-\pi}^{+\pi} dx\, f(x)\,\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)(x-\omega)}{\sin\frac{1}{2}(x-\omega)},$$

то при $\omega=\pi$

$$F(\pi)=\int\limits_{-\pi}^{2\pi} dx\, f(\pi-x)\,\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}$$

и при $\omega=-\pi$

$$F(-\pi)=\int\limits_{0}^{2\pi} dx\, f(x-\pi)\,\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}.$$

Если δ означает произвольное сколь угодно малое число, то

$$F(\pi)=\int\limits_{0}^{\delta} dx\, f(\pi-x)\,\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}\,dx+\int\limits_{\delta}^{2\pi-\delta} dx\, f(\pi-x)\,\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}+$$

$$+\int\limits_{2\pi-\delta}^{2\pi} dx\, f(\pi-x)\,\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}=$$

$$=f(\pi)\int\limits_{0}^{\delta}\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}\,dx+f(-\pi)\int\limits_{0}^{\delta}\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}\,dx=$$

$$=\pi f(\pi)+\pi f(-\pi)^{\star}.$$

* Точнее: $\omega+2k\pi$.

⋆ Здесь опять производится не отраженный в обозначениях предельный переход при $i\to\infty$. Окончательный результат справедлив, если на функцию $f(x)$ наложить условия, позволяющие совершить предельный переход под знаком интеграла.

Подобным же образом получается:

$$F(-\pi) = \pi f(\pi) + \pi f(-\pi).$$

Если непрерывность функции $f(x)$ нарушается при $x = \omega$ между границами a и b, когда $b - a \leqq 2\pi$, так что $f(x)$ начинается со значения A с той стороны, где x уменьшается и со значения B с противоположной стороны, то непрерывность сохранится, если при $x > \omega$ вместо $f(x)$ взять $f(x) + A - B$; тогда мы получим:

$$F(\omega) = \int_a^\omega dx\, f(x) \frac{\sin\left(i + \frac{1}{2}\right)(x - \omega)}{\sin \frac{1}{2}(x - \omega)} +$$

$$+ \int_\omega^b dx\, [f(x) + A - B] \frac{\sin\left(i + \frac{1}{2}\right)(x - \omega)}{\sin \frac{1}{2}(x - \omega)} +$$

$$+ (B - A) \int_\omega^b dx \frac{\sin\left(i + \frac{1}{2}\right)(x - \omega)}{\sin \frac{1}{2}(x - \omega)}.$$

Здесь два первых интеграла объединяются в один между пределами a и b и дают, как было выше показано для непрерывной функции $f(x)$, значение $2\pi A$, тогда как последний интеграл представляет значение π; следовательно, теперь

$$F(\omega) = \pi A + \pi B\,^*.$$

В дополнение к предшествующему заметим еще, что непрерывность функции $F(\omega)$ нарушается только вместе с непрерывностью $f(x)$ при $x = \omega$, за исключением случаев, где $\omega = +\pi$ или $\omega = -\pi$, в чем легко убедиться из рассмотрения выражения (21).

[VI]

Теперь займемся еще решением задачи:

Определить, может ли положительное число $A_{(n)}$, которое находится в некоторой определенной зависимости от числа n и возрастает вместе с n, превзойти некоторую определенную границу?

* Здесь тоже осуществлен предельный переход при $i \to \infty$.

Пусть

$$S = A_n + \sum_{i=1}^{\infty}(A_{n+i} - A_{n+i-1}).$$

Применяем изложенный вначале метод. Полагаем

$$A_{n+\mu} - A_{n+\mu-1} = 2^{-\lambda}(A_n - A_{n-1});$$

отсюда следует, что

$$\sum_{i=1}^{\infty}(A_{n+i} - A_{n+i-1}) < \sum_{\lambda=1}^{\infty}\mu\, 2^{-\lambda}(A_n - A_{n-1});$$

значит,

$$S > A_n,$$
$$< A_n + (A_n - A_{n-1})\sum_{\lambda=1}^{\infty}\mu\, 2^{-\lambda}.$$

Пусть, например,

$$A_n = \log n - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i+\alpha};$$

тогда мы имеем:

$$A_{n+i} - A_{n+i-1} = \log\left(1 + \frac{1}{n+i-1}\right) - \frac{1}{n+\alpha+i};$$

далее,

$$\log\left(1 + \frac{1}{\mu+n-1}\right) - \frac{1}{\mu+n+\alpha} = 2^{-\lambda}\left\{\log\frac{n}{n-1} - \frac{1}{n+\alpha}\right\}.$$

Разлагая в ряд, расположенный по отрицательным степеням $\mu + n - 1$, получаем:

$$\left(\log\frac{n}{n-1} - \frac{1}{n+\alpha}\right)2^{-\lambda} = \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}\frac{(1+\alpha)^i - \frac{1}{i+1}}{(\mu+n-1)^{i+1}}. \quad [21b]$$

Если, кроме того,

$$\alpha > -1 + \frac{1}{\sqrt{3}},$$

то можно взять n настолько большим [40], что

$$\frac{\alpha + \frac{1}{2}}{(n+\mu-1)^2} > 2^{-\lambda}\left(\log\frac{n}{n-1} - \frac{1}{n+\alpha}\right),$$

откуда следует:

$$\mu < 1 - n + 2^{\frac{1}{2}\lambda}\sqrt{\frac{\alpha + \frac{1}{2}}{\log\frac{n}{n-1} - \frac{1}{n+\alpha}}}$$

и, наконец,

$$S-A_n<(1+\sqrt{2})\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)\left(\log\frac{n}{n-1}-\frac{1}{n+\alpha}\right)-}$$

$$\overline{-(n-1)\log\frac{n}{n-1}+\frac{n-1}{n+\alpha}}<$$

$$<\frac{1}{n+\alpha}\left\{(1+\sqrt{2})\sqrt{(\alpha+1)\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}\sqrt{\frac{n+\alpha}{n-1}}-\alpha\frac{n-1}{n+\alpha}\right\}<$$

$$<\frac{(1+\sqrt{2})\sqrt{3}}{\sqrt{n(n-1)}}\,{}^{*}. \qquad [21c]$$

Это последнее выражение определяет точность вычисления во всех случаях, когда $\alpha>-1+\frac{1}{\sqrt{3}}$ *; если же α меньше этой границы, то можно положить

$$A_n=-\frac{1}{1+\alpha}+\frac{1}{\alpha+n+1}+\log n-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\alpha+1+i}. \qquad (22)$$

Это означает не что иное, как то, что в A_n на место α поставлено $\alpha+1$, и, продолжая таким образом, можно довести α до желаемой величины.

Если умножить A_n на $d\alpha$ и проинтегрировать от $\alpha=0$, то получим:

$$\int\limits_0 d\alpha A_n=\log\left\{n^{\alpha}\frac{n^{\infty n}}{(\alpha+n)^{\infty n}}\right\}[41] \qquad [22a]$$

для $\alpha>0$ и <1, с точностью

$$\alpha\frac{(1+\sqrt{2})\sqrt{3}}{\sqrt{n(n-1)}}<\alpha\frac{(1+\sqrt{2})\sqrt{3}}{n-1}{}^{\varnothing}. \qquad [22b]$$

---

* В оригинале последняя часть неравенств [21c] имеет вид

$$\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{n(n-1)}}-\frac{n-1}{n(n+1)}.$$

* В неравенствах [21c] последняя строчка дает оценку в случае, когда $0\leqslant\alpha\leqslant 1$, а две предыдущие — когда $\alpha>-1+\frac{1}{\sqrt{3}}$.

⌀ В оригинале

$$\alpha\left\{\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{n(n-1)}}-\frac{n-1}{n(n+1)}\right\}<\alpha\left\{\frac{3}{n^2-1}+\frac{1}{(n-1)\sqrt{2}}\right\}$$

в связи с отмеченной выше ошибкой в [21c].

Отсюда находится значение функции

$$\alpha^{\infty\alpha} = r^\alpha \frac{r^{\infty r}}{(\alpha + r)^{\infty r}} \tag{23}$$

тем точнее, чем больше взято целое положительное число r *, а именно с приближением, которое характеризуется множителем

$$e^{\frac{\alpha(1+\sqrt{2})\sqrt{3}}{r-1}} \,*.$$

Если $\alpha > 1$, например $\alpha = p + \omega$, где $\omega > 0$, < 1, а p — целое положительное число, то мы получаем из (23):

$$(p+\omega)^{\infty p+\omega} = (p+\omega)^{\infty p} \cdot \omega^{\infty\omega} \,⊘.$$

Наконец, если $\alpha < 0$ и если положить $\alpha = -p + \omega$, где p означает целое положительное число, далее $\omega > 0$, < 1, то с помощью (23) получаем ♀:

$$(\omega - p)^{\infty\omega - p} = \frac{\omega^{\infty\omega}}{\omega^{\infty p}}.$$

Если функция от n неограниченно возрастает вместе с n, то можно получить приближенное значение, если отделить такую ее часть, что остающаяся не превзойдет некоторой определенной границы. Пусть, например, дана функция $(x + \alpha)^{\infty x}$, где x означает некоторое целое положительное число; пусть, далее, $F(x)$ — новая функция, такая, что

$$(x+\alpha)^{\infty x} = (x+\alpha)^x F(x);$$

---

* То-есть Лобачевский, по определению, полагает (см. примечание [41])

$$\log \alpha^{\infty\alpha} = \int_0^\alpha S(\alpha)\, d\alpha = \lim_{r\to\infty} \int_0^\alpha A_r\, d\alpha = \lim_{r\to\infty} \log \frac{r^\alpha r^{\infty r}}{(\alpha + r)^{\infty r}},$$

где $S(\alpha) = \lim_{n\to\infty} A_n$.

* В оригинале в связи с ошибками в [21с] и [22а] это выражение имеет вид

$$e^{\frac{3\alpha}{r^2-1} + \frac{\alpha}{(r-1)\sqrt{2}}}.$$

⊘ Действительно,

$$(p+\omega)^{\infty p+\omega} =$$

$$= \lim_{r\to\infty}\left[r^{p+\omega} \frac{r^{\infty r}}{(p+\omega+r)^{\infty r}}\right] = \lim_{r\to\infty}\left[r^\omega \frac{r^{\infty r}}{(\omega+r)^{\infty r}}\right] \cdot \lim_{r\to\infty}\left[r^p \frac{(\omega+r)^{\infty r}}{(p+\omega+r)^{\infty r}}\right] =$$

$$= \omega^{\infty\omega} \lim_{r\to\infty} \frac{r^p(\omega+1)(\omega+2)\ldots(\omega+p)}{(\omega+r+1)(\omega+r+2)\ldots(\omega+r+p)} = \omega^{\infty\omega}(\omega+p)^{\infty p}.$$

♀ Аналогично тому, как это показано в предыдущей сноске.

тогда мы имеем:

$$\log \frac{F(x)}{F(x-1)} = (x-1)\log\left(1-\frac{1}{x+\alpha}\right).$$

Чтобы здесь уничтожить тот член, который в разложении по отрицательным степеням $x+\alpha$ не зависит от x, принимаем еще:

$$F(x) = e^{-x}\varphi(x),$$

а чтобы уничтожить еще один член ряда, пусть

$$\varphi(x) = (x+\alpha)^{\alpha+\frac{1}{2}}\psi(x).$$

Таким образом, можно было бы продолжать, чтобы уничтожать один член за другим. Если мы ограничимся уже сделанным, то получим:

$$(x+\alpha)^{\infty x} = (x+\alpha)^{x+\alpha+\frac{1}{2}} e^{-x}\psi(x), \tag{24}$$

где

$$2\log\frac{\psi(x-1)}{\psi(x)} = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{i}{(i+1)(i+2)(x+\alpha)^{i+1}}. \tag{25}$$

Если, кроме того, обозначить значение $\psi(x)$ при $x=\infty$ через $f(\alpha)$, то в согласии с излагаемым методом для определения $f(\alpha)$ нужно прибегнуть к ряду

$$\log\psi(x) = \log f(\alpha) + \sum_{i=1}^{\infty}\log\frac{\psi(x+i-1)}{\psi(x+i)}, \tag{26}$$

который тем точнее даст значение $f(\alpha)$, чем большим взять x.

Предполагая $f(\alpha)$ определенным, имеем:

$$(x+\alpha)^{\infty x} = f(\alpha)(x+\alpha)^{x+\alpha+\frac{1}{2}}e^{-x}X, \qquad [26a]$$

где

$$\log X = \sum_{i=1}^{\infty}\log\frac{\psi(x+i-1)}{\psi(x+i)},$$

$$\psi(x) = \frac{(x+\alpha)^{\infty x}e^{x}}{(x+\alpha)^{x}(x+\alpha)^{\alpha+\frac{1}{2}}};$$

следовательно,

$$\log\frac{\psi(x-1)}{\psi(x)} = -1+\left(x+\alpha-\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{x+\alpha-1}\right)$$

или

$$\log\frac{\psi(x-1)}{\psi(x)} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i(-1)^{i-1}}{(i+1)(i+2)(x+\alpha-1)^{i+1}}. \tag{27}$$

Из этого последнего ряда и из (25) следует, что x всегда можно взять достаточно большим, чтобы было

$$\log\frac{\psi(x-1)}{\psi(x)} > \frac{1}{12(x+\alpha)^2},$$
$$< \frac{1}{12(x+\alpha-1)^2}.$$

Вместо первой из этих двух границ можно также положить

$$\log\frac{\psi(x-1)}{\psi(x)} > \frac{1}{12(x+\alpha)(x+\alpha+1)} = \frac{1}{12}\left\{\frac{1}{x+\alpha} - \frac{1}{x+\alpha+1}\right\}$$

и, следовательно,

$$\log X = \sum_{i=1}^{\infty}\log\frac{\psi(x+i-1)}{\psi(x+i)} > \frac{1}{12(x+\alpha+1)}.$$

Вторая граница дает:

$$\log X = \sum_{i=1}^{\infty}\log\frac{\psi(x+i-1)}{\psi(x+i)} < \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(x+i+\alpha-1)^2}.$$

Применением нашего метода и при помощи значения

$$\mu = (x+\alpha-1)(2^{\frac{1}{2}\lambda}-1)$$

получаем:

$$\log X < \frac{\sqrt{2}}{12(x+\alpha-1)}.$$

Следовательно, всегда можно взять x достаточно большим, чтобы без заметной разницы иметь:

$$(x+\alpha)^{\infty x} = f(\alpha)\,(x+\alpha)^{x+\alpha-\frac{1}{2}}e^{-x}, \tag{28}$$

причем это равенство тем вернее, чем больше x.

Значение функции $f(\alpha)$ должно быть вычислено здесь при помощи равенства (26), т. е. с помощью выражения

$$f(\alpha) = \frac{(x+\alpha)^{\infty x}e^{x}}{(x+\alpha)^{x+\alpha+\frac{1}{2}}}\,*.$$

* $f(\alpha)$ является пределом выражения, стоящего в правой части этого равенства, при $x\to\infty$.

Если здесь положить $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha = -\frac{1}{2}$, то получим *:

$$f(0) = \frac{x^{\infty x} e^{x}}{x^{x+\frac{1}{2}}},$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^{\infty x} e^{x}}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^{x+1}},$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^{\infty x} e^{x}}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^{x}}.$$

Если в последнем равенстве подставить $x+1$ на место x, то получим:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^{\infty x} e^{x+1}}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)^{x+1}}.$$

Подобным же образом в выражении для $f(0)$ можно подставить $2x$ на место x, откуда получим:

$$f(0) = \frac{x^{\infty x}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{\infty x} e^{2x}}{x^{2x+\frac{1}{2}}\sqrt{2}}\ *,$$

$$f(0) = f(0)\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^{\infty x} e^{x}}{x^{x}\sqrt{2}},$$

$$= f(0)\frac{f\left(-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{2x}\right)^{x}. \qquad [28a]$$

Отсюда следует:

$$\log\frac{f\left(-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{2}} = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i\,2^{i}x^{i-1}},$$

---

* В правых частях этих и всех последующих равенств, служащих для определения $f(0)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, подразумевается предельный переход при $x \to \infty$.

* Здесь нужно воспользоваться тождеством

$$(2x)^{\infty 2x} = x^{\infty x}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{\infty x} 2^{2x}.$$

а при $x = \infty$ это равенство дает:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2e}\ ^{*}.$$

Следовательно,

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{\frac{2}{e}}^{\,*} \quad \text{и} \quad f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot f\left(-\frac{1}{2}\right) = 4.$$

Между тем мы имеем также:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^{\infty x}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{\infty x} e^{2x}}{\left(x^2-\frac{1}{4}\right)^x\left(x+\frac{1}{2}\right)} =$$

$$= \frac{f(0)^2}{\left(x^2-\frac{1}{4}\right)^x\left(x+\frac{1}{2}\right)}\left(x+\frac{1}{2}\right)_c^{\infty x}\left(x-\frac{1}{2}\right)_c^{\infty x} x^{2x+1} =$$

$$= f(0)^2\left(x+\frac{1}{2}\right)_c^{\infty x}\left(x-\frac{1}{2}\right)_c^{\infty x}\frac{x}{\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4x^2}\right)^x}\ ^{⊘}$$

и, следовательно, при $x = \infty$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\pi} f(0)^2\ ^{♀}$$

---

* Это равенство немедленно следует из [28а], так как

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{2x}\right)^x = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

* Пользуясь исходными выражениями для $f\left(\frac{1}{2}\right)$ и $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, получаем немедленно

$$\frac{f\left(\frac{1}{2}\right)}{f\left(-\frac{1}{2}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)^x}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^x} = \frac{2}{e}.$$

⊘ Последняя часть этих равенств в оригинале имеет вид

$$f(0)^2 x^{-x}\left(x+\frac{1}{2}\right)_c^{\infty x} x^{-x}\left(x-\frac{1}{2}\right)_c^{\infty x}\frac{x}{\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4x^2}\right)^x}.$$

♀ Здесь следует воспользоваться равенством $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4x^2}\right)^x} = 1$ и разложением функции $\sin x$ в бесконечное произведение, из которого следует, что

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)_c^{\infty x}\left(x+\frac{1}{2}\right)_c^{\infty x}\right] = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}.$$

и, наконец,

$$f(0)=\sqrt{2\pi}.$$

Выражение (28) переходит, таким образом, при $\alpha=0$ в

$$x^{\infty x}=\sqrt{2\pi}\,x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x} \qquad [28b]$$

с тем большей точностью, чем больше взято x. Подобным образом мы имеем для всякого значения α:

$$f(\alpha)=\frac{(x+\alpha)^{\infty x}}{x^{\infty x}}\cdot\frac{\sqrt{2\pi}\,x^{-\alpha}}{\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{x+\alpha+\frac{1}{2}}}\,*.$$

Здесь $\left(x+\alpha+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)$ тем ближе к α, чем больше x; следовательно, имеем:

$$f(\alpha)=\frac{(x+\alpha)^{\infty x}}{x^{\infty x}}\,x^{-\alpha}\,\frac{\sqrt{2\pi}}{e^{\alpha}}\,*.$$

Это выражение — то же, что и следующее из (23) для

$$\frac{e^{-\alpha}\sqrt{2\pi}}{\alpha^{\infty\alpha}}$$

Таким образом, снова показано, что выражение (23) представляет значение некоторой функции от α тем точнее, чем большим взято число r. Таким образом, при принятом обозначении мы можем теперь написать:

$$(x+\alpha)^{\infty x}=\frac{\sqrt{2\pi}}{\alpha^{\infty\alpha}}(x+\alpha)^{x+\alpha+\frac{1}{2}}e^{-x-\alpha}\,\Phi.$$

Из найденных значений для $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, $f(0)$ получаем:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\infty\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{\pi},\quad\left(-\frac{1}{2}\right)^{\infty\left(-\frac{1}{2}\right)}=\sqrt{\pi};\quad 0^{\infty 0}=1$$

---

* В правой части подразумевается переход к пределу при $x\to\infty$. Это равенство следует из (28) и [28b].

* В правой части следует перейти к пределу при $x\to\infty$.

Φ Это равенство — асимптотическое (при $x\to\infty$).

и вообще

$$a^{\infty a} = \frac{x^{\infty a}}{(x+a)^{\infty x}} x^{a} \tag{29}$$

с тем большей точностью, чем большим взято x.

Это выражение в своем значении совпадает с тем, которое принято для случая, когда a — целое положительное число и, следовательно, $a^{\infty a}$ представляет произведение целых чисел от 1 до a. В дополнение к предыдущему мы примем, что для любого значения n и a выполняется равенство

$$n^{\infty a} = \frac{n^{\infty n}}{(n-a)^{\infty n-a}}, \tag{30}$$

которое само собою выполняется для целых чисел [42].

Идя по избранному ранее пути, можно продолжить приближение к значению функции от большого числа. В качестве примера рассмотрим равенство

$$x^{\infty x} = \sqrt{2\pi}\, x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x+\varphi(x)}, \tag{31}$$

где, как мы видели, функция $\varphi(x)$ разлагается в ряд по отрицательным степеням x. Если бы в этом разложении мы дошли до x^{-n} и при этом показали, как это имело место при $n=0$, что сумма остальных членов заключена между определенными границами, которые сами при возрастании x уменьшаются до нуля, то можно показать то же для следующего члена x^{-n-1}.

Итак, пусть

$$\varphi(x) = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \ldots + \frac{A_n}{x^n} + F(x).$$

Равенство (31) дает:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right) \log\left(1 - \frac{1}{x}\right) = -1 + \varphi(x) - \varphi(x-1),$$

откуда следует:

$$\varphi(x-1) - \varphi(x) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{2(i+1)(i+2)x^{i+1}} = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i} i}{2(i+1)(i+2)(x-1)^{i+1}}.$$

Далее

$$F(x-1)-F(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2}{2(i+1)(i+2)x^{i+1}}-\sum_{\lambda=1}^{n}A_\lambda\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(\lambda+i-1)_0^{\infty i}}{x^{\lambda+i}}.$$

Если здесь подставить $i-\lambda+1$ на место i, то получится:

$$F(x-1)-F(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i}{2(i+1)(i+2)x^{i+1}}-\sum_{\lambda=1}^{n}A_\lambda\sum_{i=\lambda}^{\infty}\frac{i_0^{\infty\lambda-1}}{x^{i+1}}\,{}^{*},$$

$$F(x-1)-F(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i}{2(i+1)(i+2)x^{i+1}}-\sum_{\lambda=1}^{n}A_\lambda\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i_0^{\infty\lambda-1}}{x^{i+1}}+\sum_{\lambda=2}^{n}\frac{A_\lambda}{x^\lambda}={}^{\star}$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\left\{\frac{i}{2(i+1)(i+2)x^{i+1}}-\sum_{\lambda=1}^{n}A_\lambda i_0^{\infty\lambda-1}x^{-i-1}\right\}+\sum_{\lambda=2}^{n}\frac{A_\lambda}{x^\lambda}=$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i-2\sum\limits_{\lambda=1}^{n}A_\lambda(i+2)_0^{\infty\lambda+1}(\lambda+1)^{\infty 2}}{2(i+2)^{\infty 2}x^{i+1}}+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{A_{i+1}}{x^{i+1}}\,{}^{\oslash}.$$

Подобным же образом мы найдем:

$$F(x-1)-F(x)=$$

$$=-\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i\frac{i-2\sum\limits_{\lambda=1}^{n}(-1)^{\lambda-1}A_\lambda(i+2)_0^{\infty\lambda+1}(\lambda+1)^{\infty 2}}{2(i+2)^{\infty 2}(x-1)^{i+1}}-\sum_{i=1}^{n-2}\frac{A_{i+1}}{(x-1)^{i+1}}\,{}^{♀}.$$

Для определения n неизвестных коэффициентов, которые по порядку получаются из A_λ, служат n уравнений

$$\frac{1}{2}i=\sum_{\lambda=1}^{i}(\lambda+1)^{\infty 2}(i+2)_0^{\infty\lambda+1}A_\lambda\,{}^{‡},\tag{32}$$

---

* Здесь используется тождество $n_0^{\infty m}=n_0^{\infty n-m}$.

⋆ Если $n<m$ (n и m — целые положительные числа), то $n^{\infty m}=0$.

⊘ В оригинале в этих равенствах пропущены слагаемые $\sum\limits_{\lambda=2}^{n}\frac{A_\lambda}{x^\lambda}$ и $\sum\limits_{i=1}^{n-1}\frac{A_{i+1}}{x^{i+1}}$.

♀ В оригинале это равенство, частично в связи с ошибкой в предыдущих равенствах, имеет вид

$$F(x-1)-F(x)=-\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i\frac{i-2\sum\limits_{\lambda=1}^{n}A_\lambda(i+2)^{\infty\lambda+1}(\lambda+1)^{\infty 2}}{2(i+2)^{\infty 2}(x-1)^{i+1}}.$$

‡ В оригинале в этом равенстве верхний индекс суммирования не i, а n — это связано с отмеченными в предыдущих сносках ошибками.

где на место i надо последовательно подставить все числа от $i = 1$ до $i = n$ [43]. Тогда разность $F(x-1) - F(x)$ оказывается выраженной двояким образом, а именно:

$$F(x-1) - F(x) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{i - 2\sum\limits_{\lambda=1}^{n} (\lambda+1)^{\infty 2} (i+2)_0^{\infty \lambda+1} A_\lambda}{2(i+2)^{\infty 2} x^{i+1}}, \tag{33}$$

$$= -\sum_{i=n+1}^{\infty} (-1)^i \frac{i - 2\sum\limits_{\lambda=1}^{n} (-1)^{\lambda-1} (\lambda+1)^{\infty 2} (i+2)_0^{\infty \lambda+1} A_\lambda}{2(i+2)^{\infty 2} (x-1)^{i+1}} *. \tag{34}$$

Здесь n есть наибольшее значение λ; следовательно, $n-1$ есть высший показатель при i; если теперь рассматривать все A_λ как положительные, то получим, что каждый член ряда (34) по абсолютной величине меньше чем

$$\frac{\frac{1}{2} i^{n-1} \left\{1 + \sum\limits_{\lambda=1}^{n} \frac{A_\lambda}{(\lambda-1)^{\infty \lambda-1}}\right\}}{(x-1)^{i+1}};$$

следовательно, надо только взять x настолько большим, чтобы

$$\log(x-1) > \log(n+1) + \frac{1}{n+1} \log\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{A_\lambda}{(\lambda-1)^{\infty \lambda-1}}\right\},$$

и тогда каждый член ряда по величине станет меньше единицы и при дальнейшем увеличении x будет убывать в любом отношении. Если увеличить x таким образом, то можно наконец, достичь того, что по величине

$$F(x-1) - F(x) < \frac{P}{(x-1)^{n+2}},$$

$$> \frac{P}{x^{n+2}},$$

где P зависит от n [44]. Так как доказано, что $F(x)$ становится нулем при $x = \infty$, то имеем:

$$F(x) < P \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(x+i-1)^{n+2}}.$$

---

* В оригинале под знаком внутренней суммы в числителе дроби пропущен множитель $(-1)^{\lambda-1}$.

Если применить к этому случаю наш метод суждения о сходимости рядов, то получим:

$$F(x) < \frac{P}{(x-1)^{n+1}} \left\{ \frac{1}{2^{\frac{n+1}{n+2}} - 1} - 1 \right\}^{*}.$$

С другой стороны, мы имеем [ур. (33)]:

$$F(x-1) - F(x) > \frac{P}{(x+n+1)^{\infty n+2}} =$$

$$= \frac{P}{n+1} \left\{ \frac{1}{(x+n)^{\infty n+1}} - \frac{1}{(x+n+1)^{\infty n+1}} \right\}, \qquad [34a]$$

откуда следует:

$$F(x) > \frac{P}{(n+1)(x+n+1)^{\infty n+1}} {}^{*}. \qquad [34b]$$

Обе границы, между которыми заключено $F(x)$, определяют вместе с тем точность вычисления в предположении, что в равенстве (31) x взято достаточно большим.

Числа A_λ, которые мы сейчас рассмотрим ближе, должны быть определены из выражения (32), в которое на место i подставляются по порядку все целые числа от 1 до n. Таким образом, для определения любого A_n служит уравнение

$$\frac{1}{2} n = \sum_{\lambda=1}^{n} (\lambda+1)^{\infty 2} (n+2)_c^{\infty \lambda+1} A_\lambda$$

или в другом виде

$$\frac{n}{2(n+2)(n+1)} = \sum_{\lambda=1}^{n} n_c^{\infty \lambda-1} A_\lambda. \qquad (35)$$

---

* В оригинале это неравенство имеет вид

$$F(x) < \frac{2P}{(x-1)^{n+1}} \left\{ \frac{2^{-\frac{1}{n+2}}}{2^{\frac{n+1}{n+2}} - 1} - 1 \right\}.$$

* В этом неравенстве вместо $F(x)$ следует писать $|F(x)|$. Знак абсолютной величины подразумевается и в предшествующих неравенствах.

Из (33) следует, что при достаточно большом x знак величины $F(x-1) - F(x)$ совпадает со знаком коэффициента при x^{-n-2} и остается, следовательно, неизменным; это дает основание для получения неравенства [34b] при помощи суммирования неравенств вида [34a].

Отсюда видно, что множители A_λ принадлежат ряду

$$L = A_1 + A_2 x + A_3 x_0^2 + A_4 x_0^3 + \ldots = \sum_{\lambda=1}^{\infty} A_\lambda x_0^{\lambda-1},$$

произведение которого с другим

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} x_0^i$$

дает:

$$e^x L = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} (\lambda + i - 1)_0^{\infty\lambda-1} A_\lambda x_0^{i+\lambda-1} = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \sum_{n=\lambda-1}^{\infty} n_0^{\infty\lambda-1} A_\lambda x_0^n \; * =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x_0^n \sum_{\lambda=1}^{n+1} n_0^{\infty\lambda-1} A_\lambda \; \star.$$

Применяя равенство (35), мы заключаем отсюда, что

$$e^x L = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n x_0^n}{2(n+1)(n+2)} + \sum_{n=0}^{\infty} A_{n+1} x_0^n =$$

$$= \frac{1}{2x} \sum_{n=0}^{\infty} x_0^{n+1} - \frac{1}{x^2} \sum_{n=0}^{\infty} x_0^{n+2} + \sum_{\lambda=1}^{\infty} A_\lambda x_0^{\lambda-1} =$$

$$= \frac{1}{2x}(e^x - 1) - \frac{1}{x^2}(e^x - 1 - x) + L,$$

откуда следует:

$$\frac{e^x + 1}{e^x - 1} = \frac{2}{x} + \sum_{\lambda=1}^{\infty} 2x A_\lambda x_0^{\lambda-1} = \frac{2}{x} + \sum_{\lambda=1}^{\infty} 2\lambda A_\lambda x_0^{\lambda}.$$

Мы теперь закончим наше исследование некоторыми замечаниями о функции, значение и способ вычисления которой определены равенством (29).

---

* В оригинале в этой части равенств переставлены знаки $\sum$. Кроме того, в оригинале вслед за этой частью равенств следует исключенная нами следующая часть:

$$= \sum_{n=\lambda-1}^{\infty} x_0^n \sum_{\lambda=1}^{n+1} n_0^{\infty\lambda+1} A_\lambda =$$

$\star$ Так как $n^{\infty m} = 0$, если $m > n$ (m и n — целые положительные числа), то

$$\sum_{\lambda=1} \sum_{n=\lambda-1}^{\infty} n_0^{\lambda-1} A_\lambda x_0^n = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} n_0^{\infty\lambda-1} A_\lambda x_0^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x_0^n \sum_{\lambda=1}^{\infty} n_0^{\infty\lambda-1} A_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} x_0^n \sum_{\lambda=1}^{n+1} n_0^{\infty\lambda-1} A_\lambda.$$

Для любых положительных чисел n, m и далее для отрицательных, меньших $\frac{1}{2}$ по абсолютной величине, интегрирование по частям дает *:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2n} x \cos^{2m} x\, dx = \frac{n+m+1}{n+\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2n+2} x \cos^{2m} x\, dx;$$

вообще мы имеем, если r означает целое положительное число:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2n} x \cos^{2m} x\, dx = \frac{(n+m+r)^{\infty r}}{\left(n+r-\frac{1}{2}\right)^{\infty r}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2n+2r} x \cos^{2m} x\, dx.$$

Здесь выражение

$$\sin^{2n+2r} x \cos^{2m} x$$

достигает своего наибольшего значения при

$$\operatorname{tang} x = \sqrt{\frac{n+r}{m}};$$

следовательно, можно всегда взять r настолько большим, чтобы сколь угодно приблизить x к пределу интеграла $\frac{\pi}{2}$, и одновременно принять, что

$$x = \frac{1}{2}\pi - \omega,$$

$$\sin x = e^{-\frac{1}{2}\omega^2},$$

$$\cos x = \omega.$$

Таким образом, мы получим равенство

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2n} x \cos^{2m} x\, dx = \frac{(n+m+r)^{\infty r}}{\left(n+r-\frac{1}{2}\right)^{\infty r}} \int_0^{\infty} e^{-(n+r)\omega^2} \omega^{2m}\, d\omega,$$

---

* Следующие далее выкладки, кончая равенством [35a], являются, в основном, повторением аналогичных выкладок в сочинении «Способ уверяться в исчезании бесконечных строк...» (стр. 111—113 наст. тома).

которое тем вернее, чем большим взято r. Следовательно, при $r=\infty$ мы имеем с полной строгостью [ур. (29)]:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2n} x \cos^{2m} x\, dx = \frac{(n+m+r)^{\infty r}}{2\left(n+r-\frac{1}{2}\right)^{\infty r}} (n+r)^{-m-\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} e^{-x} x^{m-\frac{1}{2}}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1+\frac{n}{r}\right)^{-m-\frac{1}{2}} \frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)^{\infty n-\frac{1}{2}}}{(n+m)^{\infty n+m}} \int_0^{\infty} e^{-x} x^{m-\frac{1}{2}}\, dx =$$

$$= \frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)^{\infty n-\frac{1}{2}}}{2(n+m)^{\infty n+m}} \int_0^{\infty} e^{-x} x^{m-\frac{1}{2}}\, dx. \qquad [35a]$$

Отсюда мы заключаем, что для любых чисел $n+1>0$, $m+1>0$

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^n\, dx = \frac{n^{\infty n}}{m^{\infty m}} \int_0^{\infty} e^{-x} x^m\, dx\,^{*}.$$

При $m=0$ это дает:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^n\, dx = n^{\infty n}.$$

При $n=\frac{1}{2}$, $n=-\frac{1}{2}$ получаем:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{\frac{1}{2}}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{\pi}.$$

---

* Это равенство легко получить из [35a], если заменить соответственно n и m через $n+\frac{1}{2}$ и $m+\frac{1}{2}$ и учесть тождество

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \cos^{2m+1} x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x \cos^{2n+1} x\, dx.$$

Вообще мы имеем при $n+1>0$, $m+1>0$:

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^n x \cos^m x \, dx = \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\infty\left(\frac{n-1}{2}\right)} \left(\frac{m-1}{2}\right)^{\infty\left(\frac{m-1}{2}\right)}}{2\left(\frac{n+m}{2}\right)^{\infty\frac{n+m}{2}}}. \qquad (36)$$

Подобным же образом можно найти еще некоторые интегралы *; например, при $n+1>0$ и при любом числе i получаем:

$$\int\limits_0^{\pi} \sin ix \sin^n x \, dx = \frac{(n+2+i)(n+2-i)}{(n+2)(n+1)} \int\limits_0^{\pi} \sin ix \sin^{n+2} x \, dx.$$

Вообще для любого целого числа r

$$\int\limits_0^{\pi} \sin ix \sin^n x \, dx = \frac{\left(\frac{n+i}{2}+r\right)^{\infty r} \left(\frac{n-i}{2}+r\right)^{\infty r}}{\left(\frac{n}{2}+r\right)^{\infty r} \left(\frac{n-1}{2}+r\right)^{\infty r}} \int\limits_0^{\pi} \sin ix \sin^{n+2r} x \, dx.$$

При $r=\infty$ отсюда следует:

$$\int\limits_0^{\pi} \sin ix \sin^n x \, dx = \frac{\pi n^{\infty n} \sin \frac{1}{2} i\pi}{2^n \left(\frac{n+i}{2}\right)^{\infty\frac{n+i}{2}} \left(\frac{n-i}{2}\right)^{\infty\frac{n-i}{2}}}. \qquad (37)$$

Точно так же находим:

$$\int\limits_0^{\pi} \cos ix \sin^n x \, dx = \frac{\pi n^{\infty n} \cos \frac{1}{2} i\pi}{2^n \left(\frac{n+i}{2}\right)^{\infty\frac{n+i}{2}} \left(\frac{n-i}{2}\right)^{\infty\frac{n-i}{2}}}. \qquad (38)$$

При $n=i$ получается:

$$\int\limits_0^{\pi} \sin nx \sin^n x \, dx = \pi\, 2^{-n} \sin \frac{1}{2} n\pi,$$

$$\int\limits_0^{\pi} \cos nx \sin^n x \, dx = \pi\, 2^{-n} \cos \frac{1}{2} n\pi.$$

---

* Дальнейшее, кончая формулой [39a], является сокращенным повторением изложенного в сочинении «Способ увериться в исчезании бесконечных строк...» (стр. 119—122 наст. тома).

Оба случая (37) и (38) объединяются в одном интеграле

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos ix \cos^n x\, dx = \frac{\pi n^{\infty n}}{2^{n+1}\left(\frac{n+i}{2}\right)^{\infty\frac{n+i}{2}}\left(\frac{n-i}{2}\right)^{\infty\frac{n-i}{2}}} \tag{39}$$

и при $i=n$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos nx \cos^n x\, dx = \frac{\pi}{2^{n+1}}. \qquad [39a]$$

Этот интеграл впервые найден Пуассоном (Journ. de l'école polyt. т. XII, p. 490).

Нет никаких препятствий рассматривать a в уравнении (29) как мнимое, откуда следует, что интегралы (36) и (39) остаются еще верными, если в $n+1$ и $m+1$ действительная часть больше нуля. К этим интегралам можно присоединить следующий *:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (e^{2ix}+e^{-2ix}) \cos^{2n} x\, dx =$$

$$= \frac{\pi (2n)^{\infty 2n}}{(n+i\sqrt{-1})^{\infty(n+i\sqrt{-1})}(n-i\sqrt{-1})^{\infty(n-i\sqrt{1})}},$$

где $n > -\frac{1}{2}$, или по крайней мере его действительная часть удовлетворяет этому условию. Этот последний интеграл можно или непосредственно получить из (39), или получить тем же методом.

Наконец, рассмотрим еще интеграл

$$f(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{x\sqrt{-1}}\, dx}{(p+x\sqrt{-1})^n},$$

где p означает любое положительное число, а n также любое положительное число или мнимое, у которого действительная часть положительна.

---

* См. формулу (127) в сочинении «Способ увериться...» (стр. 162 наст. тома).

Если продифференцировать по p и проинтегрировать по частям, то получим:

$$\frac{df(n)}{dp}+f(n)=0.$$

Следовательно,

$$f(n)=e^{-p}\psi(n),$$

где $\psi(n)$ не зависит от p. Выражению для $\psi(n)$ можно еще придать такой вид:

$$\psi(n)=2\frac{e^{p}}{p^{n-1}}\int_{0}^{\frac{1}{2}\pi}\cos(nx-p\operatorname{tang}x)\cos^{n-2}x\,dx\text{*}\,[^{45}]. \qquad (39b)$$

Интегрирование по частям показывает также, что*

$$\psi(n)=n\psi(n+1).$$

Вообще для любого целого числа r получается:

$$\psi(n)=(n+r-1)^{-r}\psi(n+r),$$

т. е.

$$\psi(n)=\frac{2(n+r-1)^{-r}e^{p}}{p^{n+r-1}}\int_{0}^{\frac{1}{2}\pi}\cos(nx-p\operatorname{tang}x+rx)\cos^{n+r-2}x\,dx^{\oslash},$$

или, если подставить $p+r$ на место p,

$$\psi(n)=\frac{2(n+r-1)^{-r}e^{p+r}}{(p+r)^{n+r-1}}\int_{0}^{\frac{1}{2}\pi}\cos(nx-p\operatorname{tang}x+rx-r\operatorname{tang}x)\cos^{n+r-2}x\,dx.$$

Если r — весьма большое число, то элемент под знаком интеграла принимает свое наибольшее значение, когда x очень близко к нулю;

---

* В оригинале отсутствует множитель 2 в правой части [39b].

* См. формулу (111) сочинения «Способ увериться...» (стр. 151 наст. тома).

⊘ В оригинале отсутствует множитель 2 в правой части этого и следующих двух равенств.

следовательно, в этом случае

$$\psi(n) = \frac{2(n+r-1)^{\infty r} e^{p+r}}{(p+r)^{n+r-1}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{n+r-2} x\, dx \, * \qquad [39c]$$

или [ур. (29), (39)]

$$\psi(n) = \frac{2\pi \cdot r^{\infty r} r^{n-1} e^{p+r} (n+r-2)^{\infty n+r-2}}{(n-1)^{\infty n-1}(p+r)^{n+r-1} 2^{n+r-1} \left(\frac{n+r}{2}-1\right)^{\infty \frac{n+r}{2}-1} \left(\frac{n+r}{2}-1\right)^{\infty \frac{n+r}{2}-1}} \, \star .$$

Здесь [ур. (31)]

$$r^{\infty r} = \sqrt{2\pi}\, r^{r+\frac{1}{2}} e^{-r},$$

$$(n+r-2)^{\infty n+r-2} = \sqrt{2\pi}\,(n+r-2)^{n+r-\frac{3}{2}} e^{-n-r+2},$$

$$\left(\frac{n+r}{2}-1\right)^{\infty \frac{n+r}{2}-1} = \sqrt{2\pi}\left(\frac{n+r}{2}-1\right)^{\frac{n+r-1}{2}} e^{-\frac{n+r}{2}+1}.$$

Отсюда имеем:

$$\psi(n) = \frac{\pi e^p r^{n+r-1}}{(n-1)^{\infty n-1}(p+r)^{n+r-1}},$$

и так как

$$\left(1+\frac{p}{r}\right)^{n+r-1} = e^p \, ^{\circledcirc},$$

то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{x\sqrt{-1}}dx}{(p+x\sqrt{-1})^n} dx = \frac{2\pi e^{-p}}{(n-1)^{\infty n-1}}$$

для всех положительных значений p и n, а также и для тех мнимых значений, у которых действительная часть положительна.

Из уравнения (29) непосредственно следует:

$$a^{\infty a}(-a)^{\infty -a} = \frac{a\pi}{\sin(a\pi)} \, ♀,$$

---

* Подробное обоснование этого равенства см. в примечании [21].

⋆ В оригинале отсутствует множитель 2 в числителе и множитель $(n-1)^{\infty n-1}$ в знаменателе.

⊚ Здесь, как и выше, предположено, что $r \to \infty$.

♀ Вывод этого равенства дан Лобачевским в сочинении «Способ увериться...» [формулы (24), (40), (43)].

что справедливо также для мнимых значений α; например, для действительных значений x имеем:

$$(x\sqrt{-1})^{\infty x\sqrt{-1}}(-x\sqrt{-1})^{\infty - x\sqrt{-1}} = \frac{2\pi x}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}},$$

а для действительных значений α и β

$$(\alpha+\beta\sqrt{-1})^{\infty\alpha+\beta\sqrt{-1}}(-\alpha-\beta\sqrt{-1})^{\infty-\alpha-\beta\sqrt{-1}} =$$

$$= \frac{2\pi(\alpha+\beta\sqrt{-1})}{\sin\alpha\pi(e^{\pi\beta}+e^{-\pi\beta})+\sqrt{-1}\cos\alpha\pi(e^{\pi\beta}-e^{-\pi\beta})}.$$

ПРИМЕЧАНИЯ

{1}

Об исчезании тригонометрических строк

[1] Доказательство сходимости ряда, данное Дирихле в цитированной статье, вполне строгое. Однако равенство

$$\int_0^\infty \frac{\sin\varphi}{\varphi}\,d\varphi = \frac{\pi}{2}$$

действительно не было в этой статье обосновано. См. об этом подробнее во вводной статье [1]).

[2] При $\mu < \frac{1}{2}$ и $b > a$

$$\left| \int_a^b \frac{\mu(2-\mu) f(x)\,dx}{\mu^2 + 4(1-\mu)\sin^2\frac{\pi x - \omega}{2}} - \int_a^b \frac{2\mu f(x)\,dx}{\mu^2 + 4\sin^2\frac{\pi x-\omega}{2}} \right| =$$

$$= \left| \int_a^b \frac{\mu^2\left(4\sin^2\frac{\pi x-\omega}{2} - \mu^2\right) f(x)\,dx}{\left[\mu^2 + 4(1-\mu)\sin^2\frac{\pi x-\omega}{2}\right]\left[\mu^2 + 4\sin^2\frac{\pi x-\omega}{2}\right]} \right| <$$

$$< \int_a^b \frac{\mu^2\left(\mu^2 + 4\sin^2\frac{\pi x-\omega}{2}\right)|f(x)|\,dx}{\left(\mu^2 + 2\sin^2\frac{\pi x-\omega}{2}\right)\left(\mu^2 + 4\sin^2\frac{\pi x-\omega}{2}\right)} < 2\mu^2 \int_a^b \frac{|f(x)|\,dx}{\mu^2 + 4\sin^2\frac{\pi x-\omega}{2}}$$

С другой стороны, если функция $f(x)$ равномерно ограничена в интервале (0,1), то, как бы малы ни были положительные числа ε и δ,

---

1) Стр. 21 наст. тома.

можно выбрать столь малое положительное число μ_0, что при $\mu < \mu_0$

$$2\mu^2 \left| \int_0^{\frac{\omega-\delta}{\pi}} \frac{|f(x)|\,dx}{\mu^2 + 4\sin^2\frac{\pi x - \omega}{2}} + \int_{\frac{\omega+\delta}{\pi}}^{1} \frac{|f(x)|\,dx}{\mu^2 + 4\sin^2\frac{\pi x - \omega}{2}} \right| < \varepsilon.$$

В то же время при любом μ $(0 < \mu < 1)$

$$2\mu^2 \int_{\frac{\omega-\delta}{\pi}}^{\frac{\omega+\delta}{\pi}} \frac{|f(x)|\,dx}{\mu^2 + 4\sin^2\frac{\pi x - \omega}{2}} < C\delta,$$

где $C > 0$ — постоянная.

Таким образом,

$$2\mu^2 \int_0^1 \frac{|f(x)|\,dx}{\mu^2 + 4\sin^2\frac{\pi x - \omega}{2}} < \varepsilon + C\delta$$

и, ввиду произвольности величин ε и δ, утверждение Лобачевского доказано.

[3] Если функция $f(x)$ непрерывна при $x = \frac{\pi}{\omega}$, то, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно взять $\delta = \mu r$ столь малым, чтобы

$$\left| \int_0^{\frac{\delta}{\mu}} \frac{f\left(\frac{\omega - \mu r}{\pi}\right) dr}{1 + r^2} - f\left(\frac{\omega}{\pi}\right) \int_0^{\frac{\delta}{\mu}} \frac{dr}{1 + r^2} \right| = \left| \int_0^{\frac{\delta}{\mu}} \frac{f\left(\frac{\omega + \mu r}{\pi}\right) - f\left(\frac{\omega}{\pi}\right)}{1 + r^2}\, dr \right| <$$

$$< \varepsilon \int_0^{\frac{\delta}{\mu}} \frac{dr}{1 + r^2} < \frac{\pi\varepsilon}{2}$$

и, следовательно,

$$\lim_{\mu \to 0} \left| \int_0^{\frac{\delta}{\mu}} \frac{f\left(\frac{\omega + \mu r}{\pi}\right) dr}{1 + r^2} - \frac{\pi}{2} f\left(\frac{\omega}{\pi}\right) \right| < \frac{\pi\varepsilon}{2}.$$

Аналогично

$$\lim_{\mu \to 0} \left| \int_0^{\frac{\delta}{\mu}} \frac{f\left(\frac{\omega - \mu r}{\pi}\right) dr}{1 + r^2} - \frac{\pi}{2} f\left(\frac{\omega}{\pi}\right) \right| < \frac{\pi\varepsilon}{2}.$$

Но, по доказанному ранее

$$\frac{2}{\pi}\lim_{\mu\to 0}\left[\int_0^{\frac{\delta}{\mu}}\frac{f\left(\frac{\omega+\mu r}{\pi}\right)dr}{1+r^2}+\int_0^{\frac{\delta}{\mu}}\frac{f\left(\frac{\omega-\mu r}{\pi}\right)dr}{1+r^2}\right]=$$

$$=\lim_{\mu\to 0}\int_0^1\frac{\mu(2-\mu)f(x)\,dx}{\mu^2+4(1-\mu)\sin^2\frac{\pi x-\omega}{2}}$$

и, следовательно, эта величина от δ не зависит.

[4] Повторенные Лобачевским рассуждения Пуассона, строго говоря, доказывают только, что

$$f\left(\frac{\omega}{\pi}-0\right)+f\left(\frac{\omega}{\pi}+0\right)=\int_0^1 f(x)\,dx+2\lim_{\mu\to 1}\sum_{i=1}^{\infty}\mu^i\int_0^1\cos(i\pi x-i\omega)f(x)\,dx.$$

Однако, в отличие от доказательства Пуассона, доказательство Лобачевского теоремы о разложении функции в ряд Фурье является, по существу, строгим. Действительно, рассуждениям Пуассона у Лобачевского предшествует доказательство (справедливое при определенных условиях) сходимости ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^1\cos(i\pi x-i\omega)f(x)\,dx.$$

Следовательно, каково бы ни было $\varepsilon>0$, при заданном ω можно найти такое N, что при $n>N$ и $p>n$ имеет место неравенство

$$\left|\sum_{i=n}^{p}\int_0^1\cos(i\pi x-i\omega)f(x)\,dx\right|<\varepsilon$$

и, на основании известной леммы Абеля, если $0\leqslant\mu\leqslant 1$,

$$\left|\sum_{i=n}^{p}\mu^i\int_0^1\cos(i\pi x-i\omega)f(x)\,dx\right|<\mu^n\varepsilon\leqslant\varepsilon.$$

Таким образом, ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mu^i\int_0^1\cos(i\pi x-i\omega)f(x)\,dx$$

сходится равномерно относительно μ, если $0\leqslant\mu\leqslant 1$ и, следовательно,

$$\lim_{\mu\to 1}\sum_{i=1}^{\infty}\mu^i\int_0^1\cos(i\pi x-i\omega)f(x)\,dx=\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^1\cos(i\pi x-i\omega)f(x)\,dx.$$

[5] Разность, например, между первыми членами правых частей [24a] и [24b] легко преобразуется к виду

$$\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2}(a-\omega)}\times$$

$$\times\int_0^{\delta}\frac{\sin\left[\left(i+\frac{1}{2}\right)(a-\delta-\omega)\pi\right]}{\sin\frac{\pi}{2}(a-\delta-\omega)}\sin\frac{\pi\delta}{4}\cos\left[\frac{\pi}{2}(a-\omega)-\frac{\pi\delta}{4}\right]f(a-\delta)\,d\delta. \quad (a)$$

Лобачевский фактически допускает лишь изолированные точки неограниченности для $f(x)$ и $f'(x)$ и притом только такие, что при приближении к ним как слева, так и справа, эти функции стремятся к бесконечности определенного знака. В силу этих условий, интегрируемость функции $f(x)$ в окрестности точки a равносильна ее абсолютной интегрируемости и в интервале $(a, a-\delta_0)$ при достаточно малом δ_0 функция $f(x)$ монотонна; следовательно, произведение $f(a-\delta)\sin\frac{\pi\delta}{4}$ ограничено, и если $\delta<|a-\omega|$, то подинтегральная функция в (a) равномерно ограничена и величина (a) стремится к нулю при $\delta\to 0$ равномерно относительно i.

[6] Если $P(i, \delta)$ — выражение [24a], то для того, чтобы доказать, что $P=\lim\limits_{i\to\infty}P(i, \delta)\to 0$ при $\delta\to 0$, нужно сначала доказать, что $\lim\limits_{i\to\infty}P(i, \delta)$ существует.

Докажем прежде всего существование предела $\lim\limits_{i\to\infty}P'(i, \delta)$, где $P'(i, \delta)$ — выражение [24b].

Как уже отмечалось в предыдущем примечании, Лобачевский фактически предполагает, что при достаточно малом δ функция $f(x)$ монотонна и знакопостоянна в интервалах $(a-\delta, a)$ и $(a, a+\delta)$.

Если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — нули функции $\sin\left[\left(i+\frac{1}{2}\right)(a-\omega-\delta)\pi\right]$ в интервале $(0, \delta)$, то

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}}\sin\left[\left(i+\frac{1}{2}\right)(a-\omega-\delta)\pi\right]d\delta=\pm\frac{2}{\pi\left(i+\frac{1}{2}\right)}$$

и

$$\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}}\sin\left[\left(i+\frac{1}{2}\right)(a-\omega-\delta)\pi\right]f(a+\delta)\,d\delta\right|<\frac{2}{\pi\left(i+\frac{1}{2}\right)}\int_{x_1}^{x_2}|f(a+\delta)|\,d\delta.$$

С другой стороны, члены последовательности $I_1, I_2, I_3, \ldots$, где

$$I_k = \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \sin\left[\left(i+\frac{1}{2}\right)(a-\omega-\delta)\pi\right] f(a+\delta)\,d\delta,$$

по абсолютной величине монотонно убывают и знаки всяких двух соседних членов этой последовательности взаимно противоположны; следовательно

$$\left|\int\limits_0^{\delta} \sin\left[\left(i+\frac{1}{2}\right)(a-\omega-\delta)\pi\right] f(a+\delta)\,d\delta\right| < \frac{2}{\pi\left(i+\frac{1}{2}\right)}\int\limits_0^{x_1} |f(a+\delta)|\,d\delta \to 0$$

при $i \to \infty$.

Применяя такие же рассуждения к другому члену выражения $P'(i, \delta)$, убеждаемся, что $\lim\limits_{i\to\infty} P'(i, \delta) = 0$ при любом достаточно малом δ.

Переходя к выражению $P(i, \delta)$, имеем, сохраняя прежние обозначения:

$$\int\limits_0^{x_1} \frac{\sin\left[\left(i+\frac{1}{2}\right)(a+\delta-\omega)\pi\right]}{\sin\frac{\pi}{2}(a+\delta-\omega)} f(a+\delta)\,d\delta =$$

$$= \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2}(a+\delta_0-\omega)}\int\limits_0^{x_1} \sin\left[\left(i+\frac{1}{2}\right)(a+\delta-\omega)\pi\right] f(a+\delta)\,d\delta.$$

$$\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{\sin\left[\left(i+\frac{1}{2}\right)(a+\delta-\omega)\pi\right]}{\sin\frac{\pi}{2}(a+\delta-\omega)} f(a+\delta)\,d\delta =$$

$$= \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2}(a+\delta_k-\omega)}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \sin\left[\left(i+\frac{1}{2}\right)(a+\delta-\omega)\pi\right] f(a+\delta)\,d\delta,$$

где $0 < \delta_0 < x_1$, $x_k < \delta_k < x_{k+1}$.

Можно взять δ столь малым, чтобы функция $\sin\frac{\pi}{2}(a+\delta-\omega)$ была знакопостоянной и монотонной в интервале $(0, \delta)$; тогда множитель перед интегралом в правой части последнего равенства определит монотонную последовательность и, на основании известной леммы Абеля и рассуждений, примененных выше к выражению

$P'(i, \delta)$, получим

$$\left|\int_0^\delta \frac{\sin\left[\left(i+\frac{1}{2}\right)(a+\delta-\omega)\pi\right]}{\sin\frac{\pi}{2}(a+\delta-\omega)} f(a+\delta)\,d\delta\right| <$$

$$< a\frac{2}{\pi\left(i+\frac{1}{2}\right)}\int_0^{x_s} |f(a+\delta)|\,d\delta,$$

где a — наибольшая из величин $\left|\frac{1}{\sin\left[\frac{\pi}{2}(a+\delta_k-\omega)\right]}\right|$ $(k=0, 1, 2, \ldots, n)$.

Проведя подобные выкладки для другого члена, входящего в $P(i, \delta)$, легко убедиться, что $\lim\limits_{i\to\infty} P(i, \delta)=0$ при всяком достаточно малом δ.

Таким образом, утверждение Лобачевского справедливо, хотя переход к пределу при $\delta\to 0$ излишен.

[7] То-есть $\lim\limits_{i\to\infty} P(i, \delta)=\frac{1}{2}[f(a-0)+f(a+0)]$.

Здесь опять-таки доказано не существование $\lim\limits_{i\to\infty} P(i, \delta)$, а существование предела выражения, отличающегося от $P(i, \delta)$ на величину бесконечно малую вместе с δ.

Для того, чтобы доказать существование $\lim\limits_{i\to\infty} P(i, \delta)$, достаточно воспользоваться равенством

$$\int_0^\delta \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)\pi\delta}{\sin\frac{\pi\delta}{2}} f(a+\delta)\,d\delta = \int_0^{\frac{1}{i+\frac{1}{2}}} \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)\pi\delta}{\sin\frac{\pi\delta}{2}} f(a+\delta)\,d\delta +$$

$$+\int_{\frac{1}{i+\frac{1}{2}}}^{\frac{2}{i+\frac{1}{2}}} \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)\pi\delta}{\sin\frac{\pi\delta}{2}} f(a+\delta)\,d\delta + \ldots$$

$$\ldots + \int_{\frac{k}{i+\frac{1}{2}}}^{\delta} \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)\pi\delta}{\sin\frac{\pi\delta}{2}} f(a+\delta)\,d\delta,$$

монотонностью $f(a+\delta)$ при достаточно малом δ и применить рассуждения, которыми пользовался Дирихле при доказательстве теоремы о разложении функции в ряд Фурье и которые были хорошо известны Лобачевскому, как это видно, в частности, из ссылки на статью Дирихле в начале настоящего сочинения.

[8] Пусть $R_n(x) = \pi - x - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\sin kx$. Тогда

$$\int_0^c \left[c + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\sin k(c-x)\right] f(x)\,dx =$$

$$= \int_\varepsilon^c \left[c + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\sin kt\right] f(c-t)\,dt + \int_0^\varepsilon \left[c + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\sin kt\right] f(c-t)\,dt =$$

$$= \int_\varepsilon^c (c+\pi-t)\,f(c-t)\,dt - \int_\varepsilon^c R_n(t)\,f(c-t)\,dt +$$

$$+ \int_0^\varepsilon \left[c + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\sin kt\right] f(c-t)\,dt,$$

где ε произвольно $(0 < \varepsilon < c)$.

Функция $f(x)$ предположена, конечно, интегрируемой, а, как уже отмечалось выше, Лобачевский, повидимому, не делал различия между интегрируемой и абсолютно интегрируемой функциями, так как под неограниченностью функции в точке он всегда понимает стремление ее к бесконечности определенного знака с каждой стороны от этой точки.

Тождество $2\sum_1^k \frac{\sin kt}{k} = \int_0^t \frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}\,dt - t$ показывает, что величина $\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\sin kt\right|$ равномерно ограничена в интервале $(0, \varepsilon)$ и, следовательно, каково бы ни было $\delta > 0$, при достаточно малом ε

$$\left|\int_0^\varepsilon \left[c + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\sin kt\right] f(c-t)\,dt\right| < \delta.$$

В сочинении «О сходимости бесконечных рядов»[1]) Лобачевский показывает, что

$$|R_n(x)| < \frac{A}{n\sin\frac{x}{2}},$$

[1]) Стр. 190—191 наст. тома.

где A — постоянная. Следовательно, каково бы ни было ε, можно выбрать n столь большим, чтобы

$$\left| \int\limits_{\varepsilon}^{c} R_n(t) f(c-t)\, dt \right| < \delta$$

и, таким образом,

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^c \left[c + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sin k(c-x)\right] f(x)\, dx =$$
$$= \int\limits_0^c (c+\pi-t) f(c-t)\, dt = \int\limits_0^c (\pi + x) f(x)\, dx.$$

Точно так же доказывается, что

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_c^a \left[c - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sin k(x-c)\right] f(x)\, dx = -\int\limits_c^a (\pi - x) f(x)\, dx.$$

{2}

Способ увериться в исчезании бесконечных строк и приближаться к значению функций от весьма больших чисел.

[9] Трудно объяснить эту ошибку Лобачевского, так как он сам в других местах [1]) пользуется критерием Коши. Нам кажется, что эта ошибка может быть объяснена лишь следующим образом: Лобачевский сам не употребляет никаких специальных символов для обозначения предельного перехода и только с помощью словесных пояснений (не всегда четких) дает знать читателю о том, что такой переход совершен. Повидимому, слова «можем взять r так велико...» или «когда r можно взять довольно большое число» обозначают у Лобачевского, что предельный переход при $r\to\infty$ произведен. Иными словами, Лобачевский воспринял критерий Коши в изложении Дирксена как утверждение о том, что $\lim\limits_{m\to\infty} a_m$ существует, если неравенство $\lim\limits_{r\to\infty} |a_{r+m} - a_r| < \varepsilon$ имеет место при любом положительном ε, каково бы ни было m, т. е. если $\lim\limits_{r\to\infty} (a_{r+m} - a_r) = 0$ при всяком m, а потому и привел пример, противоречащий такому неправильному утверждению.

[10] Лучше сказать, что $f(x+\alpha)$ представляет собой ряд в правой части (15), причем каждый член этого ряда определяется с помощью (14), то-есть исходить из основанного на (11), (12), (13), (14) и (15) равенства

$$(x+\alpha)^{\infty x} = \psi(x)(x+\alpha)^{x+\alpha+\frac{1}{2}} e^{-x} f(x+\alpha), \tag{a}$$

[1]) См., например, стр. 127 этого сочинения (страница указана по наст. тому).

где

$$\log f(x+\alpha) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(x+\alpha+i)^{n+1}}.$$

Следует, однако, показать непротиворечивость определения функции $x^{\infty x}$, получаемого из (a) при $\alpha = 0$, и определения этой же функции с помощью равенства

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{\psi(\alpha)} = \alpha^{\infty\alpha} e^{\alpha} \tag{b}$$

(Лобачевским доказана, по сути дела, непротиворечивость этих определений только для целых положительных значений α.) Пользуясь исправленными в сносках к формулам (13) и (14) обозначениями [1]), имеем, если $|1+\alpha| > 1$,

$$\log \frac{f_2(0, \alpha)}{f_2(1, \alpha)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(1+\alpha)^{n+1}} = \left(\alpha + \frac{1}{2}\right) \log \frac{1+\alpha}{\alpha} - 1$$

и

$$\frac{f_2(0, \alpha)}{f_2(1, \alpha)} = \frac{(1+\alpha)^{\alpha+\frac{1}{2}}}{e\,\alpha^{\alpha+\frac{1}{2}}}.$$

Положив в равенстве

$$(x+\alpha)^{\infty x} = (x+\alpha)^{x+\alpha+\frac{1}{2}} e^{-x} f_2(x, \alpha)$$

$x = 1$, получим

$$f_2(1, \alpha) = \frac{e}{(1+\alpha)^{\alpha+\frac{1}{2}}};$$

следовательно,

$$f_2(0, \alpha) = \frac{1}{\alpha^{\alpha+\frac{1}{2}}}.$$

Положив в этом же равенстве $x = 0$, будем иметь $\alpha^{\infty 0} = 1$. Из равенства (a), таким образом, получаем (при $x = 0$)

$$1 = \psi(\alpha) \cdot \alpha^{\alpha+\frac{1}{2}} f(\alpha).$$

С другой стороны, это же равенство при $\alpha = 0$ дает

$$x^{\infty x} = \sqrt{2\pi}\, x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x} f(x).$$

Если в этом равенстве заменить x через α и сопоставить его с предыдущим, то получим равенство (b).

---

[1]) См. стр. 98 наст. тома.

[11] Лобачевскому не было известно, что Эйлер еще в 1729 году (письмо к Гольдбаху) нашел формулу

$$\Gamma(s+1)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{s(s+1)\dots(s+n)}\cdot n^s,$$

то-есть формулу (54) этого сочинения Лобачевского [1]). Формула (49) следует отсюда немедленно. Следует отметить, что вообще формула Эйлера была забыта, так что, например, Гаусс, который также пришел к этой формуле, тоже считал, что она найдена им впервые.

[12] Формула (59), известная под названием *теоремы умножения гамма-функции* была сначала доказана Лежандром для $n=2$ (Exercises de calcul intégral, Paris, 1811), а в общем случае сперва Гауссом (Comment. soc. regiae scient. Götting. rec., том II, 1813), а потом Лежандром (Traité des fonctions elliptiques, том II, 1826).

[13] Если под $L(1+x)$ понимать ряд [83a], то свойство [83b] имеет место только при $|x|<1$, $|y|<1$, $|x+y+xy|<1$ [как Лобачевский и указывает в своей «Алгебре» [2])], а также в случае, когда одна или несколько из величин x, y, $x+y+xy$ имеют модуль, равный 1 (а модуль каждой из остальных меньше 1) и все ряды в равенстве [83b] — сходящиеся. Однако по существу Лобачевский понимает под $L(1+x)$ функцию, совпадающую с рядом [83a], когда этот ряд сходится, и продолженную с помощью [83b].

Именно в этом и состоит смысл утверждения Лобачевского, что [83b] справедливо для всех x и y. В сочинении «О сходимости бесконечных рядов» [3]) определение функции $\log(1+x)=L(1+x)$ сформулировано более четко.

[14] При любом $a>0$, если $\frac{a}{\Delta x}$ — целое число,

$$\int_0^a\frac{\sin x}{x}\,dx=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{k=1}^{\frac{a}{\Delta x}}\frac{\sin k\,\Delta x}{k\,\Delta x}\Delta x=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{k=1}^{\frac{a}{\Delta x}}\frac{\sin k\,\Delta x}{k}.$$

Способом, при помощи которого получена оценка (83), легко притти к неравенству вида

$$\left|\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}\right|<\frac{A}{n\sin\frac{x}{2}},$$

---

1) Стр. 114 наст. тома.

2) См. т. IV, стр. 222 наст. издания.

3) Стр. 177 наст. тома.

где A — постоянная, полученному Лобачевским в статье «О сходимости бесконечных рядов» [1]). Следовательно,

$$\left|\sum_{k=\frac{a}{\Delta x}+1}^{\infty}\frac{\sin k\,\Delta x}{k}\right| < \frac{A}{\frac{a}{\Delta x}\sin\frac{\Delta x}{2}} < \varepsilon$$

равномерно относительно Δx, как мало бы ни было положительное число ε, если a достаточно велико.

Таким образом, при достаточно большом a

$$\left|\int_0^a \frac{\sin x}{x}\,dx - \lim_{\Delta x\to 0}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\,\Delta x}{k}\right| < \varepsilon.$$

[15] Если n — четное и $n\pi \leqslant x < (n+2)\pi$, то

$$L = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a+k\pi}^{a+(k+1)\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx + \int_{n\pi}^{x}\frac{\sin x}{x}\,dx,$$

а так как

$$\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a+k\pi}^{a+(k+1)\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a}^{a+\pi}(-1)^k\frac{\sin x}{x+k\pi} =$$

$$= \pi\int_a^{a+\pi}\sin x\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1}\frac{1}{(x+2k\pi)\,[x+(2k+1)\,\pi]}\,dx$$

и

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(x+2k\pi)\,[x+(2k+1)\,\pi]} = 0,$$

то нетрудно убедиться в справедливости доказываемого утверждения.

[16] Непосредственные вычисления показывают, что

$$\lim_{r\to\infty}\frac{d}{d\omega}\log\frac{\left(\frac{1}{2}\omega-1+r\right)^{\omega r}}{\left(\frac{\omega-1}{2}+r\right)^{\omega r}} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{\omega+k},$$

а следовательно, также

$$\lim_{r\to\infty}\frac{d}{d\omega}\log\left[r^{\frac{1}{2}}\frac{\left(\frac{1}{2}\omega-1+r\right)^{\omega r}}{\left(\frac{\omega-1}{2}+r\right)^{\omega r}}\right] = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{\omega+k}.$$

---

1) Стр. 190—191 наст. тома.

Равенство (49) позволяет утверждать, что

$$\lim_{r\to\infty}\log\left[r^{\frac{1}{2}}\frac{\left(\frac{1}{2}\omega-1+r\right)^{\omega r}}{\left(\frac{\omega-1}{2}+r\right)^{\omega r}}\right]=\log\frac{\left(\frac{\omega-1}{2}\right)^{\omega\frac{\omega-1}{2}}}{\left(\frac{1}{2}\omega-1\right)^{\omega\frac{1}{2}\omega-1}}.$$

Но отсюда еще не следует соответствующее равенство для производных.

[17] Запись промежуточных выкладок, приводящих к этому равенству, неправильная; в частности первый из интегралов в правой части [85b] — расходящийся. Общий интеграл [85a] при $a>0$ имеет вид $(a>0)$

$$V(a)=c_1\sin a+c_2\cos a+\sin a\int\limits_{\infty}^{a}\frac{\cos a}{a}\,da-\cos a\int\limits_{\infty}^{a}\frac{\sin a}{a}\,da.$$

Так как $V\to\frac{\pi}{2}$ при $a\to 0$ и

$$\lim_{a\to 0}\left[\sin a\int\limits_{\infty}^{a}\frac{\cos a}{a}\,da\right]=0,$$

то

$$c_2=\frac{\pi}{2}+\int\limits_{\infty}^{0}\frac{\sin a}{a}\,da$$

и, полагая $a=2\pi$, имеем

$$V(2\pi)=\frac{\pi}{2}+\int\limits_{\infty}^{0}\frac{\sin a}{a}\,da-\int\limits_{\infty}^{2\pi}\frac{\sin a}{a}\,da=-\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{\sin a}{a}\,da+\frac{\pi}{2}.$$

[18] При любом ε

$$\int\limits_{0}^{\pi-\omega}f'(x+\omega)\,dx\int\limits_{0}^{x}\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}\,dx=$$

$$=\int\limits_{0}^{\varepsilon}f'(x+\omega)\,dx\int\limits_{0}^{x}\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}\,dx+$$

$$+\int\limits_{\varepsilon}^{\pi-\omega}f'(x+\omega)\,dx\int\limits_{0}^{x}\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}\,dx.\quad(\mathrm{a})$$

Но

$$\left|\int_0^x \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}\,dx\right| < C,$$

где C — постоянная; следовательно, ввиду абсолютной интегрируемости функции $f'(x)$,

$$\left|\int_0^\varepsilon f'(x+\omega)\,dx\int_0^x \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}\,dx\right| < C'\varepsilon,$$

где C' — постоянная.

В то же время

$$\int_0^x \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}\,dx = \pi - 2\sum_{i+1}^{\infty}\frac{1}{i}\sin ix.$$

Сумма ряда в правой части этого равенства стремится при $i\to\infty$ к нулю равномерно относительно x, если $0<\varepsilon<x<2\pi$ (см., например, примечание [14]) и, следовательно, каково бы ни было $\varepsilon>0$, второй член в правой части (а) может быть сделан сколь угодно малым по модулю при достаточно большом i. Учитывая, наконец, произвольность числа ε, имеем:

$$\lim_{i\to\infty}\int_0^{\pi-\omega} f'(x+\omega)\,dx\int_0^x \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}\,dx =$$

$$= \pi\int_0^{\pi-\omega} f'(x+\omega)\,dx = \pi\,[f(\pi)-f(\omega)].$$

[19] Равенство [101 а] — асимптотическое (при $i\to\infty$). Получить его можно следующим образом. Если i — целое и положительное число, то, исходя непосредственно из определения (10), имеем

$$\left(\frac{n}{2}\right)^{\infty i} = (-1)^i\left(i-\frac{n}{2}-1\right)^{\infty i}.$$

Из (42) легко получить

$$\left(i-\frac{n}{2}-1\right)^{\infty i}=\frac{\left(i-\frac{n}{2}-1\right)^{\infty i-\frac{n}{2}-1}}{\left(-\frac{n}{2}-1\right)^{\infty-\frac{n}{2}-1}}, \tag{a}$$

а так как при $i\to\infty$ имеют место асимптотические равенства

$$i^{\infty i}\approx\sqrt{2\pi}\, i^{i+\frac{1}{2}}e^{-i}$$

и

$$\left(i-\frac{n}{2}-1\right)^{\infty i-\frac{n}{2}-1}\approx\sqrt{2\pi}\left(i-\frac{n}{2}-1\right)^{i+\frac{1}{2}}\left(i-\frac{n}{2}-1\right)^{-\frac{n}{2}-1}e^{-i+\frac{n}{2}+1},$$

то при $i\to\infty$ асимптотически

$$\frac{\left(i-\frac{n}{2}-1\right)^{\infty i-\frac{n}{2}-1}}{i^{\infty i}}\approx\left(1-\frac{\frac{n}{2}+1}{i}\right)^{i+\frac{1}{2}}\left(i-\frac{n}{2}-1\right)^{-\frac{n}{2}-1}e^{\frac{n}{2}+1}.$$

Но

$$\lim_{i\to\infty}\left(1-\frac{\frac{n}{2}-1}{i}\right)^{i+\frac{1}{2}}=e^{-\frac{n}{2}-1}\quad\text{и}\quad\lim_{i\to\infty}\frac{\left(i-\frac{n}{2}-1\right)^{-\frac{n}{2}-1}}{i-\frac{n}{2}-1}=1;$$

следовательно

$$\left(i-\frac{n}{2}-1\right)^{\infty i-\frac{n}{2}-1}\approx i^{\infty i}\, i^{\infty-\frac{n}{2}-1}. \tag{b}$$

Равенство [101a] немедленно следует из (a) и (b).

Для получения равенства [101b] представим его левую часть в следующем виде:

$$\left(\frac{n}{2}\right)^{\infty-i}=\frac{1}{\left(\frac{n}{2}+i\right)^{\infty i}}=\frac{(-1)^i}{\left(-\frac{n}{2}-1\right)^{\infty i}}.$$

Если воспользоваться для $\left(-\frac{n}{2}-1\right)^{\infty i}$ асимптотическим равенством [101a], заменив $\frac{n}{2}$ через $-\frac{n}{2}-1$, то получим [101b].

[20] Выражение [110b] показывает, что интеграл [110a] сходится при $p \neq 0$ и $n > 0$. При $p = 0$ интеграл [110a] расходится, если $n < 1$.

Интегралы, входящие в [110b] в пределах от 0 до $\frac{\pi}{2}$, при $n > 0$ сходятся абсолютно и равномерно относительно p в интервале $(-\infty, \infty)$; следовательно, интеграл [110a] сходится равномерно в интервалах $(-\infty, -\varepsilon)$ и (ε, ∞), как мало бы ни было положительное число ε. Равенство, получаемое из (111) дифференцированием по p, справедливо, если $n > 0$ и $p \neq 0$.

[21] Непосредственное исследование функции

$$\varphi(x) = (n + r)x - (p + r)\operatorname{tg} x$$

на экстремум показывает, что если r достаточно велико, то при $p < n$ эта функция положительна и монотонно возрастает в интервале $(0, x_0)$, где $x_0 = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{n-p}{p+r}}$, а в интервале $\left(x_0, \frac{\pi}{2}\right)$ монотонно убывает, причем

$$\varphi(x_0) = (n + r)\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{n-p}{p+r}} - \sqrt{(n-p)(p+r)} < \frac{(n-p)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{p+r}};$$

если же $p \geqslant n$, то $|\varphi(x)|$ монотонно возрастает во всем интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Так как легко доказать, что $\lim\limits_{r\to\infty} \varphi(r^{-k}) = 0$, если $k > \frac{1}{3}$, то, каковы бы ни были p и n, неравенство $|\varphi(x)| < \varepsilon(r)$, где $\lim\limits_{r\to\infty} \varepsilon(r) = 0$, имеет место для всех значений x из интервала $(0, r^{-k})$, если $\frac{1}{3} < k < \frac{1}{2}$ $\left(x_0 < r^{-k}\text{, если } k < \frac{1}{2} \text{ и } r \text{ достаточно велико}\right)$.

Кроме того,

$$\left|\int\limits_{r^{-k}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\left[(n+r)x - (p+r)\operatorname{tg} x\right]\cos^{n+r-2} x\,dx\right| < \int\limits_{r^{-k}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+r-2} x\,dx <$$

$$< \left(\frac{\pi}{2} - r^{-k}\right)\cos^{n+r-2}(r^{-k}) < \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{2r^{2k}}\right)^{n+r-2} < Ce^{-\frac{r^{1-2k}}{2}}, \quad \text{(a)}$$

где $C > 0$ — постоянная.

Но из (49) и (50) следует, что при $r \to \infty$ асимптотически

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+r-2} x\,dx \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{r}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}. \quad \text{(b)}$$

Сопоставляя (a) и (b), легко придти к выводу, что

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\left[(n+r)x-(p+r)\operatorname{tg}x\right]\cos^{n+r-2}x\,dx}{\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n+r-2}x\,dx}=$$

$$=\lim_{r\to\infty}\frac{\int\limits_0^{r^{-k}}\cos\left[(n+r)x-(p+r)\operatorname{tg}x\right]\cos^{n+r-2}x\,dx}{\int\limits_0^{r^{-k}}\cos^{n+r-2}x\,dx},\qquad\text{(c)}$$

если $k<\frac{1}{2}$.

С другой стороны, при $\frac{1}{3}<k<\frac{1}{2}$

$$\int\limits_0^{r^{-k}}\cos\left[(n+r)x-(p+r)\operatorname{tg}x\right]\cos^{n+r-2}x\,dx=$$

$$=\int\limits_0^{r^{-k}}\cos^{n+r-2}x\,dx-2\int\limits_0^{r^{-k}}\sin^2\frac{(n+r)x-(p+r)\operatorname{tg}x}{2}\cos^{n+r-2}x\,dx=$$

$$=\int\limits_0^{r^{-k}}\cos^{n+r-2}x\,dx-2\sin^2\frac{(n+r)\theta-(p+r)\operatorname{tg}\theta}{2}\int\limits_0^{r^{-k}}\cos^{n+r-2}x\,dx,$$

где $0<\theta<r^{-k}$.

По доказанному ранее

$$|(n+r)\theta-(p+r)\operatorname{tg}\theta|<\varepsilon(r),$$

причем $\lim\limits_{r\to\infty}\varepsilon(r)=0$, и из (c) следует, что

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\left[(n+r)x-(p+r)\operatorname{tg}x\right]\cos^{n+r-2}x\,dx}{\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n+r-2}x\,dx}=1.$$

Равенство [111c] (в котором предполагается переход к пределу при $r\to\infty$), таким образом, обосновано.

[22] Как это следует из сказанного в примечании [20], равенство вида [111a] справедливо для значений p в каждом из интервалов $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$; однако вычисление константы N (зависящей от n) следует производить для каждого из этих интервалов отдельно. Между тем значение [111d] было получено при помощи замены p через $p+r$ и перехода к пределу при $r\to\infty$; таким образом, равенство [111d] найдено для $p>0$.

[23] Из равенств

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(nx - p\operatorname{tg} x)\cos^{n-2} x\,dx = \frac{2\pi\, e^{-p} p^{n-1}}{(n-1)^{\infty n-1}},$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(nx - p\operatorname{tg} x)\cos^{n-2} x\,dx = 0$$

получаем $(i=\sqrt{-1})$:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{i(nx-p\operatorname{tg} x)}\cos^{n-2} x\,dx =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + i\sin x)^n e^{-pi\operatorname{tg} x}\cos^{n-2} x\,dx = \frac{2\pi\, e^{-p} p^{n-1}}{(n-1)^{\infty n-1}}.$$

Замена $-p\operatorname{tg} x = t$ (как уже было отмечено в предыдущем примечании, $p>0$) приводит к равенству (113), справедливому при $p>0$, $n>0$, которое можно также записать в виде

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{p-i\infty}^{p+i\infty} \frac{e^z\,dz}{z^n} = \frac{1}{(n-1)^{\infty n-1}}.$$

[24] Таким образом, строго говоря, построенное Лобачевским определение функции $\alpha^{\infty x}$ таково.

Если x — целое и положительное число, то

$$(x+\alpha)^{\infty x} = (x+\alpha)(x+\alpha-1)\ldots(\alpha+1),$$

При помощи первого из равенств (115) определяется для целых положительных значений x функция $f(x, \alpha)$

$$f(x, \alpha) = \frac{(x+\alpha)^{\infty x} e^{x}}{(x+\alpha)^{x+\alpha+\frac{1}{2}}},$$

причем для однозначности следует под $(x+\alpha)^{x+\alpha+\frac{1}{2}}$ понимать $e^{\left(x+\alpha+\frac{1}{2}\right)\log(x+\alpha)}$, где имеется в виду главное значение логарифма, то-есть $-\pi < \operatorname{Im}\log(x+\alpha) \leqslant \pi$; при таком условии непрерывность по отношению к α функции $f(x, \alpha)$ нарушается только при отрицательных значениях $x+\alpha$ и при $x+\alpha=0$.

Далее, ко всякому (комплексному) α можно подобрать целое и положительное число x_0 так, чтобы при $x \geqslant x_0$ величина $x+\alpha$ не могла принимать отрицательные значения и обращаться в нуль и чтобы ряд

$$\log X(x+\alpha) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)(x+\alpha+i)^{n+1}} \tag{a}$$

при $x \geqslant x_0$ сходился равномерно.

Поэтому второе и третье из равенств (115) определяют функцию $\psi(\alpha)$:

$$\log\psi(\alpha) = \lim_{x\to\infty}\log f(x, \alpha) = \log f(x, \alpha) - \log X(x+\alpha),$$

причем функция $\psi(\alpha)$ — аналитическая во всей плоскости, а с помощью первого равенства (115) определяется функция $(x+\alpha)^{\infty x}$

$$(x+\alpha)^{\infty x} = \psi(\alpha)(x+\alpha)^{x+\alpha+\frac{1}{2}} e^{-x} X(x+\alpha) \tag{b}$$

в области, где ряд (a) сходится абсолютно и равномерно, то-есть при всех значениях x и α, для которых $|x+\alpha+k| > 1$, где k — любое целое положительное число.

В частности,

$$x^{\infty x} = \sqrt{2\pi}\, x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x} X(x), \tag{c}$$

так как $\psi(0) = \sqrt{2\pi}$.

Равенство (c) служит, таким образом, определением функции $x^{\infty x}$ в области, определяемой неравенствами $|x+k| > 1$, где k — любое целое положительное число. Бинэ, которому приписывался приоритет в получении равенства (c), пришел к нему лишь в 1839 году, то-есть на четыре года позже, чем Лобачевский [1]).

[1]) См. вводную статью, стр. 26 наст. тома.

Распространение определения функции $\alpha^{\infty\alpha}$ на любые комплексные значения α производится Лобачевским с помощью равенства

$$\alpha^{\infty\alpha} = \frac{\sqrt{2\pi}\, e^{-\alpha}}{\psi(\alpha)}, \tag{d}$$

непротиворечивость которого с равенством (c) была показана в примечании [10].

Из определений (b) и (d), как показал Лобачевский [1]), следует, что

$$(x+\alpha)^{\infty x+\alpha} = (x+\alpha)^{\infty x}\, \alpha^{\infty\alpha}. \tag{e}$$

Это равенство обосновано, если $|x+\alpha+k|>1$ (k — любое целое положительное число).

Из равенства (c) следует, что, при $\operatorname{Re}\alpha>0$, функция $\alpha^{\infty\alpha}$ не имеет особых точек, целые отрицательные значения α являются полюсами этой функции, как это видно из (d); так, если α — целое и отрицательное, то $(x+\alpha)^{\infty x}=0$ при любом целом и положительном x. Следовательно, при α целом отрицательном $f(x,\alpha)=0$, а потому и $\psi(\alpha)=0$. Основываясь на равенстве (e), легко заключить, что никаких других особых точек функция $\alpha^{\infty\alpha}$ иметь (в конечной части плоскости) не может, так как, если x — целое и положительное, то при любом значении α, кроме целого отрицательного, $(x+\alpha)^{\infty x}\neq 0$, и если бы точка α (α не равно целому отрицательному числу) была особой, то точка $x+\alpha$ при достаточно большом целом положительном x также была бы особой, что противоречит тому, что в особой точке функции $\alpha^{\infty\alpha}$ действительная часть аргумента не может быть положительной.

Так как функция $\alpha^{\infty\alpha}$ определена во всей плоскости, то равенство (e) может служить определением функции $(x+\alpha)^{\infty x}$. Исходя из этого определения, нетрудно заключить, что $(x+\alpha)^{\infty x}=\infty$, если $x+\alpha$ — целое отрицательное, а α не равно целому отрицательному числу; если α — целое отрицательное, а $x+\alpha$ не равно целому отрицательному числу, то функция $(x+\alpha)^{\infty x}$ имеет устранимую особую точку и для сохранения непрерывности следует положить $(x+\alpha)^{\infty x}=0$. Устранимыми особыми точками являются также точки, в которых как α, так и $x+\alpha$ являются целыми отрицательными числами; при этом, если $x>0$, то следует положить

$$(x+\alpha)^{\infty x} = (x+\alpha)(x+\alpha-1)\ldots(\alpha+1),$$

если же $x<0$, то

$$(x+\alpha)^{\infty x} = \frac{1}{\alpha^{\infty -x}} = \frac{1}{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha+x+1)}\text{ [2]},$$

и если $x=0$, то

$$(x+\alpha)^{\infty x}=1.$$

---

[1]) Стр. 110 наст. тома.

[2]) См. сноску * к стр. 138.

[25] Очевидно, ход рассуждений Лобачевского таков.

Если $\alpha = \rho + i\tau$ ($i = \sqrt{-1}$), то модуль подинтегрального выражения в правой части [117а] (под $x^{i\tau}$ следует понимать главное значение и $|x^{i\tau}| = 1$) равен $e^{-x} x^{\rho + r}$ и достигает максимального значения при $x = \rho + r$.

Подстановка $x = r + \rho + t$ дает

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{r+\alpha}\, dx = \int_{-r-\rho}^{\infty} e^{-(r+\rho+t)} (r + \rho + t)^{r+\alpha}\, dt$$

и

$$(r+\alpha)^{-r-\alpha-\frac{1}{2}}\, e^{r+\alpha} \int_0^\infty e^{-x} x^{r+\alpha}\, dx = e^{i\tau} \int_{-r-\rho}^{\infty} e^{-t} \left(\frac{\rho + r + t}{r+\alpha}\right)^{r+\alpha} \frac{1}{\sqrt{r+\alpha}}\, dt.$$

Наибольшее значение модуля подинтегрального выражения в правой части соответствует значению $t = 0$, и чем больше r, с тем меньшей ошибкой можно в качестве пределов этого интеграла брать $-l$ и l, где l мало сравнительно с r. Поэтому можно под знаком интеграла считать, что

$$\left(\frac{\rho + r + t}{r+\alpha}\right)^{r+\alpha} = \left(1 + \frac{\rho + t - \alpha}{r+\alpha}\right)^{r+\alpha} =$$

$$= \left(1 + \frac{t}{r+\alpha} - \frac{i\tau}{r+\alpha}\right)^{r+\alpha} \approx \left(1 + \frac{t}{r+\alpha}\right)^{r+\alpha} \left(1 - \frac{i\tau}{r+\alpha}\right)^{r+\alpha} \approx$$

$$\approx e^{-i\tau} \left(1 + \frac{t}{r+\alpha}\right)^{r+\alpha} \approx e^{-i\tau} e^{t - \frac{t^2}{2(r+\alpha)}}.$$

Таким образом, при большом r

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha}\, dx \approx \frac{\alpha^{\infty\alpha}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2(r+\alpha)}}}{\sqrt{r+\alpha}}\, dt,$$

а после подстановки $t = z\sqrt{2}\sqrt{r+\alpha}$ и перехода к пределу при $r \to \infty$

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha}\, dx = \frac{\alpha^{\infty\alpha}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}\, dz = \alpha^{\infty\alpha}.$$

Замечание Лобачевского о том, что «... воображаемая часть интеграла уничтожается для $r = \infty$» обозначает, повидимому, что, хотя после подстановки $t = z\sqrt{2}\sqrt{r+\alpha}$ интеграл вычисляется не по действительной оси, а по определенной этой подстановкой прямой в плоскости комплексного переменного, тем не менее эта прямая при $r \to \infty$ приближается к действительной оси.

Хотя рассуждения Лобачевского и не являются вполне строгими, однако при помощи соответствующих оценок их нетрудно обосновать.

[26] Лобачевский считает, что в левой части [118a] при достаточно большом r можно заменить верхний предел интегрирования через сколь угодно малое положительное число α и положить

$$\sin^{2n+1} x \approx x^{2n+1},$$

$$\cos^{2m+2r+1} x \approx \left(1-\frac{x^2}{2}\right)^{2m+2r-1} \approx 1-(2m+2r-1)\frac{x^2}{2} \approx 1-rx^2 \approx e^{-rx^2},$$

а в правой части [118a] произвести подобные замены после преобразования

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+2r+1} x \cos^{2m+1} x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x \cos^{2n+2r+1} x\, dx.$$

Таким образом, он приходит к асимптотическому равенству [118b]. Далее, с помощью подстановки $rx^2 = z$, легко получить

$$\int_0^{\alpha} e^{-rx^2} x^{2n+1}\, dx = \frac{1}{2r^{n+1}} \int_0^{r\alpha^2} e^{-z} z^n\, dz,$$

$$\int_0^{\alpha} e^{-rx^2} x^{2m+1} dx = \frac{1}{2r^{m+1}} \int_0^{r\alpha^2} e^{-z} z^m\, dz$$

и, положив $m=0$ $\left(\text{тогда } \frac{1}{m^{\infty-r}} = r^{\infty r}\right)$ придти к (119), минуя [118c], причем в правой части (119) подразумевается предел при $r \to \infty$.

Все эти рассуждения можно строго обосновать, сопровождая их соответствующими оценками.

[27] $$\sin^{a+b\sqrt{-1}} x = \sin^a x\, e^{b\sqrt{-1}\log\sin x}.$$

Отсюда, с учетом (42),

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^a x\,[\cos(b\log\sin x) + \sqrt{-1}\sin(b\log\sin x)]\, dx =$$

$$= \frac{\left(\frac{a+b\sqrt{-1}-1}{2}\right)^{\infty\,\frac{a+b\sqrt{-1}-1}{2}} \left(-\frac{1}{2}\right)^{\infty-\frac{1}{2}}}{\left(\frac{a+b\sqrt{-1}}{2}\right)^{\infty\,\frac{a+b\sqrt{-1}}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\left(\frac{a+b\sqrt{-1}}{2}\right)^{\infty\frac{1}{2}}}.$$

[28] Это равенство нетрудно получить из предыдущего, если учесть, что

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left\{\left[\left(1+\frac{a}{k}\right)^2+\frac{b^2}{k^2}\right]\left[\left(1-\frac{a}{k}\right)^2+\frac{b^2}{k^2}\right]\right\}=$$

$$=\prod_{k=1}^{\infty}\left[1-\frac{(a+b\sqrt{-1})^2}{k^2}\right]\prod_{k=1}^{\infty}\left[1-\frac{(a-b\sqrt{-1})^2}{k^2}\right]=$$

$$=\frac{\sin\left[\pi(a+b\sqrt{-1})\right]\sin\left[\pi(a-b\sqrt{-1})\right]}{\pi^2(a^2+b^2)}.$$

[29] Здесь, как и во многих ранее отмеченных случаях, рассуждения Лобачевского таковы:

$$\int_0^{\pi} e^{ix}\sin^{n+2r}x\,dx\approx\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\alpha} e^{ix}\sin^{n+2r}x\,dx=\int_{-\alpha}^{\alpha} e^{i\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\cos^{n+2r}x\,dx\approx$$

$$\approx e^{\frac{\pi i}{2}}\int_{-\alpha}^{\alpha}\left(1-\frac{t^2}{2}\right)^{n+2r}dt\approx e^{\frac{\pi i}{2}}\int_{-\alpha}^{\alpha}\left[1-\frac{(n+2r)t^2}{2}\right]dt\approx$$

$$\approx e^{\frac{\pi i}{2}}\int_{-\alpha}^{\alpha}(1-rt^2)\,dt\approx e^{\frac{\pi i}{2}}\int_{-\alpha}^{\alpha}e^{-rt^2}\,dt\approx 2e^{\frac{\pi i}{2}}\int_0^{\infty}e^{-rt^2}\,dt=e^{\frac{\pi i}{2}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

[30] Если k — целое и положительное число, то

$$\int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi} e^{ix}\sin^n x\,dx=(-1)^n e^{(2k-1)i\pi}\int_0^{\pi}e^{ix}\sin^n x\,dx,$$

$$\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} e^{ix}\sin^n x\,dx=e^{2ki\pi}\int_0^{\pi}e^{ix}\sin^n x\,dx$$

и

$$\int_0^{\infty}e^{ix}\sin^n x\,dx=[1+(-1)^n e^{i\pi}+e^{2i\pi}+(-1)^n e^{3i\pi}+\ldots]\int_0^{\pi}e^{ix}\sin^n x\,dx=$$

$$=\frac{1+(-1)^n e^{i\pi}}{1-e^{2i\pi}}\int_0^{\pi}e^{ix}\sin^n x\,dx=$$

$$=\frac{2^{-n}\pi n^{\infty n}e^{\frac{1}{2}i\pi}\left[1+(-1)^n e^{i\pi}\right]}{\left(\frac{n+i\sqrt{-1}}{2}\right)^{\infty\frac{n+i\sqrt{-1}}{2}}\left(\frac{n-i\sqrt{-1}}{2}\right)^{\infty\frac{n-i\sqrt{-1}}{2}}(1-e^{2i\pi})}, \qquad \text{(a)}$$

если, конечно, $i < 0$ или, в более общем случае, $\operatorname{Re} i < 0$. В противном случае $\int\limits_0^\infty e^{ix} \sin^n x\, dx$ расходится.

Если n — целое положительное или нуль, то

$$\frac{1 + (-1)^n e^{i\pi}}{1 - e^{2i\pi}} = \frac{1}{1 - (-1)^n e^{i\pi}}$$

и в этом случае формула (126) справедлива.

{3}

О сходимости бесконечных рядов

[31] $$x \log \frac{1}{x} < \left(\frac{1}{a} - x\right) 2 \log 2 + x \log a < \frac{2 \log 2}{a} + x \log a.$$

Ко всякому положительному числу δ можно подобрать такое a, что $\frac{2 \log 2}{a} < \frac{\delta}{2}$, а к определенному таким образом значению a подбирается такое положительное ε, что $a\varepsilon < 1$ и $x \log a < \frac{\delta}{2}$ при $x < \varepsilon$. Таким образом, при $x < \varepsilon$

$$x \log \frac{1}{x} < \delta$$

и, следовательно,

$$\lim_{x \to 0} \left(x \log \frac{1}{x}\right) = 0.$$

[32] Равенства I и II следуют из [3a]; равенство III является определением символа $n^{\infty m}$ в случае, если m — целое отрицательное число и получается формально из I или II, если учесть, что, по определению, $n^{\infty 0} = 1$; V следует из III и II (или I); [3b] следует из V; VI следует из I (или II); VII следует из определения символа $n_e^{\infty i}$; VIII можно получить из [3a], так как

$$\frac{n^{\infty n} (n + r)^{\infty r}}{r^{\infty r} r^n} = \frac{r+1}{r} \cdot \frac{r+2}{r} \cdots \frac{r+n}{r}$$

и

$$\lim_{r \to \infty} \frac{n^{\infty n} (n + r)^{\infty r}}{r^{\infty r} r^n} = 1.$$

[33] На основании [7e]

$$t\omega - t_c^{\infty 3} \omega^3 + t_c^{\infty 5} \omega^5 >$$

$$> t\omega^3 \left[\frac{1}{6}(t + 4)(7 - t) + \frac{1}{20}\, \omega^2 (t - 1)(t - 2)(t - 3)(t - 4)\right]. \quad \text{(a)}$$

В интервале $3 < t < 4$ выражение $(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)$ отрицательно, и, как показывают вычисления, достигает экстремального значения, равного -1 $\left(\text{при } t = \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$; поэтому

$$t\omega - t_c^{\omega 3}\omega^3 + t_c^{\omega 5}\omega^5 > t\omega^3\left[\frac{1}{6}(t+4)(7-t) - \frac{1}{20}\omega^2\right].$$

Нижняя граница величины $\frac{1}{6}(t+4)(7-t)$ при $3 < t < 4$ равна 4 (достигается при $t = 4$), а так как $\omega^2 = 3 - 2\sqrt{2} < 1$, то

$$\frac{1}{6}(t+4)(7-t) - \frac{1}{20}\omega^2 > 3\frac{19}{20}.$$

Неравенства [7f], таким образом, справедливы, а в коэффициенте при $t\omega^3$ в последней части неравенств имеется, повидимому, опечатка или описка.

[34] Повидимому, Лобачевский имеет в виду следующее. Для того, чтобы при извлечении корня ряды (4) и [7b] давали одно и то же значение корня, нужно, чтобы значение $(-1)^{\frac{1}{8}}$ выражалось по формуле [7a].

Пусть

$$e^{a+b\sqrt{-1}} = e^a e^{b\sqrt{-1}} = \left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\{1 + (-1+\sqrt{2})\sqrt{-1}\}.$$

Из свойств ряда (4) следует, что число $e^{-b\sqrt{-1}}$ отличается от числа $e^{b\sqrt{-1}}$ только знаком коэффициента при $\sqrt{-1}$; следовательно,

$$e^a e^{-b\sqrt{-1}} = \left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\{1 - (-1+\sqrt{2})\sqrt{-1}\}.$$

Обозначив

$$p = e^a\left(\frac{4}{2+\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \pi = \frac{b}{8},$$

Лобачевский приходит к равенствам [7h].

Следует, однако, заметить, что ни равенство [7g], ни, тем более, второе из равенств [7h] не определяют однозначно числа π. Так, например, равенства [7g] не нарушатся при замене π на $\pi + 16\pi k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

[35] Для дальнейшего достаточно предположить, что $n = 2^m$, где m — целое положительное число.

Тогда

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = -2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x-\pi}{2} =$$

$$= -2^3\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}\sin\frac{x-\pi}{4}\cos\frac{x-\pi}{4} =$$

$$= -2^3\sin\frac{x}{4}\sin\frac{x-\pi}{4}\sin\frac{x-2\pi}{4}\sin\frac{x-3\pi}{4} =$$

$$\ldots = -2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\sin\frac{x-k\pi}{n}. \qquad \text{(a)}$$

Более общее равенство

$$\sin x = (-1)^{n-1}2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\sin\frac{x-k\pi}{n} \qquad \text{(b)}$$

можно доказать для любого целого положительного n, исходя из известного тождества

$$e^{2inx} - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}\left(e^{2ix} - e^{\frac{2k\pi i}{n}}\right),$$

где $i = \sqrt{-1}$.

Далее, из (a) или (b)

$$\sin x = -2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\left(\cos\frac{x}{n}\sin\frac{k\pi}{n} - \sin\frac{x}{n}\cos\frac{k\pi}{n}\right) =$$

$$= 2^{n-1}\sin\frac{x}{n}\prod_{k=1}^{n-1}\left(\cos\frac{x}{n}\sin\frac{k\pi}{n} - \sin\frac{x}{n}\cos\frac{k\pi}{n}\right) =$$

$$= 2^{n-1}\operatorname{tg}\frac{x}{n}\cos^n\frac{x}{n}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - \operatorname{tg}\frac{x}{n}\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{n}\right).$$

Следовательно, при любом x

$$\frac{\sin x}{\operatorname{tg}\frac{x}{n}} = 2^{n-1}\cos^n\frac{x}{n}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - \operatorname{tg}\frac{x}{n}\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{n}\right)$$

и, переходя к пределу при $x \to 0$, получаем

$$2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n} = n$$ [1].

[1]) См. также сочинение Лобачевского «Способ увериться в исчезании бесконечных строк...», стр. 117 наст. тома.

Таким образом,

$$\sin x = n \operatorname{tg} \frac{x}{n} \cos^n \frac{x}{n} \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \operatorname{tg} \frac{x}{n} \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{n}\right) =$$

$$= 2n \operatorname{tg} \frac{x}{2n} \cos^{2n} \frac{x}{2n} \prod_{k=1}^{2n-1} \left(1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2n} \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2n}\right).$$

Но

$$1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2n} \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2n} = 1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2n} \operatorname{ctg} \frac{(2n-k)\pi}{2n},$$

а при $k = n$

$$1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2n} \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2n} = 1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2n} \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{n} = 1.$$

Следовательно,

$$\sin x = 2n \operatorname{tg} \frac{x}{2n} \cos^{2n} \frac{x}{2n} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2n} \operatorname{ctg}^2 \frac{k\pi}{2n}\right).$$

[36] Так как $x < \pi r$ и $\mu > r$, то

$$p \operatorname{ctg} \mu\omega = \operatorname{tg} \frac{x}{2n} \operatorname{ctg} \frac{\mu\pi}{2n} < \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi r}{2n}}{\operatorname{tg} \frac{\mu\pi}{2n}} < 1.$$

В то же время, если $0 < t < 1$, то

$$-\log(1-t) = t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \ldots < \frac{t}{1-t}.$$

Следовательно,

$$\frac{p^2 \operatorname{ctg}^2 \mu\omega}{1 - p^2 \operatorname{ctg}^2 \mu\omega} > -2^{-\lambda} \log(1 - p^2 \operatorname{ctg}^2 r\omega).$$

Отсюда

$$p^2 \operatorname{ctg}^2 \mu\omega > \frac{-2^{-\lambda} \log(1 - p^2 \operatorname{ctg}^2 r\omega)}{1 - 2^{-\lambda} \log(1 - p^2 \operatorname{ctg}^2 r\omega)},$$

$$\mu\omega < \operatorname{tg} \mu\omega < p \sqrt{1 - \frac{2^{\lambda}}{\log(1 - p^2 \operatorname{ctg}^2 r\omega)}} <$$

$$< p \left[1 + \frac{2^{\frac{\lambda}{2}}}{\sqrt{-\log(1 - p^2 \operatorname{ctg}^2 r\omega)}}\right],$$

так как $\sqrt{1+t} < 1 + \sqrt{t}$, если $t > 0$.

[37] Первое из неравенств [10c] получено из [10b] заменой $\operatorname{tg} r\omega$ через $r\omega$, что оправдано для второго члена неравенства [10b], но неверно для первого члена, так как он отрицателен. Таким образом,

это и последующие неравенства, служащие для оценки R, не обоснованы; однако нетрудно убедиться, отбросив все отрицательные члены в правой части, что следующее далее заключение о том, что величина $|R|$ при достаточно большом r становится сколь угодно малой, и притом равномерно относительно n, справедливо.

Действительно, учитывая сказанное выше, следовало бы вместо [10d] писать

$$|R| < \frac{p^2}{\omega} \, \frac{1+\sqrt{2}}{r-\frac{p}{\omega}}.$$

Но величина $\frac{p}{\omega}$ равномерно ограничена $\left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p}{\omega} = \frac{x}{\pi}\right)$ и, следовательно, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно к нему подобрать такое r_0, чтобы при $r > r_0$ и всех n имело место неравенство $|R| < \varepsilon$.

[38] Если $\pi r > |x|$, то

$$2\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i+2}\left(\frac{x}{\pi r}\right)^{2i} = 1 - 2\left(\frac{\pi r}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{\pi r}{x}\right)^4 \log\left(1 + \frac{x^2}{\pi^2 r^2}\right)$$

и условие [13b] сводится к неравенству

$$\log\left(1+\frac{x^2}{\pi^2 r^2}\right) < \frac{x^2}{\pi^2 r^2},$$

которое, конечно, выполнено.

Далее, если положить

$$\sqrt{1 - \frac{x^2}{2r^2\pi^2} + \frac{x^4}{3r^4\pi^4} - \ldots} = 1 - \alpha,$$

то

$$-r\log\left(1+\frac{x^2}{r^2\pi^2}\right) + (1+\sqrt{2})\,\frac{x}{\pi}\sqrt{\log\left(1+\frac{x^2}{r^2\pi^2}\right)} =$$

$$= -r\left(\frac{x^2}{r^2\pi^2} - \frac{x^4}{2r^4\pi^4} + \ldots\right) + (1+\sqrt{2})\,\frac{x^2}{r\pi^2}\sqrt{1 - \frac{x^2}{2r^2\pi^2} + \frac{x^4}{3r^4\pi^4} - \ldots} =$$

$$= \frac{x^2\sqrt{2}}{r\pi^2} + r\left(\frac{x^4}{2r^4\pi^4} - \frac{x^6}{3r^6\pi^6} + \ldots\right) - (1+\sqrt{2})\,\frac{x^2}{r\pi^2}\,\alpha =$$

$$= \frac{x^2\sqrt{2}}{r\pi^2} - \frac{x^2}{r\pi^2}\left[(1+\sqrt{2})\,\alpha - \left(\frac{x^2}{2r^2\pi^2} - \frac{x^4}{3r^4\pi^4} + \ldots\right)\right] < \frac{x^2\sqrt{2}}{r\pi^2},$$

так как

$$1 - \frac{x^2}{2r^2\pi^2} + \frac{x^4}{3r^4\pi^4} - \ldots = 1 - 2\alpha + \alpha^2$$

и, следовательно, $2a > \frac{x^2}{2r^2\pi^2} - \frac{x^4}{3r^4\pi^4} + \ldots$, поэтому тем более $(1+\sqrt{2})\,a > \frac{x^2}{2r^2\pi^2} - \frac{x^4}{3r^4\pi^4} + \ldots$

Таким образом, неравенство [13а] обосновано.

[39] Из [18а] следует, что

$$\left| \int_0^x \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega}{\sin\frac{\omega}{2}}\,d\omega - \pi \right| < \frac{1}{i}\left(a + \frac{b}{\sin\frac{x}{2}}\right),$$

где $0 < x < 2\pi$, a и b — некоторые положительные постоянные и, таким образом, как малы бы ни были положительные числа ε и δ, можно взять i столь большим, чтобы

$$\left| \int_0^t \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega}{\sin\frac{\omega}{2}}\,d\omega - \pi \right| < \varepsilon,$$

если $\delta \leqslant t \leqslant 2\pi - \delta$; следовательно, при достаточно большом i

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega}{\sin\frac{\omega}{2}}\,d\omega \right| < 2\varepsilon,$$

если $\delta \leqslant t_1 < t_2 \leqslant 2\pi - \delta$.

Кроме того, каковы бы ни были t ($0 \leqslant t \leqslant A$, где A — любая положительная постоянная) и i,

$$\left| \int_0^t \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega}{\sin\frac{\omega}{2}}\,d\omega \right| < C,$$

где C — некоторая положительная постоянная, так как при $0 \leqslant t \leqslant \pi$

$$\left| \int_0^t \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega}{\sin\frac{\omega}{2}}\,d\omega \right| < \int_0^{\frac{2\pi}{2i+1}} \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega}{\sin\frac{\omega}{2}}\,d\omega <$$

$$< \left(i+\frac{1}{2}\right) \int_0^{\frac{2\pi}{2i+1}} \frac{\omega\,d\omega}{\sin\frac{\omega}{2}}.$$

С другой стороны,

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} F(\omega)\,d\omega =$$

$$= \int\limits_{a}^{\alpha-\delta} f(x)\,dx \int\limits_{\alpha-x}^{\beta-x} \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega}{\sin\frac{\omega}{2}}\,d\omega + \int\limits_{\alpha-\delta}^{\alpha} f(x)\,dx \int\limits_{\alpha-x}^{\beta-x} \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega}{\sin\frac{\omega}{2}}\,d\omega +$$

$$+ \int\limits_{\beta+\delta}^{b} f(x)\,dx \int\limits_{\alpha-x}^{\beta-x} \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega}{\sin\frac{\omega}{2}}\,d\omega + \int\limits_{\beta}^{\beta+\delta} f(x)\,dx \int\limits_{\alpha-x}^{\beta-x} \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega}{\sin\frac{\omega}{2}}\,d\omega +$$

$$+ \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \int\limits_{0}^{\beta-x+\delta} \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega}{\sin\frac{\omega}{2}}\,d\omega - \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \int\limits_{\beta-x}^{\beta-x+\delta} \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega}{\sin\frac{\omega}{2}}\,d\omega +$$

$$+ \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \int\limits_{0}^{x-\alpha+\delta} \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega}{\sin\frac{\omega}{2}}\,d\omega - \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \int\limits_{x-\alpha}^{x-\alpha+\delta} \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega}{\sin\frac{\omega}{2}}\,d\omega.$$

Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема, то при достаточно большом i получаем

$$\left| \int\limits_{a}^{\alpha-\delta} f(x)\,dx \int\limits_{\alpha-x}^{\beta-x} \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega}{\sin\frac{\omega}{2}}\,d\omega \right| < 2\varepsilon \int\limits_{a}^{\alpha-\delta} |f(x)|\,dx,$$

$$\left| \int\limits_{\beta+\delta}^{b} f(x)\,dx \int\limits_{\alpha-x}^{\beta-x} \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega}{\sin\frac{\omega}{2}}\,d\omega \right| < 2\varepsilon \int\limits_{\beta+\delta}^{b} |f(x)|\,dx,$$

$$\left| \int\limits_{\alpha-\delta}^{\alpha} f(x)\,dx \int\limits_{\alpha-x}^{\beta-x} \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega}{\sin\frac{\omega}{2}}\,d\omega \right| < C \int\limits_{\alpha-\delta}^{\alpha} |f(x)|\,dx,$$

$$\left| \int\limits_{\beta}^{\beta+\delta} f(x)\,dx \int\limits_{\alpha-x}^{\beta-x} \frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega}{\sin\frac{\omega}{2}}\,d\omega \right| < C \int\limits_{\beta}^{\beta+\delta} |f(x)|\,dx,$$

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)\,dx\int_{\beta-x}^{\beta-x+\delta}\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega}{\sin\frac{\omega}{2}}\,d\omega\right|<\varepsilon\int_\alpha^{\beta-\delta}|f(x)|\,dx+C\int_{\beta-\delta}^{\beta}|f(x)|\,dx,$$

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)\,dx\int_{x-\alpha}^{x-\alpha+\delta}\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega}{\sin\frac{\omega}{2}}\,d\omega\right|<\varepsilon\int_{\alpha+\delta}^{\beta}|f(x)|\,dx+C\int_{\alpha}^{\alpha+\delta}|f(x)|\,dx,$$

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)\,dx\left[\int_0^{\beta-x+\delta}\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega}{\sin\frac{\omega}{2}}\,d\omega-\pi\right]\right|<\varepsilon\int_\alpha^\beta|f(x)|\,dx,$$

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)\,dx\left[\int_0^{x-\alpha+\delta}\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega}{\sin\frac{\omega}{2}}\,d\omega-\pi\right]\right|<\varepsilon\int_\alpha^\beta|f(x)|\,dx,$$

а так как ε и δ произвольны, то

$$\lim_{i\to\infty}\int_\alpha F(\omega)\,d\omega=2\pi\int_\alpha^\beta f(x)\,dx.$$

Равенство [21a], полученное Лобачевским еще в 1834 году (см. стр. 70), содержит теорему о том, что почленное интегрирование ряда Фурье абсолютно интегрируемой функции $f(x)$ приводит к сходящемуся ряду, сумма которого равна интегралу от $f(x)$. Эта теорема была вновь доказана лишь в 1906 году Лебегом.

[40] Правая часть [21b] имеет вид

$$\frac{(1+\alpha)-\frac{1}{2}}{(\mu+n-1)^2}-\frac{(1+\alpha)^2-\frac{1}{3}}{(\mu+n-1)^3}-\frac{(1+\alpha)^3-\frac{1}{4}}{(\mu+n-1)^4}+\ldots$$

Если $\alpha>-1+\frac{1}{\sqrt{3}}$, то $(1+\alpha)^2-\frac{1}{2}>0$ и $(1+\alpha)-\frac{1}{2}>0$, а при достаточно большом n абсолютная величина суммы всех членов ряда, начиная с третьего, меньше абсолютной величины второго члена; следовательно, абсолютная величина суммы ряда в правой части [21b] меньше первого члена этого ряда.

Далее (для обоснования [21c]) следует учесть, что:

$$\log\frac{n}{n-1}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{2(n-1)^2}+\ldots<\frac{1}{n-1},$$

откуда

$$\log\frac{n}{n-1}-\frac{1}{n+\alpha}<\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+\alpha}=\frac{\alpha+1}{(n-1)(n+\alpha)}.$$

Кроме того, так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)\left(\log\dfrac{n}{n-1}-\dfrac{1}{n+\alpha}\right)}{\dfrac{n-1}{(n+\alpha)^2}}=\alpha+\frac{1}{2}>\alpha,$$

то при достаточно большом n

$$-(n-1)\log\frac{n}{n-1}+\frac{n-1}{n+\alpha}<-\alpha\frac{n-1}{(n+\alpha)^2}.$$

[41] В [22a] подразумевается предельный переход при $n\to\infty$. Лобачевский совершенно строго доказал существование предела

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^x A_n\,dx=\int_0^\alpha S(\alpha)\,d\alpha, \qquad \text{(a)}$$

где $S(\alpha)=\lim\limits_{n\to\infty}A_n$.

Именно для этого он в последней строке [21c] пришел к неравенству вида

$$|S(\alpha)-A_n|<\varepsilon(n),$$

где $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon(n)=0$ и $\varepsilon(n)$ не зависит от α, если $0\leqslant\alpha\leqslant1$ (тот факт, что $\varepsilon(n)$ от α не зависит, специально отмечен Лобачевским).

Отсюда он получает

$$\left|\int_0^\alpha S(\alpha)\,d\alpha-\int_0^\alpha A_n\,d\alpha\right|=\left|\int_0^\alpha[S(\alpha)-A_n]\,d\alpha\right|<\alpha\cdot\varepsilon(n),$$

то-есть оценку [22b], из которой и следует существование предела (a).

Лобачевский, таким образом, близко подошел к понятию равномерной сходимости.

[42] В этом сочинении Лобачевский принимает в качестве определения функции $a^{\infty\alpha}$ при любом α равенство (23) и не пользуется тем, что равенство [26a] также может служить определением функции $(x+\alpha)^{\infty x}$, а следовательно и $x^{\infty x}$, не только для целых положительных значений x [как это было показано в сочинении «Способ увериться в исчезании бесконечных строк...» 1)]. Поэтому здесь нет необходимости доказывать непротиворечивость равенств (23) и [26a],

1) См. стр. 110 наст. тома.

и Лобачевский ограничивается указанием на непротиворечивость равенства (23) и определения функции $a^{\infty a}$ для целых положительных значений a, а равенство (30), справедливое также для целых положительных значений α, принимает за определение функции $n^{\infty a}$ для любых n и α.

[43] Для того, чтобы разложение $F(x-1)-F(x)$ не содержало членов с показателями при $\frac{1}{x-1}$, меньшими, чем $n+2$, следует положить

$$\frac{1}{2}i=\sum_{\lambda=1}^{n}(\lambda+1)^{\infty 2}(i+2)_0^{\infty\lambda+1}A_\lambda-(i+2)^{\infty 3}A_{i+1}\quad(i=1,2,\ldots,n-1)\quad(\mathrm{a})$$

и

$$\frac{1}{2}n=\sum_{i=1}^{n}(\lambda+1)^{\infty 2}(n+2)_0^{\infty\lambda+1}A_\lambda;\qquad(\mathrm{b})$$

но, так как $(i+2)_0^{\infty\lambda+1}=0$ при $\lambda>i+1$ и $(i+2)_0^{\infty i+2}=1$, то равенства (a) и (b) сводятся к равенствам (32).

[44] Это не совсем точно. Из равенств (34) следует, что, как мало бы ни было положительное число ε, можно найти такое $X(\varepsilon, n)$, что при $x>X(\varepsilon, n)$ имеют место неравенства

$$\frac{P(n)-\varepsilon}{x^{n+2}}<\frac{P(n)-\varepsilon}{(x-1)^{n+2}}<|F(x-1)-F(x)|<\frac{P(n)+\varepsilon}{(x-1)^{n+2}},$$

где $P(n)$ — коэффициент при $(x-1)^{-n-2}$ в ряде (34).

[45] Действительно

$$\psi(n)=e^p f(n)=e^p\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}\,dx}{(p+ix)^n}=e^p\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ix}\,dx}{(p-ix)^n},\qquad\text{где } i=\sqrt{-1}.$$

Подстановка $x=p\operatorname{tg}t$ дает

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}\,dx}{(p+ix)^n}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{ip\operatorname{tg}t}}{p^n(1+i\operatorname{tg}t)^n}\cdot\frac{p\,dt}{\cos^2 t}=$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{ip\operatorname{tg}t}}{p^{n-1}(\cos t+i\sin t)^n}\cos^{n-2}t\,dt=\frac{1}{p^{n-1}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}e^{-i(nt-p\operatorname{tg}t)}\cos^{n-2}t\,dt.$$

Аналогично

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}\,dx}{(p-ix)^n} = \frac{1}{p^{n-1}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{i(nt-p\operatorname{tg}t)} \cos^{n-2} t\,dt$$

и, следовательно,

$$\psi(n) = \frac{e^p}{2p^{n-1}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [e^{i(nt-p\operatorname{tg}t)} + e^{-i(nt-p\operatorname{tg}t)}] \cos^{n-2} t\,dt =$$

$$= \frac{e^p}{p^{n-1}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(nt-p\operatorname{tg}t) \cos^{n-2} t\,dt = \frac{2e^p}{p^{n-1}} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(nt-p\operatorname{tg}t) \cos^{n-2} t\,dt.$$

ПРИЗНАК СХОДИМОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО.

Одним из наиболее интересных оригинальных результатов Лобачевского, опубликованных в сочинениях по теории рядов, является найденный им признак сходимости знакоположительных рядов. Лобачевский пользуется этим признаком для доказательства сходимости многих рядов и бесконечных произведений и для оценки сверху их остатков. Поэтому Лобачевский формулирует этот признак, как достаточный признак сходимости, и доказывает только его достаточность. Между тем, признак Лобачевского для знакоположительных рядов с монотонно невозрастающим общим членом является также необходимым. Ниже мы приводим формулировку и доказательство как достаточности, так и необходимости признака сходимости Лобачевского.

Пусть дан знакоположительный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n),$$

причем $f(k+1) > f(k)$ и $f(n+1) \geqslant f(n)$ при $n > k$.

Определим величину p_m $(p_m > k)$ из неравенств

$$\frac{f(p_m)}{f(k)} \geqslant 2^{-m}; \ \frac{f(p_m+1)}{f(k)} < 2^{-m}.$$

Тогда

$$\frac{1}{2} f(k) \sum_{m=1}^{\infty} (p_m - k)\, 2^{-m} \leqslant \sum_{n=k+1}^{\infty} f(n) \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} (p_m - k)\, 2^{-m}$$ [1])

и, в частности, данный ряд сходится или расходится одновременно с рядом

$$\sum_{m=1}^{\infty} p_m\, 2^{-m}.$$

---

[1]) Для оценки суммы ряда или его остатка сверху, а следовательно, и для доказательства достаточности признака Лобачевского требование монотонности функции $f(n)$ излишне, если под p_m понимать наибольшее из чисел, определяемых неравенствами, служащими для вычисления p_m (в этом случае указанные неравенства не определяют p_m однозначно). Аналогично, если под p_m понимать наименьшее из чисел, определяемых этими неравенствами, то сохранится оценка остатка ряда снизу.

Лобачевский доказывает, как уже отмечалось, только достаточность признака. Для этого Лобачевский представляет величину $\frac{f(n)}{f(k)}$ в виде двоичной дроби

$$\frac{f(n)}{f(k)} = \sum_{m=1}^{\infty} l_m^{(n)} 2^{-m}$$

(мы несколько изменяем применяемые Лобачевским обозначения), где $l_m^{(n)}$ равно или 0, или 1; изменив порядок суммирования, он получает

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} f(n) = f(k) \sum_{m=1}^{\infty} L_m 2^{-m},$$

где

$$L_m = \sum_{n=k+1}^{\infty} l_m^{(n)},$$

и утверждает, что $L_m < p_m - k$, что и дает оценку остатка ряда сверху.

Строгое доказательство можно построить следующим образом. Так как $\frac{f(n)}{f(k)} < 1$, то $\frac{f(n)}{f(k)} = \theta_n 2^{-m_n}$, где m_n и θ_n однозначно определяются условием $\frac{1}{2} \leqslant \theta_n < 1$ (m_n — целое положительное число или нуль); группируя члены ряда, для которых m_n одинаково, получим

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{f(n)}{f(k)} = \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-m} \sum_{k=1}^{n_m} \theta_k^{(m)} \quad \left(\frac{1}{2} \leqslant \theta_k^{(m)} < 1\right).$$

Далее, так как p_m — номер последнего члена ряда, отношение которого к $f(k)$ еще больше, чем 2^{-m} (или равно 2^{-m}), то

$$p_m - k = n_0 + n_1 + \ldots + n_{m-1} \qquad (m = 1,\ 2,\ \ldots),$$
$$p_0 - k = 0.$$

С одной стороны, L_m — количество членов ряда, отношение которых к $f(k)$ содержит в своем двоичном разложении член 2^{-m}, а следовательно, таких, для которых это отношение и подавно больше чем 2^{-m} (или равно 2^{-m}); следовательно,

$$L_m \leqslant p_m - k.$$

С другой стороны, если отношение $\frac{f(n)}{f(k)}$ имеет вид $\theta_n 2^{-(m-1)}$, то двоичное разложение этого отношения заведомо содержит член 2^{-m} и, следовательно,

$$L_m \geqslant n_{m-1}.$$

Учтя, что $n_{m-1} = p_m - p_{m-1}$, имеем

$$p_m - p_{m-1} \leqslant L_m \leqslant p_m - k.$$

Следовательно,

$$f(k)\sum_{m=1}^{\infty}(p_m-p_{m-1})\,2^{-m}\leqslant\sum_{n=k+1}^{\infty}f(n)=$$
$$=f(k)\sum_{m=1}^{\infty}L_m\,2^{-m}\leqslant f(k)\sum_{m=1}^{\infty}(p_m-k)\,2^{-m}.$$

Но

$$\sum_{m=1}^{\infty}p_{m-1}\,2^{-m}=\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}p_m\,2^{-m}=\frac{k}{2}+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}p_m\,2^{-m}=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}(p_m+k)\,2^{-m},$$

так как $p_0=k$ и

$$\sum_{m=1}^{\infty}2^{-m}=1.$$

Таким образом

$$\sum_{m=1}^{\infty}(p_m-p_{m-1})\,2^{-m}=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}(p_m-k)\,2^{-m}$$

и окончательно

$$\frac{1}{2}f(k)\sum_{m=1}^{\infty}(p_m-k)\,2^{-m}\leqslant\sum_{n=k+1}^{\infty}f(n)\leqslant f(k)\sum_{m=1}^{\infty}(p_m-k)\,2^{-m}.$$

Лобачевский [1]) предлагает еще другой способ исследования сходимости ряда, который представляет собой, по существу, некоторое обобщение только что рассмотренного признака сходимости. Он не формулирует содержание этого способа, а только применяет его к доказательству сходимости и оценке остатка одного ряда. Эта более общая форма признака сходимости Лобачёвского может быть обоснована и сформулирована следующим образом.

При тех же условиях относительно общего члена ряда, что и прежде, положим $f(k)=a^{-1}<1$.

Так как

$$\sum_{m=k}^{\infty}\frac{1}{a^m}=\frac{1}{a^{k-1}(a-1)},$$

то всякое число x, для которого $\frac{1}{a^k}\leqslant x<\frac{1}{a^{k-1}}$, может быть единственным образом представлено в виде

$$x=A_x\sum_{m=k}^{\infty}a^{-m},$$

где $\frac{a-1}{a}\leqslant A_x<a-1$.

---

[1]) {1}, стр. 38—39 наст. тома.

При $n > k$ по условию $f(n) < f(k)$ и, следовательно,

$$f(n) = A_n \sum_{m=k_n}^{\infty} a^{-m},$$

где $k_n \geqslant 2$.

Разложив таким образом каждый член ряда, начиная с $f(k+1)$, и объединив члены с одинаковыми степенями a, получим

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} f(n) = \sum_{m=2}^{\infty} L_m a^{-m}.$$

С другой стороны, каждый член ряда, номер которого больше, чем k, имеет вид θa^{-m}, где $\frac{1}{a} \leqslant \theta < 1$ и $m \geqslant 1$. Следовательно

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} f(n) = \sum_{m=1}^{\infty} a^{-m} \sum_{k=1}^{n_m} \theta_k^{(m)},$$

где $\frac{1}{a} \leqslant \theta_k^{(m)} < 1$.

Нетрудно видеть, что при таких обозначениях

$$(n_1 + n_2 + \ldots + n_{m-1}) \frac{a-1}{a} \leqslant L_m < (n_1 + n_2 + \ldots + n_{m-1})(a-1).$$

Определив теперь целое положительное число p_m из неравенств

$$f(p_m) \geqslant \frac{1}{a^m}, \quad f(p_m + 1) < \frac{1}{a^m},$$

получим

$$p_m - k = n_1 + n_2 + \ldots + n_{m-1}$$

и, таким образом,

$$\frac{a-1}{a} \sum_{m=2}^{\infty} (p_m - k) a^{-m} \leqslant \sum_{n=k+1}^{\infty} f(n) < (a-1) \sum_{m=2}^{\infty} (p_m - k) a^{-m},$$

откуда, в частности, следует, что данный ряд сходится или расходится одновременно с рядом

$$\sum_{m=2}^{\infty} p_m a^{-m}.$$

ИНТЕГРАЛЫ ЛОБАЧЕВСКОГО В ТАБЛИЦАХ БИЕРЕНС ДЕ ХААНА

Как было уже указано в статье Б. Л. Лаптева «Интегралы Лобачевского в таблицах Биеренс де Хаана», помещенной в III томе настоящего издания[1]), автор этих первых весьма обширных «Таблиц определенных интегралов»[2]) ссылается, как на один из источников, которыми он пользовался при составлении таблиц, на сочинение Лобачевского «Способ уверяться в исчезании бесконечных строк и приближаться к значению функций от весьма больших чисел»[3]).

В таблицах Биеренс де Хаана имеются формулы, сопровождающиеся указанием, что они прямо заимствованы из работы Лобачевского «Способ уверяться в исчезании бесконечных строк ...» (иногда, при этом, наряду с работой Лобачевского, перечисляются и работы других математиков, пришедших к той же формуле); в других случаях имеется ссылка на заимствованную из сочинения Лобачевского формулу, из которой рассматриваемая формула легко выводится[4]).

Ниже приводится список интегралов, непосредственно заимствованных Биеренс де Хааном из сочинения «Способ уверяться ...»[5]). В первом столбце обозначен номер таблицы Биеренс де Хаана, во втором — номер интеграла в таблице, в третьем столбце указан номер

---

1) Стр. 413 III тома.

2) Bierens de Haan — Tables d'intégrales définies. Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen, Amsterdam, 1858.

3) Кроме этого сочинения, Биеренс де Хаан указывает еще следующие сочинения Лобачевского: «Воображаемая геометрия», «Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам» и «Вероятность средних результатов, полученных из повторных наблюдений». Об интегралах из первых двух сочинений см. указанную статью Б. Л. Лаптева; об интегралах из сочинения «Вероятность средних результатов ...» см. на стр. 348 наст. тома.

4) В сносках на следующей странице перечислены 4 интеграла, выведенные Биеренс де Хааном из формул Лобачевского.

5) Список не содержит тех заимствованных Биеренс де Хааном у Лобачевского и встречающихся в сочинении «Способ уверяться ...» формул, относительно которых Биеренс де Хаан указывает, что они заимствованы из другого сочинения Лобачевского.

соответствующей формулы в сочинении Лобачевского «Способ уверяться ...» по настоящему изданию.

Список интегралов, непосредственно заимствованных Биеренс де Хааном из сочинения Н. И. Лобачевского «Способ уверяться...»

Номер таблицы	Номер интеграла в таблице	Номер формулы Лобачевского	Номер таблицы	Номер интеграла в таблице	Номер формулы Лобачевского
1	10	(62)	78	16	(69)
1	25	[62a]	78	17	(70)
3	4	(63)	78	18	(67)
53	14	(51)	78	19	(68)
53	15	(52)	93	6	[94a]
53	19	(122)	94	2	(86)
53	21	[105a]	94	4	(80)
55	6	(76)	113	2	(47)
55	12	[105b]	113	3	(47) [2])
55	13	(78)	147	5	(113)
56	5	(50)	194	1	(85)
56	16	(73)	244	6	(71)
57	19	(110)	280	21	(126)
61	5	(112) [1])	287	4	(127)
70	1	[114a[	296	5	(125)
70	23	(114)	377	1	(64)
78	4	(72)			

Биеренс де Хаан не знал русского языка и поэтому не мог пользоваться текстом Лобачевского. Вследствие этого смысл большого числа формул, заимствованных Биеренс де Хааном у Лобачевского, оказался искаженным. Так, во многих случаях Биеренс де Хаан пишет формулу Лобачевского только для целочисленных значений параметров, в то время как у Лобачевского она выведена без такого ограничения (здесь сказалось, возможно, и то обстоятельство, что Биеренс де Хаану не было вполне ясно, что символ m^{-n} употребляется Лобачевским не только для целых m и n). У Лобачевского отсутствовало, как известно, обозначение для предельного перехода и наличие такого перехода оговаривалось в тексте — этот факт также послужил причиной искажения некоторых формул Лобачевского в таблицах Биеренс де Хаана.

Из 33 формул, непосредственно заимствованных Биеренс де Хааном из сочинения «Способ уверяться ...», 7 содержат прямые ошибки

1) Из этого интеграла Биеренс де Хаан получил еще интеграл № 14 в таблице 432.

2) Из этого интеграла Биеренс де Хаан получил еще три: № 2 в таблице 289, № 2 в таблице 291 и № 4 в таблице 377.

(или опечатки) либо в таблицах Биеренс де Хаана, либо в сочинении Лобачевского, либо, наконец, и там и здесь. Ниже приводится перечень этих формул с указанием ошибок (при этом учтен список опечаток и исправлений, помещенный Биеренс де Хааном в конце своих таблиц).

Формула 1 таблицы 70 соответствует формуле [114a] Лобачевского. У Лобачевского имелась ошибка, исправленная Биеренс де Хааном.

Формула 23 таблицы 70 соответствует формуле (114) Лобачевского. У Лобачевского формула верна. Биеренс де Хаан перепечатал формулу Лобачевского, не указав, что следует произвести предельный переход и, кроме того, дал неправильный ответ, считая, что исправляет ошибку Лобачевского. Ошибка Биеренс де Хаана вызвана, повидимому, тем, что формула Лобачевского [114a] формально является частным случаем формулы (114), и Биеренс де Хаан «исправил» формулу (114) (которую трудно непосредственно проверить) так, чтобы формальная подстановка частного значения параметра давала правильный результат для формулы [114a]. Но отмеченная выше ошибка Лобачевского в формуле [114a] явилась как раз следствием необоснованного использования формулы (114) для значения параметра, не принадлежащего той области, в которой формула справедлива.

Формула 18 таблицы 78 соответствует формуле (67) Лобачевского. Биеренс де Хаан исправил имевшуюся у Лобачевского опечатку.

Формула 4 таблицы 94 соответствует формуле (80) Лобачевского. У Лобачевского формула верна. Биеренс де Хаан перепечатал ее в том же виде, в каком она помещена у Лобачевского, но в списке исправлений указал, что формула не верна, не приведя в то же время правильного, по его мнению, значения интеграла. Повидимому, дело объясняется тем, что эта формула верна только при целочисленных значениях одного из параметров (что специально и оговорено Лобачевским), а Биеренс де Хаан обратил лишь внимание на сразу бросающийся в глаза абсурд, к которому приводит применение формулы к дробным значениям этого параметра.

Формула 21 таблицы 280 соответствует формуле (126) Лобачевского. У Лобачевского имеется ошибка. Эта ошибка осталась неисправленной у Биеренс де Хаана, но кроме нее появились еще новые опечатки (или ошибки).

Формула 4 таблицы 287 соответствует формуле (127) Лобачевского. У Лобачевского имеется ошибка, которая «исправлена» Биеренс де Хааном неправильно.

Формула 5 таблицы 296 соответствует формуле (125) Лобачевского. У Лобачевского формула верна. Биеренс де Хаан перепечатал ее неправильно.

Таким образом, в трех случаях правильные формулы Лобачевского были заменены Биеренс де Хааном неверными, в двух случаях ошибки

имеются и у Лобачевского и у Биеренс де Хаана и только в двух случаях Биеренс де Хаан действительно исправил результат Лобачевского (в одном случае опечатку и в одном случае ошибку).

В 1867 году вышло новое издание таблиц Биеренс де Хаана[1]). При этом многие формулы были исключены из таблиц: это либо те формулы, которые являлись частным случаем других, имевшихся в таблицах, либо те формулы, которые в новом издании были заменены более общими, либо те, где были обнаружены ошибки, исправить которые автор не сумел, либо, наконец, те, которые могут быть просто получены с помощью соответствующих неопределенных интегралов. Ниже приводится таблица устанавливающая соответствие между номерами таблиц и формул по обоим изданиям таблиц Биеренс де Хаана для интегралов, непосредственно заимствованных из сочинения «Способ уверяться ...»

Переход от старого издания таблиц Биеренс де Хаана к новому

1-ое издание		2-ое издание		1-ое издание		2-ое издание	
номер таблицы	номер интеграла	номер таблицы	номер интеграла	номер таблицы	номер интеграла	номер таблицы	номер интеграла
1	10	1	3	78	16	62	7
1	25	—	—	78	17	—	—
3	4	2	2	78	18	62	9
53	14	—	—	78	19	62	10
53	15	—	—	93	6	69	5
53	19	—	—	94	2	—	—
53	21	41	3	94	4*	—	—
55	6	41	21	113	2	—	—[2])
55	12	—	—	113	3	—	—[2])
55	13	41	8	147	5	100	4[3])
56	5	42	5	194	1	—	—[4])
56	16	—	—	244	6	218	7
57	19	42	18	280	21*	—	—
61	5	43	2	287	4*	270	8*
70	1	51	1	296	5*	277	1*
70	23*	—	—	377	1	—	—[5])
78	4	—	—				

[1]) Bierens de Haan — Nouvelles tables d'intégrales définies. Leyden, 1867.

[2]) Заменен во втором издании более общим (таблица 81, интеграл 1).

[3]) Эта формула во втором издании по форме отличается от указанной формулы первого издания, но полностью совпадает с формулой 3 таблицы 142 первого издания.

[4]) Заменен во втором издании более общим (таблица 151, интеграл 1).

[5]) Заменен во втором издании более общим (таблица 353, интеграл 1).

По второму изданию таблиц проставлены номера лишь тех формул, которые полностью совпадают с соответствующими формулами первого издания (без учета, конечно, изменения обозначений и формы записи). Звездочками отмечены те формулы, которые содержат ошибки.

Ни одна из пяти формул, заимствованных Биеренс де Хааном из сочинения «Способ уверяться . . .», в которых в первом издании имелись ошибки (только две из этих формул были неверны и у Лобачевского), не была при переиздании исправлена: три из пяти формул были исключены из второго издания, а две перепечатаны без исправлений.

ИСТОРИКО-БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ О СОЧИНЕНИЯХ Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО ПО ТЕОРИИ РЯДОВ

Первые два сочинения {1} — «Об исчезании тригонометрических строк» и {2} — «Способ уверяться в исчезании бесконечных строк и приближаться к значению функции от весьма больших чисел» были напечатаны в «Ученых записках Казанского университета»: {1} — во второй книжке за 1834 г. (стр. 167—226), {2} — во второй книжке за 1835 г. (стр. 211—342). Оба сочинения вышли также отдельными оттисками с новой нумерацией страниц и с указанием на обороте титульного листа: «Перепечатано из Ученых Записок на основании дозволения высшего учебного начальства».

Третье сочинение {3} — «Ueber die Convergenz der unendlichen Reihen» было напечатано в 1841 г. в издававшемся в Казани на немецком языке сборнике «Meteorologische Beobachtungen aus dem Lehrbezirk der Kaiserlich Russischen Universität Kasan» [2]), тетрадь 1, 1835—1836. Этот сборник, издававшийся, как сказано на титульном листе, «Эрнстом Кнорром на средства университета» [3]), содержит метеорологические наблюдения за 1835 и 1836 гг. в городах Казанского учебного округа (Нижнем Новгороде, Симбирске, Саратове, Астрахани, Вятке, Екатеринбурге и Оренбурге); после результатов наблюдений следует два приложения с отдельной нумерацией страниц): 1) сочинение Лобачевского «Ueber die Convergenz der unendlichen Reihen» и 2) работа Э. Кнорра «Allgemeine Bemerkungen über den Vortrag der Physik auf Gymnasien»).

Включение в сборник метеорологических наблюдений приложений, не имеющих к метеорологии никакого отношения, производит, конечно, странное впечатление; причина этого включения еще не выяснена.

---

[1]) Составлено И. Н. Бронштейном.

[2]) «Метеорологические наблюдения в учебном округе имп. российского Казанского университета». Титульный лист этого сборника воспроизведен после стр. 162 наст. тома.

[3]) Э. Кнорр — профессор Казанского университета. Подробнее о нем см. стр. 457 наст. тома (примечание [5] к сочинению «Полное затмение Солнца в Пензе 26 июня 1842 года»).

Не ясно также, когда было написано сочинение Лобачевского {3} — в период 1835—1836 годов, к которым относятся наблюдения, или ближе к 1841 г., когда был напечатан сборник. Во всяком случае сочинение {3} написано Лобачевским не позднее 1840 г. — это видно из следующих обстоятельств.

В отчете о состоянии Казанского университета за 1840—1841 академический год, составленном по поручению совета университета профессором Н. Ивановым[1]), между прочим сказано:

«Ректор Университета, ординарный профессор Лобачевский напечатал в Берлине, на немецком языке, сочинение под заглавием: Beiträge zu der Theorie der parallellen Linien[2]) и послал туда же, для помещения в Креллевом журнале, рассуждение: Ueber die Convergenz der unendlichen Reihen».

Аналогичная запись имеется в отчете Казанского университета и учебного округа за 17 лет (1827—1844)[3]), причем в этом отчете точно указано, что статья «Ueber die Convergenz der unendlichen Reihen» была послана в журнал Крелля в 1840 году.

Эти указания говорят о том, что в 1840 году Лобачевский направил в журнал Крелля «Journal für die reine und angewandte Mathematik» свое сочинение «О сходимости бесконечных рядов» на немецком языке. Но оно в этом журнале напечатано не было, хотя другие его сочинения «Géometrie Imaginaire» и «Probabilité des résultats moyens...», направленные Лобачевским в тот же журнал, были в нем напечатаны — первое спустя два года, а второе спустя 3—4 года после получения[4]). Возможно, что Лобачевский одновременно с отправкой своего сочинения в журнал Крелля передал другой экземпляр для напечатания в сборнике Кнорра.

Отзывов на сочинения {1} и {2} при жизни Лобачевского не было (если не считать краткого указания на сочинение {1} в заметке, помещенной в журнале «Библиотека для чтения»[5]) и одной общей фразы в отзыве Остроградского на сочинение {3}). Сочинение {3}

---

[1]) Обозрение преподаваний в имп. Казанском университете на 1841—1842 учебный год». Казань, 1841, стр. 11. Воспроизведено Л. Б. Модзалевским в сборнике «Материалы для биографии Н. И. Лобачевского», изд. АН СССР, М. — Л., 1948, документ № 453, стр. 422.

[2]) Речь идет о сочинении Лобачевского «Геометрические исследования по теории параллельных линий», помещенном в I томе настоящего издания.

[3]) К. К. Фойгт — Отчет имп. Казанского университета и учебного округа за 17 лет с 1827 по 1-е генваря 1844 года по управлению Тайного советника Мусина-Пушкина, Казань, 1844, стр. 301. Воспроизведено Л. Б. Модзалевским в том же сборнике, документ № 515, стр. 498.

[4]) См. т. III наст. издания, стр. 171 и наст. том, стр. 347.

[5]) Т. X за апрель 1835 г. Эта заметка воспроизведена в IV томе наст. издания на стр. 436—437.

было в 1842 г. направлено министром народного просвещения и президентом академии наук в Физико-математическое отделение Академии с просьбой дать на него отзыв. Отрицательный отзыв академика Остроградского был совершенно необоснован[1]).

Сочинения Лобачевского по теории рядов никогда не переиздавались ни в России, ни за границей, и в настоящем издании воспроизводятся впервые; сочинение {3} переведено на русский язык В. В. Степановым незадолго до его смерти.

Имеющиеся в иностранной литературе немногочисленные ссылки на эти сочинения[2]) носят случайный характер и к тому же нередко искажают содержание соответствующих работ Лобачевского. Биеренс де Хаан в своих известных таблицах интегралов указывает, что 37 интегралов он заимствовал из сочинения {2}[3]). В нашей литературе до самого последнего времени имелись лишь отрывочные сведения об этой стороне деятельности Лобачевского[4]); достаточно широко известны были только сформулированные Лобачевским определения основных понятий анализа. Лишь недавно появились статьи, специально посвященные работам Лобачевского по анализу[5]).

В настоящем издании сохранены обозначения оригинального издания, за исключением обозначения степеней тригонометрических функций (в оригинале $\sin x^n$ вместо $\sin^n x$ и т. д.), обозначения радикалов (в оригинале иногда $\sqrt{}$ вместо $\sqrt{\ \ }$) и некоторых других, явно противоречащих обозначениям, общепринятым в настоящее время.

В переводе сочинения {3} применяется современная терминология.

Редакцией добавлены (в квадратных скобках) номера глав (см. вводную статью, стр. 15), а также номера формул с литерами a, b и т. д., на которые имеются ссылки в комментариях.

Все явные опечатки и описки в формулах оригинального издания исправлены без специальных оговорок и разъяснений. Что касается тех случаев, когда Лобачевский допускает ошибки в формулах или вычислениях, или когда трудно решить вопрос о том, является

---

[1]) Отзыв Остроградского помещен на стр. 266 наст. тома. Подробнее об этом см. во вводной статье (стр. 29—30).

[2]) Burkhardt — Enz. der Math. Wiss., Bd. II_1, H. 7, 8; N. Nielsen — Handbuch der Theorie der Gamma-Funktion, Leipzig, 1906.

[3]) См. статьи «Интегралы Лобачевского в таблицах Биеренс де Хаана», стр. 413 II тома и стр. 256 наст. тома.

[4]) В. Ф. Каган — Лобачевский. Изд. АН СССР, М. — Л., 1944 и 1948 гг. А. В. Васильев — Математика. Петроград, 1921.

[5]) Г. Л. Лунц — О работах Лобачевского по математическому анализу. Историко-математические исследования, вып. II. Гостехиздат, М. — Л., 1949; Аналитические работы Н. И. Лобачевского. «Успехи математических наук», т. V, вып. I, 1950.

данная ошибка опечаткой или нет, то, как правило, ошибки исправлены, а в сносках приведен оригинальный текст. В немногих случаях, когда исправление ошибки в формуле невозможно без изменения текста, формула напечатана в том виде, как она помещена в оригинале, а в сносках приводится, с соответствующими пояснениями, исправленная формула.

Согласно общей установке, принятой в настоящем издании, начало каждой страницы оригинального издания отмечено в тексте знаком |, а номер соответствующей страницы указан на полях. (Это не относится к сочинениям, которые даются в русском переводе с иностранных языков.)

ОТЗЫВ М. В. ОСТРОГРАДСКОГО О СОЧИНЕНИИ ЛОБАЧЕВСКОГО «О СХОДИМОСТИ БЕСКОНЕЧНЫХ РЯДОВ»

Ниже приводится перевод с французского языка двух документов: I — извлечения из протокола Физико-математического отделения Академии наук с отзывом Остроградского о «мемуаре о сходимости рядов» и II — письменного рапорта Остроградского на эту же тему, адресованного отделению и приложенного к этому протоколу. Точное название сочинения Лобачевского ни в одном из документов не приведено, но из первых строк протокола («доклад о сборнике Казанских метеорологических наблюдений») ясно, что речь идет о сочинении «О сходимости бесконечных рядов», напечатанном в 1841 году в качестве приложения к «Meteorologische Beobachtungen aus dem Lehrbezirk der Kaiserlich Russischen Universität Kazan». Оба документа хранятся в Архиве Академии наук СССР [1]) и были воспроизведены вместе с их переводом Л. В. Модзалевским [2]).

I. Из протокола Физико-математического отделения Академии Наук

Класс физико-математический
No XI
От среды 10 июня 1842
§ 168

Г. академик Остроградский сделал доклад о сборнике Казанских метеорологических наблюдений и сообщил, что, отвечая на желание г-на министра и президента, он прочел мемуар о сходимости рядов, который в нем содержится. Г. Остроградский нашел, что эта новая работа г. Лобачевского похожа на его предыдущие работы; автор пренебрегает в ней первейшими принципами точного рассуждения, точно с предвзятым намерением осложняет понимание хода своей мысли, и эти недостатки не искупаются ни новизной результатов, ни упрощением в изложении того, что уже известно. Г. Остроградский не считает, поэтому, этот мемуар заслуживающим одобрения Академии [...]

---

[1]) I — Архив АН СССР, Ф. 3, оп. 1, № 94, Протоколы за 1842 г.; черновик — Ф. 1, оп. 1-а, № 66. II — Архив АН СССР, Ф. 1, оп. 2 — 1842, ФМ, § 168.

[2]) Материалы для биографии Н. И. Лобачевского. Собрал и редактировал Л. Б. Модзалевский. Изд. АН СССР, 1948, документы №№ 479—480, стр. 444—447. Перевод второго документа сделан неточно и нами исправлен.

II. Рапорт М. В. Остроградского

Рапорт

Первому Отделению императорской Академии Наук

Академия поручила мне рассмотреть мемуар о сходимости рядов и дать о нем отчет. Автор этого мемуара, г-н Лобачевский, ректор Казанского университета, уже известен, по правде говоря, с довольно невыгодной стороны, новой геометрией, которую он называет воображаемой, достаточно объемистым трактатом об алгебре и несколькими диссертациями по различным вопросам математического анализа. Мемуар, представленный моему рассмотрению, не содействует изменению репутации автора. Г-н Лобачевский пренебрегает в нем первейшими принципами точного рассуждения, словно с предвзятым намерением осложняет понимание хода своей мысли, и эти недостатки не искупаются ни новизной результатов, ни упрощением в изложении того, что уже известно.

Можно превзойти самого себя и прочесть плохо средактированный мемуар, если затрата времени искупится познанием новых истин, но более чем тяжело расшифровывать рукопись, которая их не содержит и которая трудна не возвышенностью идей, а причудливым оборотом предложений, недостатками в ходе рассуждений и нарочито применяемыми странностями.

Эта последняя черта присуща рукописи г-на Лобачевского; всё же мы прочли ее и не нашли в ней ничего, кроме известных разложений в ряды наиболее простых из трансцендентных функций. Эти разложения доказаны тяжеловесно и представлены обозначениями, которые, кроме автора, никто не употребляет, и не сопровождаются никакими действительно новыми замечаниями.

Автор поистине считает, что он сделал открытие; так, например, он говорит, что он первый обратил внимание на то, что теория тригонометрических функций может быть объяснена без помощи круга; однако, мы полагаем, что уже Лейбниц знал это.

Нам кажется, что мемуар г-на Лобачевского о сходимости рядов не заслуживает одобрения Академии.

Сего   июня 1842.

М. Остроградский

На рапорте имеются пометы академика П. Н. Фуса «Lu le 10 Juin 1842» и «I Cl., № 168».

ЗНАЧЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

1852

ВВОДНАЯ СТАТЬЯ И КОММЕНТАРИИ
Г.Л. ЛУНЦА

ЗНАЧЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

ОБЗОР СОЧИНЕНИЯ «ЗНАЧЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ»

Сочинение Н. И. Лобачевского «Значение некоторых определенных интегралов», состоящее из двух статей, является его последней работой, посвященной вопросам математического анализа, и хотя оно (это в особенности относится ко второй статье), несомненно, тесно примыкает к его работам по теории рядов, тем не менее существенно отличается от этих работ как по содержанию, так и по характеру изложения.

В работах по теории рядов Лобачевским был получен ряд выдающихся результатов; однако, за исключением, разве, найденного им признака сходимости, остальные открытия были сделаны им как бы мимоходом: основная цель этих работ состояла не столько в получении новых результатов, сколько в обосновании всего фундамента анализа, основным элементом которого, по мнению Лобачевского, должна стать теория рядов. И то большое внимание, которое Лобачевский уделяет в сочинениях по теории рядов своему признаку сходимости, объясняется, главным образом, тем, что его не удовлетворяло «легкое» отношение к вопросу о сходимости со стороны своих современников, иногда даже таких, как Коши. В сочинениях по теории рядов Лобачевский старается соблюдать исчерпывающую строгость в рассуждениях (что ему, с современной точки зрения, конечно, не всегда удается) и оговаривать при доказательствах все нужные условия.

В противоположность этому, основная цель сочинения «Значение некоторых определенных интегралов» вполне конкретна и отражена в названии сочинения.

Известно, что вычисление определенных интегралов занимало значительное место в сочинениях Лобачевского как по геометрии, так и по анализу, хотя и в геометрических и в аналитических работах оно играло, в основном, лишь роль средства, иллюстрирующего силу, полезность или правильность полученных Лобачевским результатов. Вполне естественно, что Лобачевский любил это, сослужившее ему добрую службу, средство и, как всегда, стремясь к обобщениям, поставил своей задачей изложение некоторых способов, позволяющих

«соединить» значения некоторых определенных интегралов, т. е. способов, каждый из которых может служить для вычисления различных интегралов.

Главное место среди этих способов занимают различные интегральные преобразования, которым посвящена, в основном, статья I. Соотношения (3), (4), [46a] принадлежат к числу оригинальных результатов Лобачевского.

Статья II содержит приложения к вычислению определенных интегралов свойств функции «гамма».

Что касается формы изложения, то следует отметить, что большинство выводов дается Лобачевским чисто формально, без обоснования по существу; в ряде важнейших мест не оговариваются даже условия, при которых эти выводы справедливы. Если учесть, что это сочинение было написано Лобачевским в последние годы его жизни, то кажется весьма правдоподобным, что, не обладая уже полной трудоспособностью, Лобачевский решил опубликовать накопившиеся у него за десять с лишним лет со времени написания последней работы по теории рядов результаты, хотя бы и в не совсем отделанном виде, так как он с полным основанием имел право считать эти результаты и в такой форме достойными самого глубокого внимания.

Переходим к обзору содержания сочинения «Значение некоторых определенных интегралов».

Сначала, пользуясь интегралом

$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx=\frac{b}{a^2+b^2},$$

Лобачевский, дифференцируя по параметру α интеграл

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x\operatorname{ctg}\alpha}}{x}\sin x\,dx,$$

приходит к справедливому при $0<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$ равенству

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}e^{-x\operatorname{ctg}\alpha}dx=\alpha, \qquad (2)^{1)}$$

из которого, в частности, получает

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}. \qquad (1)$$

---

1) Нумерация формул в настоящей статье совпадает с нумерацией в тексте Лобачевского.

Далее Лобачевский рассматривает интеграл

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} f(x)\,dx,$$

где функция $f(x)$ удовлетворяет условиям

$$f(\pi+x)=f(\pi-x)=f(x)$$

и, пользуясь разложением

$$\frac{1}{\sin x}=\frac{1}{x}-2x\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i^2\pi^2-x^2},$$

приходит к общей формуле

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} f(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx, \tag{3}$$

которую применяет к вычислению некоторых интегралов.

Если же функция $f(x)$ такова, что

$$f(\pi+x)=f(\pi-x)=-f(x),$$

то аналогичные выкладки приводят к равенству

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} f(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x\,dx. \tag{4}$$

Следует заметить, что функция, удовлетворяющая условиям, при которых выведено это равенство, может быть непрерывной в точках $k\pi+\frac{\pi}{2}\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ только если она в этих точках обращается в нуль.

Положив $f(x)=\frac{1}{\cos x}$, Лобачевский получает из (4)

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{tg} x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}. \tag{5}$$

Этот интеграл расходится; однако вывод Лобачевского справедлив, если под главным значением интеграла в левой части (5) понимать сумму ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} I_n,$$

где I_n — главное значение интеграла

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\operatorname{tg} x}{x}\,dx.$$

Затем Лобачевский переходит к теории гамма-функции.

Положив для целого положительного r

$$n^{\infty r} = n(n-1)\dots(n-r+1),$$

Лобачевский определяет функцию «гамма от n с показателем m» с помощью равенства

$$n^{\infty m} = \lim_{r\to\infty} \frac{r^m (n-m+r)^{\infty r}}{(n+r)^{\infty r}} \tag{6}$$

и ссылается на то, что существование предела, стоящего в правой части этого равенства, было им доказано для любых комплексных n и m в сочинении «Способ уверяться в исчезании бесконечных строк...»

Показав непротиворечивость этого определения с определением для случая, когда m целое и положительное, Лобачевский выводит основное соотношение

$$n^{\infty m} = n^{\infty p} (n-p)^{\infty m-p}, \tag{7}$$

с помощью которого выражает функцию «гамма с показателем» через «гамма полную»

$$n^{\infty p} = \frac{n^{\infty n}}{(n-p)^{\infty n-p}}.$$

После этого Лобачевский выводит некоторые свойства функции гамма («полной») и вычисляет некоторые ее частные значения. Положив далее, как и в своих сочинениях по теории рядов, для целого положительного r

$$(n+r)^{\infty r} = (n+r)^{n+r+\frac{1}{2}} e^{-r} \psi(r), \tag{10}$$

Лобачевский получает

$$\log \frac{\psi(r)}{\psi(r-1)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i i}{(i+1)(i+2)(n+r-1)^{i+1}}, \qquad [10a]$$

и показывает, что $\lim\limits_{r\to\infty} \psi(r) = f(n)$ существует при любом комплексном n и

$$\log f(n) = \log \psi(r) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^i i}{(i+1)(i+2)(n+r+\lambda)^{i+1}}. \qquad [10b]$$

Равенства (10) и (10b) могут служить определением функции $(n+r)^{\infty r}$ при любых комплексных n и r. Они по существу отличаются от соответствующих равенств, встречающихся в сочинениях Лобачевского по теории рядов [1]), лишь тем, что в правой части [10b] изменен порядок суммирования. Но произведенное Лобачевским изменение порядка суммирования делает двойной ряд в правой части [10b] сходящимся при любых комплексных n и r (кроме $n+r=0$ и целых отрицательных

[1]) См. статью «Обзор сочинений Н. И. Лобачевского по теории рядов» стр. 25—26 наст. тома.

значений $n+r$) и служит, следовательно, средством аналитического продолжения функции $(n+r)^{\infty r}$. Лобачевский, правда, не останавливается на этом вопросе, так как равенство [10b] ему нужно только для оценки асимптотического поведения функции $(n+r)^{\infty r}$, однако вряд ли можно считать такую перестановку порядка суммирования случайной.

Доказав далее, что интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^n \, dx$$

сходится, если $\operatorname{Re} n > -1$, и воспользовавшись асимптотическим равенством, основанным на (10), Лобачевский показывает, что

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^n \, dx = n^{\infty n}. \tag{11}$$

Показав, что равенство

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} x^n \, dx = \frac{n^{\infty n}}{a^{n+1}} \tag{12}$$

справедливо и для комплексных значений a ($\operatorname{Re} a > 0$), Лобачевский применяет это равенство к вычислению интегралов

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} \cos bx \, dx, \quad \int_0^{\infty} x^n e^{-ax} \sin bx \, dx \qquad (13), \ (14)$$

и ряда других.

Далее Лобачевский показывает, ка́к можно применять замену переменных под знаком двойного интеграла для вычисления значений определенного интеграла, и применяет этот способ к вычислению интеграла

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} \omega \cos^{2m+1} \omega \, d\omega \quad (\operatorname{Re} n > -1, \ \operatorname{Re} m > -1) \qquad [19a]$$

и других.

Пользуясь специальным приемом, обоснование которого дано в примечании [8], Лобачевский, исходя из равенства (12), доказывает, как и в сочинениях по теории рядов, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix} \, dx}{(a+ix)^{n+1}} = \frac{2\pi e^{-a}}{n^{\infty n}} \text{ [1]} \ (\operatorname{Re} a > 0, \ \operatorname{Re} n > -1), \tag{28}$$

а также получает, что при тех же условиях

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix} \, dx}{(a+ix)^{n+1}} = 0. \tag{29}$$

1) Здесь $i = \sqrt{-1}$. Лобачевский никогда не пользуется этим обозначением.

Обобщив этот прием (см. примечание [10]), Лобачевский приходит к примечательному интегральному преобразованию [1])

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{0}^{h} f(x) \varphi [z(\lambda - x)]\, dx = [f(\lambda - 0) + f(\lambda + 0)] \int_{0}^{\infty} \frac{\psi(x) - \psi(-x)}{x}\, dx, \quad (33)$$

где $\psi'(x) = \varphi(x)$ и $0 < \lambda < h$. При $h = \infty$ это равенство превращается в [33a] и имеет место при любом $\lambda > 0$.

Это весьма общее преобразование содержит, в частности, интегральную формулу Фурье

$$f(\lambda - 0) + f(\lambda + 0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{0}^{\infty} f(x) \cos [z(\lambda - x)]\, dx.$$

Из (33) и полученного аналогичным путем равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{0}^{h} f(x) \varphi [z(\lambda + x)]\, dx = 0 \quad (35)$$

Лобачевский получает, положив $\psi(x) = \sin x$, синус-трансформацию и косинус-трансформацию Фурье.

Формулы (28) и (29) также легко получаются из (33) и (35). Наконец, в первой статье рассматриваемого сочинения Лобачевский находит еще равенство

$$\int_{a - i\infty}^{a + i\infty} \frac{e^{\lambda t}\, dt}{t^{n+1}} \int_{0}^{\infty} e^{-xt} f(x)\, dx = \frac{2\pi i}{\Gamma(n+1)} \int_{0}^{\lambda} x^n f(\lambda - x)\, dx, \quad [46a]$$

являющееся обобщением преобразований Лапласа-Меллина, и пользуется им также для вычисления определенных интегралов.

Вторая статья посвящена целиком приложению гамма-функции к вычислению определенных интегралов вида

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin bx \sin x}{x(e^x - 1)}\, dx, \quad \int_{0}^{\infty} e^{-ax} \left(\frac{\sin bx}{x}\right)^n dx, \quad \int_{0}^{\infty} \left(\frac{\sin bx}{x}\right)^n dx.$$

---

[1]) Как выяснил Б. М. Гагаев (доклад на научной конференции Казанского университета, посвященной 125-летию создания Н. И. Лобачевским неевклидовой геометрии, февраль 1951 г.), формула типа (33) была получена в 1836 г. Лиувиллем (Note sur une manière de généraliser la formule de Fourier, Journ. de math. pures et appliquées, т. 10, стр. 102—105).

УЧЕНЫЯ

ЗАПИСКИ,

издаваемыя

ИМПЕРАТОРСКИМЪ

КАЗАНСКИМЪ УНИВЕРСИТЕТОМЪ.

1852.

КНИЖКА IV.

КАЗАНЬ,

ВЪ УНИВЕРСИТЕТСКОЙ ТИПОГРАФІИ.

1853.

Титульный лист IV книжки «Ученых записок Казанского университета» за 1852 г., в которой было напечатано сочинение «Значение некоторых определенных интегралов».

К стр. 275.

ЗНАЧЕНІЕ

НѢКОТОРЫХЪ ОПРЕДѢЛЕННЫХЪ ИНТЕГРАЛОВЪ.

СТАТЬЯ I.

Н. Лобачевскаго, Заслуженнаго Профессора.

Опредѣленные интегралы служатъ часто большимъ пособіемъ въ аналитическихъ рѣшеніяхъ, напримѣръ въ интегрированіи дифференціальныхъ уравненій. Однакожъ ученіе объ опредѣленныхъ интегралахъ до сихъ поръ еще не могло быть приведено въ систему, ни въ отношеніи къ значеніямъ интеграловъ, ни въ отношеніи къ различнымъ способамъ достигать этихъ значеній. Надобно желать, чтобы изслѣдованія болѣе распространяясь, могли доставить напередъ болѣе полноты ученію.

Здѣсь соединилъ я значенія нѣкоторыхъ опредѣленныхъ интеграловъ съ указаніемъ и различныхъ способовъ выводить эти значенія.

Начнемъ съ интеграла

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\sin x = \frac{1}{2}\pi \qquad (1)$$

гдѣ π окружность круга въ частяхъ поперечника. Этотъ интегралъ заключается въ другомъ

$$V = \int_0^\infty \frac{dx}{x}\, e^{-x\cot\alpha} . \sin x$$

гдѣ α произвольный постоянный уголъ $< \frac{1}{2}\pi$. Дифференцируя V въ отношеніи къ α, получимъ

$$\frac{dV}{d\alpha} . \sin\alpha^2 = \int_0^\infty dx . \sin x . e^{-x\cot\alpha}$$

Первая страница оригинального издания сочинения «Значение некоторых определенных интегралов» (1-я стр. IV книжки «Ученых записок Казанского университета» за 1852 г.).

ЗНАЧЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

СТАТЬЯ I

1852 IV 1 ‖ Определенные интегралы служат часто большим пособием в аналитических решениях, например в интегрировании дифференциальных уравнений. Однако ж учение об определенных интегралах до сих пор еще не могло быть приведено в систему ни в отношении к значениям интегралов, ни в отношении к различным способам достигать этих значений. Надобно желать, чтобы исследования, более распространяясь, могли доставить наперед более полноты учению.

Здесь соединил я значения некоторых определенных интегралов с указанием и различных способов выводить эти значения.

Начнем с интеграла

$$\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x}\sin x = \frac{1}{2}\pi, \tag{1}$$

где π — окружность круга в частях поперечника. Этот интеграл заключается в другом

$$V = \int\limits_0^\infty \frac{dx}{x} e^{-x\cot\alpha} \cdot \sin x,$$

где α произвольный постоянный угол $< \frac{1}{2}\pi$*. Дифференцируя V в отношении к α, получим

$$\frac{dV}{d\alpha}\sin^2\alpha = \int\limits_0^\infty dx \sin x \cdot e^{-x\cot\alpha}.$$

* Вернее $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Но вообще для постоянных a, b *

$$\int_0^\infty dx\, e^{-ax} \sin bx = \frac{b}{a^2+b^2},$$

$$\int_0^\infty dx\, e^{-ax} \cos bx = \frac{a}{a^2+b^2};$$

следовательно

$$\frac{dV}{d\alpha} = 1.$$

А как V должно делаться нулем для $\alpha = 0$ *, то

$$V = \alpha.$$

Так для всех углов $\alpha < \frac{1}{2}\pi$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x} \sin x \cdot e^{-x \cot \alpha} = \alpha. \tag{2}$$

Впрочем, угол α может быть как угодно близкий к $\frac{1}{2}\pi$, а следовательно в праве допускать $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ ⊘. В таком случае интеграл (2) переходит в интеграл (1).

Интеграл (1) заключается опять в интеграле более общего вида

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x} \sin x \cdot f(x),$$

где $f(x)$ — такая функция от x, которой значение не меняется с прибавлением π к углу x и с переменой x на $-x$ ♀. В таком случае [1]

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x} \sin x \cdot f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^\pi \frac{(-1)^i dx \sin x}{i\pi + x} f(x),$$

где знак суммы требует складывать члены, которые происходят, когда вместо i ставим по порядку все целые положительные числа от $i = 0$. Такое означение будем везде употреблять и в последствии.

---

* $a > 0$.

* $\lim\limits_{\alpha \to 0} V = 0$.

⊘ Интеграл (2) сходится равномерно при $0 < \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$.

♀ Так как функция $f(x)$ должна быть определена только для $x \geqslant 0$, то второе условие, по сути дела, обозначает, что $f(\pi - x) = f(x)$.

Далее

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\sin x\cdot f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{(-1)^i\,dx\sin x}{i\pi+x}f(x)+\sum_{i=0}^{\infty}\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi}\frac{(-1)^i\,dx\sin x}{i\pi+x}f(x).$$

3 | Когда в последнем интеграле ставим $\pi-x$ вместо x, то сделается

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\sin x\cdot f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{(-1)^i\,dx\sin x}{i\pi+x}f(x)+\sum_{i=0}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{(-1)^i\,dx\sin x}{(i+1)\pi-x}f(x)=$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{dx}{x}\sin x\cdot f(x)+\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{(-1)^i\,dx\sin x}{i\pi+x}f(x)+\sum_{i=0}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{(-1)^i\,dx\sin x}{(i+1)\pi-x}f(x)=$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{dx}{x}\sin x\cdot f(x)+\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{(-1)^i\,dx\sin x}{i\pi+x}f(x)-\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{(-1)^i\,dx\sin x}{i\pi-x}f(x)=$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}dx\sin x\cdot f(x)\left\{\frac{1}{x}-2x\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i^2\pi^2-x^2}\right\}.$$

Известно, что

$$\frac{1}{\sin x}=\frac{1}{x}-2x\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i^2\pi^2-x^2}\,^{*}.$$

После чего

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\sin x\cdot f(x)=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}dx\,f(x). \tag{3}$$

Так, полагая $f(x)=1$, находим

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\sin x=\frac{1}{2}\pi,$$

как и выше (1). Полагая $f(x)=\sin^2 x$,

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\sin^3 x=\frac{1}{4}\pi.$$

---

* См., например, Уиттекер и Ватсон — Курс современного анализа, ч. I, стр. 181, ГТТИ, М.—Л., 1933.

Вообще положив

$$f(x)=\sin^{2n} x,$$

получим для n целого положительного

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\sin^{2n+1} x=\int_0^{\frac{1}{2}\pi} dx\sin^{2n} x.$$

Если же функция $f(x)$ такова, что

$$f(-x)=+f(x);\quad f(\pi+x)=-f(x)^{*},$$

то [²]

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\sin x\cdot f(x)=\int_0^\pi \sum_{i=0}^\infty \frac{dx}{i\pi+x}\sin x\cdot f(x)=$$

$$=\sum_{i=0}^\infty \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{i\pi+x}\sin x\cdot f(x)+\sum_{i=0}^\infty \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} \frac{dx}{i\pi+x}\sin x\cdot f(x)=$$

$$=\sum_{i=0}^\infty \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{i\pi+x}\sin x\cdot f(x)+\sum_{i=0}^\infty \int_{\frac{1}{2}\pi}^{0} \frac{dx\sin x}{(i+1)\pi-x} f(x)=$$

$$=\sum_{i=0}^\infty \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{i\pi+x}\sin x\cdot f(x)-\sum_{i=1}^\infty \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx\sin x}{i\pi-x} f(x)=$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{x}\sin x\cdot f(x)-2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} x\,dx\sin x\cdot f(x)\sum_{i=1}^\infty \frac{1}{i^2\pi^2-x^2}=$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}\pi} dx\sin x\cdot f(x)\left\{\frac{1}{x}-2x\sum_{i=1}^\infty \frac{1}{i^2\pi^2-x^2}\right\}=\int_0^{\frac{1}{2}\pi} dx\cos x\cdot f(x)\ ^{*}.$$

---

* То-есть $f(\pi+x)=f(\pi-x)=-f(x)$. Так как отсюда, в частности, следует, что $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, то функция, обладающая этими свойствами, может быть непрерывной в точках $k\pi+\frac{\pi}{2}$ только, когда $f\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=0$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$.

* Так как

$$\operatorname{ctg} x=\frac{1}{x}-2x\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2\pi^2-x^2}.$$

Таким образом,

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\sin x\cdot f(x)=\int_0^{\frac{1}{2}\pi} dx\cos x\cdot f(x). \qquad (4)$$

Например положив

$$f(x)=\frac{1}{\cos x},$$

находим

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\operatorname{tang} x=\frac{1}{2}\pi \text{ [8]}. \qquad (5)$$

Лежандр приходит к этому интегралу другою дорогой (Exercices de calcul intégral, Tome I. p. 181).

5 | Значение многих определенных интегралов может быть дано помощию функции, которую Лежандр назвал *гамма* и для которой я предложил название *уступа* в моем «*Способе увериться в исчезании бесконечных строк* и проч.» *, желая тем выразить, что функция происходит подобно степени, но что здесь множители, не будучи равны, следуют один за другим, отступая назад единицей. Название не составляет еще сущности, но я удержу по крайней мере означение более удобное и более выгодное для вычисления *.

Для всякого числа n и для целого положительного r, под

$$n^{\infty r}$$

я разумею произведение из r производителей, от первого n и потом уменьшая единицей по порядку, до последнего $n-r+1$. Так, что

$$n^{\infty r}=n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-r+1).$$

Затем для всяких двух чисел n, m,

$$n^{\infty m}=r^m\,\frac{(n-m+r)^{\infty r}}{(n+r)^{\infty r}}, \qquad (6)$$

---

* Лобачевский цитирует по памяти и не точно. Термином «уступ» в сочинении «Способ увериться в исчезании бесконечных строк...» он не пользовался. Этот термин встречается в сочинении Лобачевского «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных» (см. том II наст. издания, стр. 398).

* Обозначения Лобачевского совпадают, по сути дела, с общепринятыми в настоящее время обозначениями для факториальной функции. Поскольку Лобачевский рассматривает функцию гамма как частный случай обозначаемой им с помощью символа $n^{\infty m}$ функции, зависящей от двух аргументов, то естественно, что ему неудобно пользоваться обозначениями Лежандра.

где целое положительное число $r = \infty$ *. В упомянутом моем сочинении * я доказал, что значение выражения (6) всегда приближается к известной границе с возрастанием числа r, каковы бы числа n, m ни были ⊘, действительные или воображаемые под видом $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, с действительными числами α, β. Значение выражения (6) для $r = \infty$ будет то, что я называю *гамма* от n с *показателем* m. Если же $m = n$, то гамма от n делается той функцией, которую Лежандр означает

$$\Gamma(n+1).$$

Различные свойства гаммы могут быть непосредственно выведены из данного выражения (6), которое служит определением этой функции.

Если m — целое положительное число, то

$$n^{\infty m} = r^m \frac{(n-m+r)^{\infty r}}{(n+r)^{\infty r}} =$$

$$= r^m \frac{(n-m+r)^{\infty r}}{(n+r)^{\infty m}(n+r-m)^{\infty r - m}} =$$

$$= r^m \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{(n+r)^{\infty m}}.$$

Здесь с возрастанием r дробь

$$\frac{r^m}{(n+r)^{\infty m}}$$

6 | обращается в единицу, следовательно гамма от n с показателем m целым положительным делается произведением

$$n(n-1)\ \ldots\ (n-m+1)$$

из m производителей.

---

* Лобачевский обычно оговаривает предельный переход в тексте, не пользуясь никакими специальными обозначениями. Формула (6) со сделанной оговоркой может быть записана в более привычной для современного читателя форме

$$n^{\infty m} = \lim_{r\to\infty} r^m \frac{(n-m+r)^{\infty r}}{(n+r)^{\infty r}}.$$

* То-есть в сочинении «Способ уверяться ...» [см. формулы (42) на стр. 110, (54) на стр. 114 и (119) на стр. 158 наст. тома].

⊘ За исключением случая, когда n — целое отрицательное число, а $n - m$ не является целым отрицательным (см. примечание [24] к сочинению «Способ уверяться...» на стр. 235—237 наст. тома).

Для $m=1$ и для всякого n

$$n^{\infty 1}=n.$$

Для $m=0$ и для всякого n

$$n^{\infty 0}=1.$$

Уравнение (6) для произвольных чисел n, m, p дает

$$n^{\infty p}=r^p\,\frac{(n-p+r)^{\infty r}}{(n+r)^{\infty r}},$$

$$(n-p)^{\infty m-p}=r^{m-p}\,\frac{(n-m+r)^{\infty r}}{(n-p+r)^{\infty r}},$$

$$n^{\infty m}=r^m\,\frac{(n-m+r)^{\infty r}}{(n+r)^{\infty r}}.$$

Отсюда следует, что

$$n^{\infty m}=n^{\infty p}(n-p)^{\infty m-p}. \tag{7}$$

Для $n=m$ это дает

$$n^{\infty p}=\frac{n^{\infty n}}{(n-p)^{\infty n-p}}.$$

Итак, гамма с показателем определяется помощию гаммы полной, для которой Лежандр дал таблицы и которой значения известны для всех чисел, как скоро даны для чисел от нуля до единицы.

Для $m=n$ уравнение (6) делается

$$n^{\infty n}=r^n\,\frac{r^{\infty r}}{(n+r)^{\infty r}},$$

а когда ставим сюда $-n$ вместо n,

$$(-n)^{\infty -n}=r^{-n}\,\frac{r^{\infty r}}{(r-n)^{\infty r}}.$$

Произведение двух последних уравнений дает

$$n^{\infty n}(-n)^{\infty -n}=\frac{1}{1-n^2}\cdot\frac{2^2}{2^2-n^2}\cdot\frac{3^2}{3^2-n^2}\cdots$$

Это значит, для действительных чисел n,

$$n^{\infty n}(-n)^{\infty -n}=\frac{n\pi}{\sin n\pi}, \tag{8}$$

$$(n\sqrt{-1})^{\infty n\sqrt{-1}}(-n\sqrt{-1})^{\infty -n\sqrt{-1}}=\frac{2n\pi}{e^{n\pi}-e^{-n\pi}}, \tag{9}$$

где e основание Неперовых логарифмов.

Для $n=\frac{1}{2}$ в уравнении (8)

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\infty\frac{1}{2}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{\infty-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\pi.$$

Между тем, согласно с уравнением (7),

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\infty\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{\infty-\frac{1}{2}}.$$

После чего

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\infty\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{\infty-\frac{1}{2}}=\sqrt{\pi}.$$

Полагаем для r целых положительных чисел

$$(n+r)^{\infty r}=(n+r)^{n+r+\frac{1}{2}}e^{-r}\psi(r), \tag{10}$$

где $\psi(r)$ число в зависимости от r и n, как это требует самое уравнение. Подобным образом

$$(n+r-1)^{\infty r-1}=(n+r-1)^{n+r-\frac{1}{2}}e^{1-r}\psi(r-1).$$

Из этих двух уравнений следует

$$\frac{\psi(r)}{\psi(r-1)}=e\left(\frac{n+r-1}{n+r}\right)^{n+r-\frac{1}{2}},$$

$$\log\frac{\psi(r)}{\psi(r-1)}=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i}{(i+1)(i+2)(n+r)^{i+1}}.$$

Или, когда располагаем по степеням от $n+r-1$,

$$\log\frac{\psi(r)}{\psi(r-1)}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^i i}{(i+1)(i+2)(n+r-1)^{i+1}}. \tag{10a}$$

Два выражения для разности $\log\psi(r)-\log\psi(r-1)$ показывают, что с возрастанием числа r эта разность двух логарифмов обращается в нуль и что, следовательно, $\psi(r)$ перестает зависеть от r и начинает быть функцией от одного числа n, которую означим $f(n)$ и которой значение может приблизительно быть вычислено помощию

уравнения

8 | $$\log f(n) = \log \psi(r) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{i(-1)^i}{(i+1)(i+2)(n+r+\lambda)^{i+1}}$$ [4]. [10b]

Здесь всегда можно взять r довольно большим числом, чтобы $\psi(r)$ принимать за $f(n)$ как для действительных чисел n, так и для чисел под видом $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ с действительными числами α, β. В этом последнем случае полагая

$$p = \alpha + r + \lambda, \quad \operatorname{tang} \omega = \frac{\beta}{p}\,^{*},$$

получим

$$\log \frac{f(n)}{\psi(r)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^i i}{(i+1)(i+2)(p+\beta\sqrt{-1})^{i+1}} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{i(-1)^i \cos^{i+1}\omega}{(i+1)(i+2)p^{i+1}} \{\cos(i+1)\omega - \sqrt{-1}\sin(i+1)\omega\}.$$

Таким образом, разность $\log f(n) - \log \psi(r)$ состоит из двух частей, действительной и воображаемой, которые обе делаются нечувствительными для весьма большого числа r.

Переходим теперь к интегралу

$$\int_0^{\infty} dx\, x^n e^{-x} = N.$$

Во первых заметим, что этому интегралу принадлежит определенное значение, как функция от n *. Чтоб в этом увериться, ставим ax вместо x, разумея под a положительное число; получим

$$\int_0^{\infty} dx\, x^n e^{-ax} = \frac{N}{a^{n+1}}.$$

Далее интеграл N можем рассматривать как сумму из бесконечного числа интегралов; таким образом

$$\int_0^{\infty} dx\, x^n e^{-x} = a^n \sum_{i=0}^{\infty} e^{-ia} \int_0^{a} \left(i + \frac{x}{a}\right)^n e^{-x}\, dx.$$

---

* Вместо p и ω следовало бы писать соответственно p_λ и ω_λ.

* Если $n > -1$.

Если в бесконечной строке останавливаемся перед тем членом, где $i = r$, то остаток в строке будет

$$R = a^n e^{-ra} \sum_{i=0}^{\infty} e^{-ia} \int_0^a \left(r + i + \frac{x}{a}\right)^n e^{-x}\, dx;$$

следовательно

$$R < a^n e^{-ra} \sum_{i=0}^{\infty} e^{-ia} \int_0^a (r + i + 1)^n e^{-x}\, dx,$$

$$R < (1 - e^{-a})\, a^n e^{-ar} \sum_{i=0}^{\infty} e^{-ia} (r + i + 1)^n.$$

В этой последней строке содержание* каждого члена к предъидущему

$$e^{-a} \left(1 + \frac{1}{r+i}\right)^n;$$

следовательно, это содержание сделается везде менее единицы, как скоро r довольно велико, чтоб

$$r > \frac{1}{e^{\frac{a}{n}} - 1},$$

которому условию всегда можно удовлетворить для всех действительных чисел a, n. Содержание, о котором здесь говорится, для n положительного числа, менее

$$e^{-a} \left(1 + \frac{1}{r}\right)^n;$$

следовательно для такого числа n

$$R < a^n e^{-ar} \frac{1 - e^{-a}}{1 - e^{-ar}\left(1 + \frac{1}{r}\right)^n}\, r^n \left(1 + \frac{1}{r}\right)^n$$

может быть сделано как угодно малым с возрастанием r.

Для n отрицательного содержание двух членов в строке R постоянно менее

$$e^{-a},$$

остаток строки $R < a^n e^{-ar} (r + 1)^n$, следовательно, увеличением r может быть сделан как угодно малым.

---

* Словом *содержание* Лобачевский всегда называет *отношение* двух величин.

Итак для всех чисел действительных n, положительных и отрицательных, строка для N исчезает, а следовательно интегралу N принадлежит определенное значение. Отсюда не следует однако ж, чтобы значение N не могло быть бесконечно великим, потому что таковы могут быть значения первых членов в строке
20 для N. | Впрочем, этот случай только предполагается для n отрицательных, когда самые елементы интеграла увеличиваются до бесконечности.

Интегрирование по частям и когда действительная часть в $n > -1$ дает

$$\int_0^\infty dx\, x^n e^{-x} = \frac{1}{(n+r)^{\infty r}} \int_0^\infty dx\, e^{-x} x^{n+r},$$

где r — целое положительное число. Отсюда видно, что интеграл с отрицательным числом n приводится к тому случаю, когда показатель этот положительный и если к тому

$$n + 1 > 0.$$

Следуя принятому означению (6), можем написать

$$\int_0^\infty dx\, x^n e^{-x} = r^{-n} \frac{n^{\infty n}}{r^{\infty r}} \int_0^\infty dx\, e^{-x} x^{n+r} {}^{*},$$

и наконец, основываясь на уравнении (10), поставить сюда, когда r чрезвычайно большое число,

$$\varphi(0)\, r^{\infty r} = r^{r+\frac{1}{2}} e^{-r},$$

где $\varphi(0)$ * — число независимое от r. После чего

$$\int_0^\infty dx\, x^n e^{-x} = n^{\infty n} \varphi(0)\, r^{-\frac{1}{2}} \int_0^\infty dx \left(\frac{x}{r}\right)^{n+r} e^{r-x}.$$

Поставя $r + \xi$ вместо x, получим

$$\int_0^\infty dx\, x^{-n} e^{-x} = n^{\infty n} \varphi(0)\, r^{-\frac{1}{2}} \int_{-r}^\infty d\xi\, e^{-\xi} \left(1 + \frac{\xi}{r}\right)^{n+r} =$$

$$= n^{\infty n} \varphi(0)\, r^{-\frac{1}{2}} \left\{ \int_0^r d\xi\, e^{\xi} \left(1 - \frac{\xi}{r}\right)^{n+r} + \int_0^\infty d\xi\, e^{-\xi} \left(1 + \frac{\xi}{r}\right)^{n+r} \right\}.$$

---

* В правой части подразумевается переход к пределу при $r \to \infty$.

* В обозначении формулы [10b]

$$\varphi(0) = \frac{1}{f(0)}.$$

Для r чрезвычайно большого числа, как здесь предполагается, можем довольствоваться первой степенью от r в знаменателе, а потому принимать

$$e^{-\xi}\left(1+\frac{\xi}{r}\right)^{n+r}=\left(1+\frac{n\xi}{r}\right)e^{-\frac{\xi^2}{2r}},$$

$$e^{\xi}\left(1-\frac{\xi}{r}\right)^{n+r}=\left(1-\frac{n\xi}{r}\right)e^{-\frac{\xi^2}{2r}}.$$

11 | После чего и для $r=\infty$

$$\int_0^\infty dx\, x^n e^{-x}=n^{\infty n}\varphi(0)\,r^{-\frac{1}{2}}\left\{\int_0^\infty d\xi\left(1-\frac{n\xi}{r}\right)e^{-\frac{\xi^2}{2r}}+\int_0^\infty d\xi\left(1+\frac{n\xi}{r}\right)e^{-\frac{\xi^2}{2r}}\right\}=$$

$$=2n^{\infty n}\varphi(0)\,r^{-\frac{1}{2}}\int_0^\infty d\xi\, e^{-\frac{\xi^2}{2r}},$$

а поставя

$$\xi=\sqrt{2rx},$$

$$\int_0^\infty dx\, x^n e^{-x}=\sqrt{2}\,\varphi(0)\,n^{\infty n}\int_0^\infty dx\, x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}\ [5];$$

делая $n=-\frac{1}{2}$, находим

$$\varphi(0)=\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^{\infty-\frac{1}{2}}\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}};$$

следовательно,

$$\int_0^\infty dx\, x^n e^{-x}=\frac{n^{\infty n}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty dx\, x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}.$$

Поставя сюда $n=1$, получим

$$\int_0^\infty dx\, x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}=\sqrt{\pi}$$

и наконец

$$\int_0^\infty dx\, x^n e^{-x}=n^{\infty n} \qquad (11)$$

для всех чисел n действительных и воображаемых, если только действительная часть в $n>-1$.

В уравнение (11) ставя ax вместо x, для действительного положительного числа a находим

$$\int_0^\infty dx\, x^n e^{-ax} = \frac{n^{\infty n}}{a^{n+1}}. \tag{12}$$

13 | Впрочем, приложив $b\sqrt{-1}$ к a с действительным числом $b < a$ по величине* находим

$$\int_0^\infty dx\, x^n e^{-(a+b\sqrt{-1})x} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-b\sqrt{-1})^i}{i^{\infty i}} \int_0^\infty e^{-ax} x^{n+i}\, dx^{*} =$$

$$= \frac{n^{\infty n}}{a^{n+1}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(n+i)^{\infty i}}{i^{\infty i}} \left(\frac{-b\sqrt{-1}}{a}\right)^i =$$

$$= \frac{n^{\infty n}}{a^{n+1}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-n-1)^{\infty i}}{i^{\infty i}} \left(\frac{b\sqrt{-1}}{a}\right)^i =$$

$$= \frac{n^{\infty n}}{a^{n+1}} \left(1 + \frac{b\sqrt{-1}}{a}\right)^{-n-1} = \frac{n^{\infty n}}{(a+b\sqrt{-1})^{n+1}}.$$

Продолжая ставить $a + b\sqrt{-1}$ вместо a, таким образом уверяемся, что значение интеграла (12) верно для всех положительных чисел a, для всех вообще действительных чисел b и покуда действительная часть в $n > -1$.

Другим образом приходим к тому же заключению, рассматривая в интеграле (12), значение которого пусть будет V, число a переменным. Интегрируя по частям и дифференцируя V в отношении к a, находим

$$\frac{dV}{da} + \frac{n+1}{a} V = 0;$$

отсюда

$$V = \frac{C}{a^{n+1}}.$$

Постоянное

$$C = n^{\infty n},$$

как мы нашли для действительного числа a [6].

* То-есть по абсолютной величине.

* Так как

$$e^{-b\sqrt{-1}x} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-b\sqrt{-1})^i}{i^{\infty i}} x^i.$$

В уравнении (12) поставя $a+b\sqrt{-1}$ вместо a и разделяя действительные части от воображаемых, при которых множитель $\sqrt{-1}$, получим

$$\int_0^\infty dx\, x^n \cos bx \cdot e^{-ax} = \frac{1}{2}\, n^{\infty n}\{(a+b\sqrt{-1})^{-n-1} + (a-b\sqrt{-1})^{-n-1}\}, \quad (13)$$

$$\int_0^\infty dx\, x^n \sin bx \cdot e^{-ax} =$$

$$= \frac{n^{\infty n}}{2\sqrt{-1}}\{(a+b\sqrt{-1})^{-n-1} - (a-b\sqrt{-1})^{-n-1}\}. \quad (14)$$

13 | Полагая здесь $b = a\,\mathrm{tang}\,\alpha$ и разумея $\alpha < \frac{1}{2}\pi$ положительный угол *,

$$\int_0^\infty dx\, x^n e^{-ax}\cos(ax\,\mathrm{tang}\,\alpha) = \frac{n^{\infty n}}{a^{n+1}}\cos^{n+1}\alpha\cos(n+1)\alpha, \quad (15)$$

$$\int_0^\infty dx\, x^n e^{-ax}\sin(ax\,\mathrm{tang}\,\alpha) = \frac{n^{\infty n}}{a^{n+1}}\cos^{n+1}\alpha\sin(n+1)\alpha. \quad (16)$$

Или, поставя $a\cot\alpha$ вместо a *,

$$\int_0^\infty dx\, x^n e^{-ax\cot\alpha}\cos(ax) = \frac{n^{\infty n}}{a^{n+1}}\sin^{n+1}\alpha\cos(n+1)\alpha, \quad (17)$$

$$\int_0^\infty dx\, x^n e^{-ax\cot\alpha}\sin(ax) = \frac{n^{\infty n}}{a^{n+1}}\sin^{n+1}\alpha\sin(n+1)\alpha. \quad (18)$$

Например для $n = -\frac{1}{2}$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}} e^{-ax\cot\alpha}\cos(ax) = \sqrt{\frac{\pi}{a}\sin\alpha}\,\cos\frac{1}{2}\alpha,$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}} e^{-ax\cot\alpha}\sin(ax) = \sqrt{\frac{\pi}{a}\sin\alpha}\,\sin\frac{1}{2}\alpha.$$

---

* Это условие излишне. Можно считать, что $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, так как формулы (13), (14) справедливы при любом конечном b, если $a > 0$.

* Здесь уже $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Соединение двух интегралов (12), (17) дает

$$\int_0^\infty dx\, e^{-ax\cot\alpha}\, x^{n-1}(1-\cos ax) = \frac{n^{\infty n}}{na^n}\operatorname{tang}^n\alpha\,\{1-\cos n\alpha\cos^n\alpha\}. \quad [18a]$$

Для числа n весьма малого можно принимать

$$1-\cos n\alpha\cos^n\alpha = \frac{1}{2}n^2\alpha^2 - n\log\cos\alpha$$

и следовательно

$$\int_0^\infty dx\, x^{n-1}(1-\cos ax)\, e^{-ax\cot\alpha} = \frac{n^{\infty n}}{a^n}\operatorname{tang}^n\alpha\left\{\frac{1}{2}n\alpha^2 - \log\cos\alpha\right\},$$

а полагая здесь $n=0$, получим

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}(1-\cos ax)\, e^{-ax\cot\alpha} = -\log\cos\alpha\,[^7]. \quad (19)$$

Для каких нибудь двух функций $f(x)$, $\varphi(x)$ от переменного x пусть известны два интеграла

$$A = \int_0^\infty dx\, e^{-x} f(x), \qquad B = \int_0^\infty dx\, e^{-x}\varphi(x).$$

14 | Произведение двух этих интегралов выражается двойным интегралом

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty dy\, e^{-x-y} f(x)\varphi(y) = AB$$

или, когда поставим сюда x^2, y^2 вместо x, y,

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty dy\, xy\, e^{-x^2-y^2} f(x^2)\varphi(y^2) = \frac{1}{4}AB.$$

Полагая здесь

$$x = y\operatorname{tang}\omega$$

и рассматривая ω переменным вместо x, получим

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\omega\sin\omega}{\cos^3\omega}\int_0^\infty dy\, y^3 e^{-\frac{y^2}{\cos^2\omega}} f(y^2\operatorname{tang}^2\omega)\,\varphi(y^2) = \frac{1}{4}AB.$$

Наконец, пусть

$$y = \cos\omega\cdot\sqrt{r}$$

с переменным r вместо y, то

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\omega \sin\omega \cos\omega \int_0^{\infty} r\,dr\,e^{-r} f(r\sin^2\omega)\,\varphi(r\cos^2\omega) = \frac{1}{2}AB.$$

Например, когда

$$f(x) = x^n, \qquad \varphi(x) = x^m$$

с постоянными n, m, где действительная часть > -1, мы видели (11)

$$A = n^{\infty n},\ B = m^{\infty m}.$$

После чего

$$\int_0^{\infty} dr\,e^{-r} r^{n+m+1} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\omega \sin^{2n+1}\omega \cos^{2m+1}\omega = \frac{1}{2} n^{\infty n} m^{\infty m},$$

а по интегрировании в отношении к r,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\omega \sin^{2n+1}\omega \cos^{2m+1}\omega = \frac{n^{\infty n} m^{\infty m}}{2(n+m+1)^{\infty\, n+m+1}} \tag{19a}$$

или для всех чисел n, m, где действительная часть в каждом > -1,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\omega \sin^n\omega \cos^m\omega = \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\infty \frac{n-1}{2}} \left(\frac{m-1}{2}\right)^{\infty \frac{m-1}{2}}}{2\left(\frac{n+m}{2}\right)^{\infty \frac{n+m}{2}}}. \tag{20}$$

15 | Для $m = 0$ это дает

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\omega \sin^n\omega = \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\infty \frac{n-1}{2}}}{2\left(\frac{n}{2}\right)^{\infty \frac{n}{2}}} \sqrt{\pi}. \tag{21}$$

Например, когда в интеграле (3) полагаем

$$f(x) = \sin^{2n} x$$

с положительным целым числом n или $n = 0$, то находим

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x} \sin^{2n+1} x = \frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)^{\infty\, n-\frac{1}{2}}}{2\,n^{\infty n}} \sqrt{\pi}. \tag{22}$$

Для $n=0$ это снова дает интеграл (1), потому что в таком случае

$$\left(n-\frac{1}{2}\right)^{\infty n-\frac{1}{2}}=\sqrt{\pi},$$

$$n^{\infty n}=1.$$

Для $n=1$ в уравнении (22) будет

$$\left(n-\frac{1}{2}\right)^{\infty n-\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\infty\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

$$n^{\infty n}=1;$$

следовательно,

$$\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x}\sin^3 x=\frac{1}{4}\pi,$$

как было найдено выше (4).

Другим образом приходим к интегралу (20) от двойного интеграла

$$\int\limits_0^\infty dx\, x^n \int\limits_0^\infty dy\, y^m e^{-x-y}=n^{\infty n}m^{\infty m}.$$

Вместо y и x поставя сюда

$$\frac{y}{1+u},\ \frac{yu}{1+u}$$

и рассматривал потом u переменным вместо x, получим

16 $$\int\limits_0^\infty \frac{u^n\,du}{(1+u)^{n+m+2}}\int\limits_0^\infty dy\, y^{n+m+1}e^{-y}=n^{\infty n}m^{\infty m},$$

а произведя интегрирование в отношении к y,

$$\int\limits_0^\infty \frac{u^n\,du}{(1+u)^{n+m+2}}=\frac{n^{\infty n}m^{\infty m}}{(n+m+1)^{\infty n+m+1}},$$

который интеграл и переходит в интеграл

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} d\omega \sin^{2n+1}\omega\cos^{2m+1}\omega=\frac{1}{2}\frac{n^{\infty n}m^{\infty m}}{(n+m+1)^{\infty n+m+1}}, \qquad (23)$$

когда делаем

$$u=\operatorname{tang}^2\omega$$

с условием, чтобы действительная часть в n, m была в каждом > -1. Так для $2m+1=0$ получим

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\omega \sin^{2n+1}\omega = \frac{n^{\infty n}\sqrt{\pi}}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{\infty n+\frac{1}{2}}}. \tag{24}$$

Если в интеграле (23) полагаем

$$n = p-1,$$
$$m = q-p-1,$$
$$\operatorname{tang}\omega = x^{\frac{1}{2p}},$$

то условия для чисел n, m теперь для p, q сделаются такими:

$$p>0, \qquad q>p.$$

Самый интеграл (23) примет вид

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\left(1+x^{\frac{1}{p}}\right)^q} = \frac{p^{\infty p}(q-p-1)^{\infty q-p-1}}{(q-1)^{\infty q-1}}. \tag{25}$$

Для $q=1$ и для $p<1$ последний интеграл делается

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^{\frac{1}{p}}} = \frac{p\pi}{\sin p\pi}. \tag{26}$$

Вообще для $p>0$, $q>p$ можно интегралу (25) дать такой вид:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\left(1+x^{\frac{1}{p}}\right)^q} = \frac{(q-p-1)^{\infty q-1}}{(q-1)^{\infty q-1}} \cdot \frac{p\pi}{\sin p\pi}. \tag{27}$$

17 Весьма примечательный определенный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx\, e^{x\sqrt{-1}}}{(a+x\sqrt{-1})^{n+1}} = \frac{2\pi e^{-a}}{n^{\infty n}} \tag{28}$$

может быть доказан различным образом. Здесь n — число, в котором действительная часть > -1 *.

---

* Следует также предположить, что $a>0$ (или, в более общем случае, $\mathrm{Re}\, a>0$).

Интеграл (28) был вычислен Лобачевским в сочинениях «Способ уверяться...» и «О сходимости бесконечных рядов» другими способами (см. стр. 151—153 и 215—217 наст. тома)

В интеграле (12) ставя $a+b\sqrt{-1}$ вместо a, получим

$$\int_0^\infty dx\, e^{-(a+b\sqrt{-1})x} x^n = \frac{n^{\infty n}}{(a+b\sqrt{-1})^{n+1}}.$$

Умножая на $db\, e^{b\sqrt{-1}}$ и интегрируя от $-b$ до $+b$, находим

$$\int_0^\infty dx\, x^n e^{-ax} \frac{e^{b(1-x)\sqrt{-1}} - e^{-b(1-x)\sqrt{-1}}}{(1-x)\sqrt{-1}} = n^{\infty n} \int_{-b}^{+b} \frac{e^{b\sqrt{-1}}\, db}{(a+b\sqrt{-1})^{n+1}}.$$

Или, разложив первый интеграл на два с границами от $x=0$ до $x=1$, потом от $x=1$ до $x=\infty$,

$$n^{\infty n} \int_{-b}^{+b} \frac{e^{b\sqrt{-1}}\, db}{(a+b\sqrt{-1})^{n+1}} = \int_0^1 dx\, x^n e^{-ax} \frac{e^{b(1-x)\sqrt{-1}} - e^{-b(1-x)\sqrt{-1}}}{(1-x)\sqrt{-1}} +$$

$$+ \int_1^\infty dx\, x^n e^{-ax} \frac{e^{b(1-x)\sqrt{-1}} - e^{-b(1-x)\sqrt{-1}}}{(1-x)\sqrt{-1}}.$$

Если же во второй части этого уравнения поставим в последний интеграл $1+x$ вместо x; в первый интеграл $1-x$ вместо x, то получим

$$n^{\infty n} \int_{-b}^{+b} \frac{e^{b\sqrt{-1}}\, db}{(a+b\sqrt{-1})^{n+1}} = e^{-a} \int_0^1 dx\, (1-x)^n e^{ax} \frac{e^{bx\sqrt{-1}} - e^{-bx\sqrt{-1}}}{x\sqrt{-1}} +$$

$$+ e^{-a} \int_0^\infty dx\, (1+x)^n e^{-ax} \frac{e^{bx\sqrt{-1}} - e^{-bx\sqrt{-1}}}{x\sqrt{-1}}; \quad [28a]$$

Поставя сюда $\frac{x}{b}$ вместо x,

16 | $$n^{\infty n} \int_{-b}^{+b} \frac{e^{b\sqrt{-1}}\, db}{(a+b\sqrt{-1})^{n+1}} = e^{-a} \int_0^b dx \left(1-\frac{x}{b}\right)^n e^{\frac{a}{b}x} \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{x\sqrt{-1}} +$$

$$+ e^{-a} \int_0^\infty dx \left(1+\frac{x}{b}\right)^n e^{-\frac{a}{b}x} \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{x\sqrt{-1}} =$$

$$= 2e^{-a} \int_0^b \frac{dx}{x} \sin x \cdot \left(1-\frac{x}{b}\right)^n e^{\frac{a}{b}x} +$$

$$+ 2e^{-a} \int_0^\infty \frac{dx}{x} \sin x \cdot \left(1+\frac{x}{b}\right)^n e^{-\frac{a}{b}x}. \qquad [28b]$$

Для $b = \infty$ это последнее уравнение делается

$$n^{\infty n} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{b\sqrt{-1}}\, db}{(a + b\sqrt{-1})^{n+1}} = 4\, e^{-a} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x} \sin x \quad [^8] \qquad [28c]$$

или наконец, внеся сюда значение (1) последнего интеграла:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{b\sqrt{-1}}\, db}{(a + b\sqrt{-1})^{n+1}} = \frac{2\pi\, e^{-a}}{n^{\infty n}},$$

как и предполагалось (28), покуда действительная часть в a положительная, в $n > -1$.

Если, поставя $a + b\sqrt{-1}$ вместо a, умножаем уравнение (12) на

$$e^{-b\sqrt{-1}}\, db$$

и потом снова интегрируем в отношении к b от $-b$ до $+b$, то получим

$$n^{\infty n} \int_{-b}^{+b} \frac{e^{-b\sqrt{-1}}\, db}{(a + b\sqrt{-1})^{n+1}} = \int_{-b}^{+b} db\, e^{-b\sqrt{-1}} \int_0^{\infty} dx\, x^n\, e^{-(a + b\sqrt{-1})x} =$$

$$= \int_0^{\infty} dx\, x^n\, e^{-ax} \frac{e^{b(1+x)\sqrt{-1}} - e^{-b(1+x)\sqrt{-1}}}{(1+x)\sqrt{-1}} =$$

$$= 2\int_0^{\infty} dx\, x^n\, e^{-ax} \frac{\sin(b + bx)}{1 + x} = 2\, e^{+a} \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} (x-1)^n\, e^{-ax} \sin bx. \qquad [28d]$$

А когда поставим сюда

$$\frac{x}{b} + 1$$

19 | вместо x, то

$$\frac{1}{2} n^{\infty n} \int_{-b}^{+b} \frac{e^{-b\sqrt{-1}}\, db}{(a + b\sqrt{-1})^{n+1}} = b^{-n} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x + b} x^n\, e^{-\frac{a}{b}x} \sin(x + b).$$

Вторая часть этого уравнения уничтожается для $b = \infty$ и для $n > -1$ и следовательно

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-b\sqrt{-1}}\, db}{(a + b\sqrt{-1})^{n+1}} = 0\, [^9], \qquad (29)$$

если в a и в $n + 1$ действительная часть положительная.

Из двух интегралов (28), (29) следует

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx \cos x}{(a + x\sqrt{-1})^{n+1}} = \frac{\pi e^{-a}}{n^{\infty n}}, \tag{30}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx \sin x}{(a + x\sqrt{-1})^{n+1}} = \frac{\pi e^{-a}}{n^{\infty n}\sqrt{-1}}. \tag{31}$$

Интеграл (30) для $n = 0$ дает

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx \cdot \cos x}{a^2 + x^2} = \frac{\pi e^{-a}}{2a}\,^{*}. \tag{32}$$

Способ, который употребили мы, чтоб от интеграла (12) перейти к интегралу (28), может быть представлен в общем виде *. Пусть

$$f(x),\ \psi(x)$$

две функции от x, и пусть

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = \varphi(x).$$

Рассматриваем двойной интеграл

$$V = \int_{-b}^{+b} dz \int_{0}^{h} dx\, f(x)\, \varphi(\lambda z - xz),$$

где $h > \lambda$, b — все три числа действительные и положительные. Интегрируя в отношении к z между назначенных границ, получим

$$V = \int_{0}^{h} dx\, f(x) \frac{\psi(b\lambda - bx) - \psi(bx - b\lambda)}{\lambda - x}.$$

Разделяем этот интеграл на две части P, Q, так что

20 $$V = P + Q,$$

$$P = \int_{0}^{\lambda} dx\, f(x) \frac{\psi(b\lambda - bx) - \psi(bx - b\lambda)}{\lambda - x},$$

$$Q = \int_{\lambda}^{h} dx\, f(x) \frac{\psi(b\lambda - bx) - \psi(bx - b\lambda)}{\lambda - x}.$$

В интеграле P поставя $\lambda - x$ вместо x, получим

$$P = \int_{0}^{\lambda} dx\, f(\lambda - x) \frac{\psi(bx) - \psi(-bx)}{x}.$$

---

* Чтобы получить (32), нужно интеграл (30) сложить с интегралом, получаемым из него заменой x на $-x$.

* Обоснование следующих далее рассуждений см. в примечании [10].

В интеграле Q поставя $\lambda + x$ вместо x:

$$Q = \int_0^{h-\lambda} dx\, f(x+\lambda)\, \frac{\psi(bx) - \psi(-bx)}{x}.$$

Поставя $\frac{x}{b}$ вместо x:

$$P = \int_0^{\lambda b} dx\, f\left(\lambda - \frac{x}{b}\right) \frac{\psi(x) - \psi(-x)}{x},$$

$$Q = \int_0^{bh - b\lambda} dx\, f\left(\lambda + \frac{x}{b}\right) \frac{\psi(x) - \psi(-x)}{x}.$$

Для $b = \infty$

$$P = f(\lambda) \int_0^{\infty} dx\, \frac{\psi(x) - \psi(-x)}{x},$$

$$Q = P,$$

$$V = 2f(\lambda) \int_0^{\infty} dx\, \frac{\psi(x) - \psi(-x)}{x}.$$

Если $f(x)$ — функция постепенная *, то в интегралах P, Q значение $f(\lambda)$ одинаково. Если же постепенность нарушается для $x = \lambda$, то в интеграле P надобно поставить то значение $f(\lambda)$, к которому приближается $f(\lambda - x)$ с переходом x в нуль, а в интеграле Q надобно поставить то значение $f(\lambda)$, к которому приближается $f(\lambda + x)$ с переходом x в нуль.

Так составляются образцовые уравнения и условия к отысканию определенного интеграла

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{d\psi(x)}{dx}, \\ P &= f(\lambda - \delta) \int_0^{\infty} dx\, \frac{\psi(x) - \psi(-x)}{x}, \\ Q &= f(\lambda + \delta) \int_0^{\infty} dx\, \frac{\psi(x) - \psi(-x)}{x}, \\ P + Q &= \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \int_0^{h} dx\, f(x)\, \varphi(\lambda\zeta - x\zeta) \end{aligned}\right\} \quad (33)^{*}.$$

* То-есть непрерывная.

* В тексте Лобачевского номером (33) обозначены только формулы для Q и $P + Q$.

Здесь $f(x)$, $\psi(x)$ — произвольные функции от x; h, λ — постоянные числа действительные и положительные; при том

$$h > \lambda.$$

В интегралах P, Q множители $f(\lambda - \delta)$, $f(\lambda + \delta)$* представляют те значения, которые эти функции принимают с переходом δ в нуль. Если $f(x)$ функция непрерывная*, то $f(\lambda - \delta) = f(\lambda)$, $f(\lambda + \delta) = f(\lambda)$, $P = Q$.

Граница h, перейдя за величину λ, может произвольно быть увеличена. Так условие $h > \lambda$ будет выполнено, если $h = \infty$. В таком случае уравнения (33) сделаются

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{d\psi(x)}{dx}, \\ P &= f(\lambda - \delta)\int_0^\infty dx \frac{\psi(x) - \psi(-x)}{x}, \\ Q &= f(\lambda + \delta)\int_0^\infty dx \frac{\psi(x) - \psi(-x)}{x}, \\ P + Q &= \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \int_0^\infty dx\, f(x)\,\varphi(\lambda\zeta - x\zeta). \end{aligned}\right\} \qquad [33a]$$

Например для

$$f(x) = x^n e^{-ax},$$

$$\psi(x) = \frac{e^{x\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}},$$

находим

22 | $$\varphi(x) = e^{x\sqrt{-1}}, \quad P = 2f(\lambda)\int_0^\infty \frac{dx}{x}\sin x = \pi f(\lambda)^{\odot}, \quad Q = \pi f(\lambda),$$

$$2\pi f(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta \int_0^\infty dx\, f(x)\cos(\lambda\zeta - x\zeta), \qquad (34)$$

— известная формула Фурье.

---

* В современных обозначениях $f(\lambda - 0)$, $f(\lambda + 0)$.

* Это — первый случай, когда Лобачевский употребляет термин «непрерывность» в современном смысле.

⊙ Перед этим равенством, по всей видимости, имеется пропуск в тексте. Выписанные выше выражения для функций $f(x)$, $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ при подстановке в [33a] приводят к выведенным ранее формулам (28) и (29), а для того, чтобы получить интегральную формулу Фурье (34), нужно положить $\psi(x) = \sin x$, $\varphi(x) = \cos x$ оставляя функцию $f(x)$ произвольной.

Рассматриваем еще двойной интеграл

$$M = \int_{-b}^{+b} dz \int_{0}^{h} dx\, f(x)\, \varphi(\lambda z + xz),$$

где h, b, λ, как и прежде, положительные числа. Интегрирование в отношении к z дает [10]

$$M = \int_{0}^{h} dx\, f(x) \frac{\psi(\lambda b + bx) - \psi(-\lambda b - bx)}{\lambda + x},$$

а когда поставим $x - \lambda$ вместо x,

$$M = \int_{\lambda}^{h+\lambda} \frac{dx}{x} f(x-\lambda)\{\psi(bx) - \psi(-bx)\} =$$

$$= \int_{0}^{h+\lambda} \frac{dx}{x} f(x-\lambda)\{\psi(bx) - \psi(-bx)\} - \int_{0}^{\lambda} \frac{dx}{x} f(x-\lambda)\{\psi(bx) - \psi(-bx)\},$$

потом x вместо bx,

$$M = \int_{0}^{bh+b\lambda} \frac{dx}{x} f\left(\frac{x}{b} - \lambda\right)\{\psi(x) - \psi(-x)\} - \int_{0}^{b\lambda} \frac{dx}{x} f\left(\frac{x}{b} - \lambda\right)\{\psi(x) - \psi(-x)\}.$$

Если $\lambda > 0$ и $b = \infty$, то $M = 0$. Если же $\lambda = 0$ и $b = \infty$, то

$$M = f(0) \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x}\{\psi(x) - \psi(-x)\}. \qquad [34a]$$

Итак для $\lambda > 0$, $h > 0$

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{0}^{h} dx\, f(x)\, \varphi(\lambda z + xz). \qquad (35)$$

28 | Если же $\lambda = 0$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{0}^{h} dx\, f(x)\, \varphi(xz) = f(0) \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x}\{\psi(x) - \psi(-x)\}, \qquad (36)$$

где $f(x)$ непрерывная функция от x и где

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = \varphi(x).$$

Между тем для $\lambda > 0$ было тоже найдено уравнение (33), которое соединяя с уравнением (35), получим для $\lambda > 0$

$$2f(\lambda)\int_0^\infty \frac{dx}{x}\{\psi(x)-\psi(-x)\}=\int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_0^h dx\, f(x)\{\varphi(\lambda z+xz)+\varphi(\lambda z-xz)\}, \quad (37)$$

$$2f(\lambda)\int_0^\infty \frac{dx}{x}\{\psi(x)-\psi(-x)\}=\int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_0^h dx f(x)\{\varphi(\lambda z-xz)-\varphi(\lambda z+xz)\}. \quad (38)$$

Например, когда $\psi(x)=\sin x$, $\varphi(x)=\cos x$, то

$$\pi f(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta \int_0^h dx\, f(x)\cos\lambda\zeta\cos x\zeta, \quad (39)$$

$$\pi f(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta \int_0^h dx\, f(x)\sin\lambda\zeta\sin x\zeta \quad (40)$$

и которые уравнения заменяются еще такими:

$$\frac{1}{2}\pi f(\lambda)=\int_0^\infty d\zeta \int_0^h dx\, f(x)\cos\lambda\zeta\cos x\zeta, \quad (41)$$

$$\frac{1}{2}\pi f(\lambda)=\int_0^\infty d\zeta \int_0^h dx\, f(x)\sin\lambda\zeta\sin x\zeta. \quad (42)$$

Если полагаем

$$f(x)=e^{-ax}x^n$$

так, чтобы действительная часть в a была положительная и в $n > -1$, то уравнение (39) дает, после интегрирования в отношении к x,

$$\frac{\pi\lambda^n e^{-a\lambda}}{n^{\infty n}}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz\cos\lambda z}{(a+z\sqrt{-1})^{n+1}}, \quad (43)$$

а уравнение (40) подобным образом

$$\frac{\pi\lambda^n e^{-a\lambda}}{n^{\infty n}\sqrt{-1}}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\zeta\sin\lambda\zeta}{(a+z\sqrt{-1})^{n+1}}, \quad (44)$$

как было найдено выше (30), (31).

Если в уравнениях (33) полагаем

$$\psi(x)=\operatorname{tang} x,$$

то

$$\varphi(x)=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Далее, если $f(\lambda)$ произвольная, но постепенная функция от λ, то (5)

$$P = \pi f(\lambda), \qquad Q = \pi f(\lambda),$$

$$2\pi f(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_0^h \frac{dx\, f(x)}{\cos^2(\lambda z - xz)}. \tag{45}$$

Произведя здесь интегрирование от $-z$ до $+z$, получим

$$\pi f(\lambda) = \int_0^h dx\, f(x) \frac{\operatorname{tang}(\lambda z - xz)}{\lambda - x}, \tag{46}$$

где предполагается $\lambda > 0$, $h > \lambda$ и где после интегрирования в отношении к x надобно z почитать бесконечно великим числом [11].

Для произвольной функции $f(x)$ от x находим двойной интеграл *

$$L = \int_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{e^{z\sqrt{-1}}}{(a\lambda + z\sqrt{-1})^{n+1}} \int_0^{\infty} dx\, f(x)\, e^{-ax - \frac{zx}{\lambda}\sqrt{-1}} =$$

$$= \int_0^{\infty} dx\, e^{-ax} f(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz\, e^{\left(1 - \frac{x}{\lambda}\right) z\sqrt{-1}}}{(a\lambda + z\sqrt{-1})^{n+1}} =$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{dx\, e^{-ax} f(x)}{1 - \frac{x}{\lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz\, e^{z\sqrt{-1}}}{\left(a\lambda + \frac{z\sqrt{-1}}{1 - \frac{x}{\lambda}}\right)^{n+1}} =$$

$$= \int_0^{\infty} dx\, e^{-ax} f(x) \left(1 - \frac{x}{\lambda}\right)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz\, e^{z\sqrt{-1}}}{(a\lambda - ax + z\sqrt{-1})^{n+1}}.$$

А как та часть интеграла, где $x > \lambda$, делается нулем по примеру интеграла (29), то

$$L = \int_0^{\lambda} dx\, e^{-ax} f(x) \left(1 - \frac{x}{\lambda}\right)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz\, e^{z\sqrt{-1}}}{(a\lambda - ax + z\sqrt{-1})^{n+1}} =$$

$$= \frac{2\pi e^{-a\lambda}}{n^{\infty n}} \int_0^{\lambda} dx\, f(x) \left(1 - \frac{x}{\lambda}\right)^n = \frac{2\pi e^{-a\lambda}}{\lambda^n n^{\infty n}} \int_0^{\lambda} dx\, f(x) (\lambda - x)^n =$$

$$= \frac{2\pi e^{-a\lambda}}{\lambda^n n^{\infty n}} \int_0^{\lambda} dx\, x^n f(\lambda - x) \ [12].$$

* Дальше предполагается, что $a > 0$ (или $\operatorname{Re} a > 0$).

Так значение двойного интеграла делается

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{e^{z\sqrt{-1}}}{(a\lambda + z\sqrt{-1})^{n+1}} \int_0^{\infty} dx\, e^{-ax - \frac{xz}{\lambda}\sqrt{-1}} f(x) =$$

$$= \frac{2\pi e^{-a\lambda}}{\lambda^n n^{\infty n}} \int_0^{\lambda} dx\, x^n f(\lambda - x) \; [^{13}]. \qquad [46a]$$

Например для $f(x) = 1$ сделав интегрирование в отношении к x, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz\, e^{z\sqrt{-1}}}{(a\lambda + z\sqrt{-1})^{n+2}} = \frac{2\pi e^{-a\lambda}}{\lambda^{n+1} n^{\infty n}} \int_0^{\lambda} dx\, x^n = \frac{2\pi e^{-a\lambda}}{(n+1)^{\infty n+1}},$$

46 | как было найдено выше (28). Положив

$$f(x) = x^m,$$

находим

$$\int_0^{\lambda} dx\, x^n (\lambda - x)^m = \frac{\lambda^{m+n+1} m^{\infty m} n^{\infty n}}{(n+m+1)^{\infty n+m+1}}.$$

Поставя сюда

$$x = \lambda \sin^2 \omega,$$

получим

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\omega \sin^{2n+1}\omega \cos^{2m+1}\omega = \frac{n^{\infty n} m^{\infty m}}{2(n+m+1)^{\infty n+m+1}} \, {}^*,$$

как доказано было прежде (23).

Интеграл (2), когда поставим сюда a вместо $\cot \alpha$, можем написать в таком виде:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x} \sin x \cdot e^{-ax} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \left(\frac{a + \sqrt{-1}}{a - \sqrt{-1}}\right)^*,$$

* В тексте Лобачевского в этой формуле пропущена двойка в знаменателе.

* Так как

$$\operatorname{arctg} a = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \frac{a + \sqrt{-1}}{a - \sqrt{-1}}.$$

где a может быть всякое положительное число. Означая b какое нибудь другое положительное число, заключаем, что

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\sin x\cdot\left(e^{-ax}-e^{-bx}\right)=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\left(\frac{a+\sqrt{-1}}{a-\sqrt{-1}}\cdot\frac{b-\sqrt{-1}}{b+\sqrt{-1}}\right).$$

Ставя сюда $a+1$, $b+1$ вместо a, b; потом $a+2$, $b+2$ вместо a, b и так продолжая, если складываем все такие интегралы, получим для целого числа r

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\sin x\cdot\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{1-e^{-x}}\left(1-e^{-rx}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\frac{\left(a+r-1+\sqrt{-1}\right)^{\infty r}\left(b+r-1-\sqrt{-1}\right)^{\infty r}}{\left(a+r-1-\sqrt{-1}\right)^{\infty r}\left(b+r-1+\sqrt{-1}\right)^{\infty r}}.$$

Для $r=\infty$ это дает

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\sin x\cdot\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{e^{x}-1}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\frac{\left(a-\sqrt{-1}\right)^{\infty a-\sqrt{-1}}\left(b+\sqrt{-1}\right)^{\infty b+\sqrt{-1}}}{\left(a+\sqrt{-1}\right)^{\infty a+\sqrt{-1}}\left(b-\sqrt{-1}\right)^{\infty b-\sqrt{-1}}}\ [14]. \quad (47)$$

СТАТЬЯ II

1839 IV 97 | После того, как значение определенного интеграла

$$\int_0^\infty dx\, x^n e^{-ax} = \frac{n^{\infty n}}{a^{n+1}}$$

доказано для всех чисел n, a, действительных и воображаемых *, стоит только сюда поставить один раз $a + b\sqrt{-1}$, в другой раз $a - b\sqrt{-1}$ вместо a, потом взять разность двух интегралов, чтобы получить интеграл

$$\int_0^\infty dx\, x^n e^{-ax} \sin bx =$$

$$= \frac{-n^{\infty n}}{2\sqrt{-1}} \left\{(a + b\sqrt{-1})^{-n-1} - (a - b\sqrt{-1})^{-n-1}\right\}. \qquad (48)\,*$$

Полагая здесь $n = \delta - 1$ и δ число весьма малое, чтобы при разложении довольствоваться первой степенью, получим

$$\int_0^\infty dx\, x^\delta e^{-ax} \frac{\sin bx}{x} =$$

$$= \frac{-(\delta - 1)^{\infty \delta - 1}}{2\sqrt{-1}} \left\{(a + b\sqrt{-1})^{-\delta} - (a - b\sqrt{-1})^{-\delta}\right\}.$$

Основываясь на том свойстве гаммы, что для всяких чисел n, α, m

$$n^{\infty m} = n^{\infty \alpha} (n - \alpha)^{\infty m - \alpha},$$

можем писать

$$(\delta - 1)^{\infty \delta - 1} = \frac{\delta^{\infty \delta}}{\delta},$$

---

* $\mathrm{Re}\, a > 0$, $\mathrm{Re}\, n > -1$.

* В тексте Лобачевского номер формулы (48) отсутствует несомненно по ошибке: на этот номер в дальнейшем имеется ссылка.

28 | а для δ чрезвычайно малого числа

$$(\delta-1)^{\infty\delta-1}=\frac{1}{\delta}\,*.$$

Далее

$$(a+b\sqrt{-1})^{-\delta}=1-\delta\log(a+b\sqrt{-1}),$$
$$(a-b\sqrt{-1})^{-\delta}=1-\delta\log(a-b\sqrt{-1})\,*.$$

После чего и для $\delta=0$

$$\int_0^\infty dx\, e^{-ax}\frac{\sin bx}{x}=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\left\{\log\frac{a+b\sqrt{-1}}{a-b\sqrt{-1}}\right\}, \qquad [48a]$$

согласно с тем, как было найдено прежде.

Вместо a ставя сюда по порядку $a+1$, $a+2$, ..., потом складывая все интегралы, получим для целого числа i

$$\int_0^\infty dx\,\frac{\sin bx}{x}e^{-ax}\frac{1-e^{-ix}}{1-e^{-x}}=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\sum_{i=1}^{i}\log\left(\frac{a+i-1+b\sqrt{-1}}{a+i-1-b\sqrt{-1}}\right)$$

или с принятым означением

$$\int_0^\infty dx\,\frac{\sin bx}{x}e^{-ax}\frac{1-e^{-ix}}{1-e^{-x}}=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\frac{(a+i-1+b\sqrt{-1})^{\infty i}}{(a+i-1-b\sqrt{-1})^{\infty i}}\,\oslash.$$

Для весьма большого числа i, основываясь на том уравнении, которое служит определением гаммы, и для всех чисел p, q

$$\frac{(p+i)^{\infty i}}{(q+i)^{\infty i}}=i^{p-q}q^{\infty q-p};$$

подобным образом

$$\frac{(a+i-1+b\sqrt{-1})^{\infty i}}{(a+i-1-b\sqrt{-1})^{\infty i}}=i^{2b\sqrt{-1}}(a-1-b\sqrt{-1})^{\infty-2b\sqrt{-1}},$$

---

* То-есть

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{(\delta-1)^{\infty\delta-1}}{\frac{1}{\delta}}=1.$$

* То-есть

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{1-(a+b\sqrt{-1})^{-\delta}}{\delta\log(a+b\sqrt{-1})}=\lim_{\delta\to 0}\frac{1-(a-b\sqrt{-1})^{-\delta}}{\delta\log(a-b\sqrt{-1})}=1.$$

⊘ В тексте Лобачевского в этой формуле в знаменателе под знаком интеграла ошибочно поставлен лишний множитель x.

а когда поставим α вместо a:

$$\frac{(\alpha+i-1+b\sqrt{-1})^{\infty i}}{(\alpha+i-1-b\sqrt{-1})^{\infty i}} = i^{2b\sqrt{-1}}(\alpha-1-b\sqrt{-1})^{\infty-2b\sqrt{-1}}.$$

После чего для $i=\infty$ получим

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\,\frac{\sin bx\,(e^{-ax}-e^{-\alpha x})}{1-e^{-x}} = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\frac{(a-1-b\sqrt{-1})^{\infty-2b\sqrt{-1}}}{(\alpha-1-b\sqrt{-1})^{\infty-2b\sqrt{-1}}}.$$

29 | Если сюда ставим

$$a=1-\sqrt{-1},$$
$$\alpha=1+\sqrt{-1},$$

то находим

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\cdot\frac{\sin bx\sin x}{e^x-1} = -\frac{1}{4}\log\frac{[-(1+b)\sqrt{-1}]^{\infty-2b\sqrt{-1}}}{[(1-b)\sqrt{-1}]^{\infty-2b\sqrt{-1}}}. \quad [48b]$$

Далее, основываясь на общем уравнении для гаммы

$$n^{\infty n} = n^{\infty\alpha}\cdot(n-\alpha)^{\infty n-\alpha},$$

можем написать

$$\{-(1+b)\sqrt{-1}\}^{\infty-2b\sqrt{-1}} = \frac{\{-(1+b)\sqrt{-1}\}^{\infty-(1+b)\sqrt{-1}}}{\{-(1-b)\sqrt{-1}\}^{\infty-(1-b)\sqrt{-1}}},$$

$$\{(1-b)\sqrt{-1}\}^{\infty-2b\sqrt{-1}} = \frac{\{(1-b)\sqrt{-1}\}^{\infty(1-b)\sqrt{-1}}}{\{(1+b)\sqrt{-1}\}^{\infty(1+b)\sqrt{-1}}},$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\cdot\frac{\sin x\sin bx}{e^x-1} =$$

$$= -\frac{1}{4}\log\frac{\{-(1+b)\sqrt{-1}\}^{\infty-(1+b)\sqrt{-1}}\{(1+b)\sqrt{-1}\}^{\infty(1+b)\sqrt{-1}}}{\{-(1-b)\sqrt{-1}\}^{\infty-(1-b)\sqrt{-1}}\{(1-b)\sqrt{-1}\}^{\infty(1-b)\sqrt{-1}}}.$$

Между тем, для всякого числа n, действительного и воображаемого {ур. 8}

$$n^{\infty n}(-n)^{\infty-n} = \frac{n\pi}{\sin n\pi}.$$

После чего

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\cdot\frac{\sin x\sin bx}{e^x-1} = -\frac{1}{4}\log\left\{\frac{b+1}{b-1}\cdot\frac{e^{b\pi-\pi}-e^{\pi-b\pi}}{e^{b\pi+\pi}-e^{-\pi-b\pi}}\right\}.$$

Если предполагаем $b-1$ столь малым числом, что можем довольствоваться первой степенью от $b-1$ в разложении, потом b почитаем за единицу, то приходим к такому интегралу:

$$\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x}\cdot\frac{\sin^2 x}{e^x-1}=\frac{1}{4}\log\left(\frac{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}{4\pi}\right)^{*}.$$

Если в уравнении (48) снова ставим $a+b\sqrt{-1}$ вместо a, потом $a-b\sqrt{-1}$ в том же уравнении вместо a, наконец берем разность двух интегралов, то получим

$$\int\limits_0^\infty dx\, x^n e^{-ax}\sin^2 bx=$$

$$=-\frac{1}{4}n^{-n}\{(a+2b\sqrt{-1})^{-n-1}-2a^{-n-1}+(a-2b\sqrt{-1})^{-n-1}\}, \quad (49)$$

а когда поставим сюда $n=\delta-2$,

$$\int\limits_0^\infty dx\, x^\delta e^{-ax}\left(\frac{\sin bx}{x}\right)^2=$$

$$=-\frac{1}{4}(\delta-2)^{-\delta-2}\{(a+2b\sqrt{-1})^{1-\delta}-2a^{1-\delta}+(a-2b\sqrt{-1})^{1-\delta}\}.$$

Для δ чрезвычайно малого числа

$$\int\limits_0^\infty dx\, x^\delta e^{-ax}\left(\frac{\sin bx}{x}\right)^2=$$

$$=\frac{\delta^{-\delta}}{4\delta(1-\delta)}\{(a+2b\sqrt{-1})[1-\delta\log(a+2b\sqrt{-1})]-2a(1-\delta\log a)+$$

$$+(a-2b\sqrt{-1})[1-\delta\log(a-2b\sqrt{-1})]\}^{*}.$$

Принимая $\delta=0$, находим

$$\int\limits_0^\infty dx\, e^{-ax}\left(\frac{\sin bx}{x}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{4}\left\{-a\log\left(1+\frac{4b^2}{a^2}\right)-2b\sqrt{-1}\log\frac{a+2b\sqrt{-1}}{a-2b\sqrt{-1}}\right\}.$$

---

* В тексте Лобачевского под знаком логарифма вместо 4π ошибочно стоит 2.

* См. сноску * к стр. 304.

Если к тому $a = 0$, то должно принимать

$$a \log\left(1 + \frac{4b^2}{a^2}\right) = 0,$$

$$\log \frac{a + 2b\sqrt{-1}}{a - 2b\sqrt{-1}} = \pi\sqrt{-1}.$$

Так приходим к интегралу

$$\int_0^\infty dx \left(\frac{\sin bx}{x}\right)^2 = \frac{1}{2}\pi b;$$

для $b = 1$:

$$\int_0^\infty dx \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = \frac{1}{2}\pi,$$

который интеграл можно также найти, начиная с неопределенного

$$\int \frac{dx}{x^2} \sin^2 x = -\frac{1}{x}\sin^2 x + \int \frac{dx}{x} \sin 2x;$$

с уменьшением x

$$\frac{1}{x}\sin^2 x$$

переходит в нуль, а следовательно

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2} \sin^2 x = \int_0^\infty \frac{dx}{x} \sin 2x = \int_0^\infty \frac{dx}{x} \sin x = \frac{1}{2}\pi.$$

31 | В уравнении (49) ставя $a + b\sqrt{-1}$, $a - b\sqrt{-1}$ вместо a, потом вычитая один интеграл из другого, получим

$$\int_0^\infty dx\, x^n e^{-ax} \sin^3 bx =$$

$$= \frac{n^{-n}}{8\sqrt{-1}}\{(a + 3b\sqrt{-1})^{-n-1} - 3(a + b\sqrt{-1})^{-n-1} +$$
$$+ 3(a - b\sqrt{-1})^{-n-1} - (a - 3b\sqrt{-1})^{-n-1}\}.$$

Полагая здесь $\delta - 3 = n$ и δ столько малым, чтобы довольство-

ваться первой степенью от δ в разложении

$$\int_0^\infty dx\, x^\delta e^{-ax}\left(\frac{\sin bx}{x}\right)^3 =$$

$$= \frac{(\delta-3)^{\infty\delta-3}}{8\sqrt{-1}}\{(a+3b\sqrt{-1})^2[1-\delta\log(a+3b\sqrt{-1})]-$$

$$-3(a+b\sqrt{-1})^2[1-\delta\log(a+b\sqrt{-1})]+$$

$$+3(a-b\sqrt{-1})^2[1-\delta\log(a-b\sqrt{-1})]-$$

$$-(a-3b\sqrt{-1})^2[1-\delta\log(a-3b\sqrt{-1})]\}.$$

Здесь

$$(\delta-3)^{\infty\delta-3} = \frac{\delta^{\infty\delta}}{\delta(\delta-1)(\delta-2)},$$

что вставляя и удерживая только первую степень δ, находим

$$\int_0^\infty dx\, x^\delta e^{-ax}\left(\frac{\sin bx}{x}\right)^3 =$$

$$= \frac{\delta^{\infty\delta}}{8(\delta-1)(\delta-2)\sqrt{-1}}\{-(a+3b\sqrt{-1})^2\log(a+3b\sqrt{-1})+$$

$$+3(a+b\sqrt{-1})^2\log(a+b\sqrt{-1})-3(a-b\sqrt{-1})^2\log(a-b\sqrt{-1})+$$

$$+(a-3b\sqrt{-1})^2\log(a-3b\sqrt{-1})\},$$

а когда делаем $\delta=0$, то

$$\int_0^\infty dx\, e^{-ax}\left(\frac{\sin bx}{x}\right)^3 =$$

$$= \frac{1}{16\sqrt{-1}}\{-(a+3b\sqrt{-1})^2\log(a+3b\sqrt{-1})+$$

$$+3(a+b\sqrt{-1})^2\log(a+b\sqrt{-1})-3(a-b\sqrt{-1})^2\log(a-b\sqrt{-1})+$$

$$+(a-3b\sqrt{-1})^2\log(a-3b\sqrt{-1})\} =$$

$$= \frac{-a^2}{16\sqrt{-1}}\log\frac{a+3b\sqrt{-1}}{a-3b\sqrt{-1}} - \frac{3}{8}ab\log(a^2+9b^2)+$$

$$+\frac{9b^2}{16\sqrt{-1}}\log\frac{a+3b\sqrt{-1}}{a-3b\sqrt{-1}} + \frac{3a^2}{16\sqrt{-1}}\log\frac{a+b\sqrt{-1}}{a-b\sqrt{-1}} =$$

$$+\frac{3}{8}ab\log(a^2+b^2)+\frac{3b^2}{16\sqrt{-1}}\log\frac{a-b\sqrt{-1}}{a+b\sqrt{-1}}.$$

32 | Итак если полагаем

$$\frac{3b}{a}=\operatorname{tang}\beta;\quad \frac{b}{a}=\operatorname{tang}\gamma,$$

то

$$\int_0^\infty dx\, e^{-ax}\left(\frac{\sin bx}{x}\right)^3=$$

$$=\frac{1}{8}\beta\,(9b^2-a^2)+\frac{3}{8}\gamma\,(a^2-b^2)-\frac{3}{8}\,ab\log(a^2+9b^2)+\frac{3}{8}\,ab\log(a^2+b^2).$$

Для $a=0$ делается

$$\beta=\frac{1}{2}\pi,\quad \gamma=\frac{1}{2}\pi$$

и следовательно

$$\int_0^\infty dx\left(\frac{\sin bx}{x}\right)^3=\frac{3}{8}\pi b^2.$$

Так продолжая, находим для всякого целого положительного числа m и для δ чрезвычайно малого

$$\int_0^\infty dx\, x^\delta e^{-ax}\left(\frac{\sin bx}{x}\right)^m=$$

$$=\frac{\delta^{\infty\delta}}{\delta\,(\delta-1)^{\infty m-1}\cdot\left(-2\sqrt{-1}\right)^m}\times$$

$$\times\sum_{i=0}^{m}\frac{(-1)^i m^{\infty i}}{i^{\infty i}}\left[a+(m-2i)\,b\sqrt{-1}\right]^{m-1}\left\{(1-\delta\log\left[a+(m-2i)\,b\sqrt{-1}\right]\right\}\text{*}.$$

Рассматриваем теперь сумму

$$L_m(a)=\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\frac{m^{\infty i}}{i^{\infty i}}\left[a+(m-2i)\,b\right]^{m-1}\text{*},$$

---

* Дальше Лобачевский пользуется методом полной индукции. Поэтому саму эту формулу следовало бы тоже проверить методом индукции.

* Здесь b заменяет $b\sqrt{-1}$ в прежних обозначениях.

находим

$$L_{m+1}(a)=(a+b+mb)L_m(a+b)+$$
$$+(a+b+mb)\sum_{i=1}^{m+1}(-1)^i\frac{m^{\infty i-1}}{(i-1)^{\infty i-1}}[a+b+(m-2i)b]^{m-1}-$$
$$-2b\sum_{i=0}^{m+1}(-1)^i\frac{(m+1)^{\infty i}}{i^{\infty i}}[a+b+(m-2i)b]^{m-1}=$$
$$=(a+b+mb)L_m(a+b)-(a+b+mb)L_m(a-b)-$$
$$-2bL_m(a+b)-2b\sum_{i=1}^{m+1}(-1)^i\frac{m^{\infty i-1}}{(i-1)^{\infty i-1}}[a+b+(m-2i)b]^{m-1}=$$
$$=(a-b+mb)L_m(a+b)-(a+b+mb)L_m(a-b)+$$
$$+2b\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\frac{m^{\infty i}}{i^{\infty i}}[a-b+(m-2i)b]^{m-1}=$$
$$=(a-b+mb)\{L_m(a+b)-L_m(a-b)\}\ [^{15}]. \qquad [49a]$$

93 | Итак, если $L_m(a)=0$ для всякого a, как это можно поверить для $m=1$, $m=2$, то

$$L_{m+1}(a)=0$$

и, следовательно, для всякого целого положительного числа m

$$L_m(a)=0.$$

После чего

$$\int_0^\infty dx\, e^{-ax}\left(\frac{\sin bx}{x}\right)^m=$$
$$=\frac{1}{(m-1)^{\infty m-1}(2\sqrt{-1})^m}\times$$
$$\times\sum_{i=0}^{m}\frac{(-1)^i m^{\infty i}}{i^{\infty i}}\{a+(m-2i)b\sqrt{-1}\}^{m-1}\log\{a+(m-2i)b\sqrt{-1}\}.$$

Если делаем

$$(m-2i)\frac{b}{a}=\operatorname{tang}\omega_i,$$

то

$$\int_0^\infty dx\, e^{-ax}\left(\frac{\sin bx}{x}\right)^m=$$
$$=\frac{a^{m-1}}{(m-1)^{\infty m-1}(2\sqrt{-1})^m}\times$$
$$\times\sum_{i=0}^{m}\frac{(-1)^i m^{\infty i}}{i^{\infty i}\cos\omega_i^{\,m-1}}e^{(m-1)\omega_i\sqrt{-1}}\log\{a+\sqrt{-1}\,a\operatorname{tang}\omega_i\},$$

а когда поставим значение $\cos\omega_i$,

$$\int\limits_0^\infty dx\, e^{-ax}\left(\frac{\sin bx}{x}\right)^m =$$

$$= \frac{b^{m-1}}{(m-1)^{\infty m-1}(2\sqrt{-1})^m}\times$$

$$\times\sum_{i=0}^{m}\frac{(-1)^i m^{\infty i}}{i^{\infty i}}\left(\frac{m-2i}{\sin\omega_i}\right)^{m-1} e^{(m-1)\omega_i\sqrt{-1}}\left\{\log\frac{(m-2i)\,b}{\sin\omega_i}+\omega_i\sqrt{-1}\right\}.$$

Если $a=0$, то для всех i

$$\omega_i=\frac{1}{2}\pi.$$

После чего

$$\int\limits_0^\infty dx\left(\frac{\sin bx}{x}\right)^m =$$

$$= \frac{b^{m-1}e^{(m-1)\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}}{(m-1)^{\infty m-1}(2\sqrt{-1})^m}\times$$

$$\times\left\{\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\frac{m^{\infty i}}{i^{\infty i}}(m-2i)^{m-1}\left\{\log\left[(m-2i)\,b\right]+\frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}\right\}\right\}.$$

Здесь множитель при $\frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}$, как было доказано выше,

$$\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\frac{m^{\infty i}}{i^{\infty i}}(m-2i)^{m-1}=0,$$

34 | следовательно, значение интеграла представляется короче

$$\int\limits_0^\infty dx\left(\frac{\sin bx}{x}\right)^m =$$

$$= \frac{b^{m-1}e^{(m-1)\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}}{(m-1)^{\infty m-1}(2\sqrt{-1})^m}\times$$

$$\times\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\frac{m^{\infty i}}{i^{\infty i}}(m-2i)^{m-1}\log\left[(m-2i)\,b\right].$$

Здесь число b разумеется положительным; а когда число под знаком логарифма сделается отрицательным, то множитель -1 надобно заменять множителем

$$e^{\pi\sqrt{-1}}.$$

Так находим для m чотного

$$\int_0^\infty dx\left(\frac{\sin bx}{x}\right)^m = \frac{b^{m-1}e^{(m-1)\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}\pi\sqrt{-1}}{(m-1)^{\infty\, m-1}2^m(-1)^{\frac{m}{2}}}\sum_{i=0}^{\frac{1}{2}m}(-1)^i(m-2i)^{m-1}\frac{m^{\infty i}}{i^{\infty i}}.$$

Для m нечотного

$$\int_0^\infty dx\left(\frac{\sin bx}{x}\right)^m = \frac{b^{m-1}e^{(m-1)\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}\pi}{(m-1)^{\infty\, m-1}2^m(-1)^{\frac{m-1}{2}}}\sum_{i=0}^{\frac{1}{2}(m-1)}(-1)^i(m-2i)^{m-1}\frac{m^{\infty i}}{i^{\infty i}}.$$

Например,

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\sin bx = \frac{1}{2}\pi,$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2}\sin^2 bx = \frac{1}{2}\pi b,$$

$$\int_0^\infty dx\left(\frac{\sin bx}{x}\right)^3 = \frac{3}{8}\pi b^2,$$

$$\int_0^\infty dx\left(\frac{\sin bx}{x}\right)^4 = \frac{1}{3}\pi b^3,$$

$$\int_0^\infty dx\left(\frac{\sin bx}{x}\right)^5 = \frac{115}{384}\pi b^4,$$

$$\int_0^\infty dx\left(\frac{\sin bx}{x}\right)^6 = \frac{11}{40}\pi b^5\ *.$$

---

* В оригинале последние два интеграла даны с опечатками:

$$\int_0^\infty dx\left(\frac{\sin bx}{x}\right)^5 = \frac{235}{768}\pi b^4 \quad \text{и} \quad \int_0^\infty dx\left(\frac{\sin bx}{x}\right)^6 = \frac{33}{80}\pi b^5$$

ПРИМЕЧАНИЯ

[1] Если интеграл

$$\int_0^{\pi} f(x)\frac{\sin x}{x}\,dx$$

несобственный, то для справедливости дальнейшего нужно предположить, что он сходится, что влечет за собой также сходимость интегралов

$$\int_0^{\pi} \frac{f(x)\sin x\,dx}{x+k\pi} \quad (k=1,\ 2,\ \ldots).$$

[2] Следующие далее выкладки справедливы, если интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\frac{\sin x}{x}\,dx,$$

а следовательно и интегралы

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)\sin x\,dx}{x+2k\pi} \quad (k=1,\ 2,\ \ldots)$$

сходятся.

[3] Этот интеграл расходится. Однако произведенное Лобачевским вычисление вполне обосновано, как в этом нетрудно убедиться, проследив выкладки, приводящие к (4), если под значением интеграла в левой части (5) понимать

$$\sum_{n=0}^{\infty} I_n,$$

где I_n — главное значение интеграла

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\operatorname{tg} x}{x}\,dx.$$

[4] Из одного того, что $\lim\limits_{r\to\infty}[\log\psi(r)-\log\psi(r-1)]=0$, не следует, конечно, что $\lim\limits_{r\to\infty}\psi(r)$ существует. Однако существование этого предела немедленно следует из [10a]. В самом деле, если $n+r>1$, то

$$\left|\log\frac{\psi(r+1)}{\psi(r)}\right|<\frac{1}{12(n+r)^2},$$

а так как ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(n+r+k)^2}$$

сходится, то $\lim\limits_{r\to\infty}\psi(r)$ существует и

$$\lim_{r\to\infty}\log\psi(r)-\log\psi(r)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\log\frac{\psi(r+k+1)}{\psi(r+k)}=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^i i}{(i+1)(i+2)(n+r+k)^{i+1}}. \qquad (a)$$

Перестановка порядка суммирования в правой части (a) приводит к равенству [10b]. Двойной ряд в правой части [10b] сходится при любых комплексных значениях $r+n$, кроме целых отрицательных и $r+n=0$, а так как функция $f(n)$ определена для любых значений n [если n — целое отрицательное число, то $\psi(r)\equiv 0$, при достаточно большом r и, следовательно, $f(n)=0$], то равенства (10) и [10b] могут служить определением функции $(n+r)^{-r}$ для любых комплексных значений n и r, кроме $n+r=0$ и тех, при которых $r+n$ целое отрицательное число. Значения $n+r=0$ и некоторые из значений r и n, для которых $n+r$ целое отрицательное число, соответствуют устранимым особым точкам функции $(n+r)^{-r}$. См. об этом подробнее в примечании [24] к сочинению «Способ уверяться ...» на стр. 235—237 наст. тома.

[5] Хотя рассуждения Лобачевского при выводе этого равенства весьма нестрогие, однако с помощью соответствующих оценок их можно обосновать без большого труда.

[6] Если $V(a,\,n)=\int\limits_0^{\infty}e^{-ax}x^n\,dx$, то интегрирование по частям ($\operatorname{Re}a>0$, $\operatorname{Re}n>0$) дает

$$V(a,\,n)=\frac{a}{n+1}\int\limits_0^{\infty}e^{-ax}x^{n+1}\,dx=\frac{a}{n+1}V(a,\,n+1).$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial V(a, n)}{\partial a} = -\int_0^\infty e^{-ax} x^{n+1}\, dx = -V(a, n+1);$$

следовательно,

$$\frac{\partial V(a, n)}{\partial a} + \frac{n+1}{a} V(a, n) = 0,$$

откуда

$$V(a, n) = \frac{C(n)}{a^{n+1}}.$$

Но $C(n)$ не зависит от a, а так как $C(n) = n^{\infty n}$ при действительном a, то равенство (12) справедливо при комплексном a.

Лобачевский, повидимому, считал необоснованной, в случае, если a — комплексное число, подстановку $x = at$ в интеграле (11), приводящую к (12), так как путем интегрирования в (12) при этом становится не положительная вещественная полуось, а некоторый луч в правой полуплоскости.

[7] Несмотря на внешнюю нестрогость, рассуждения Лобачевского при выводе равенств (19) правильные. Действительно,

$$1 - \cos n\alpha \cos^n \alpha = 1 - \left(1 - \frac{n^2\alpha^3}{2} + \ldots\right)\cos^n \alpha =$$

$$= 1 - \cos^n \alpha + \frac{n^2\alpha^2}{2}\cos^n \alpha \left(1 - \frac{n^2\alpha^2}{3 \cdot 4} + \ldots\right) =$$

$$= -n \log \cos \alpha - \frac{(1 - \cos^n \alpha)^2}{2} - \ldots + \frac{n^2\alpha^2}{2}\cos^n \alpha \left(1 - \frac{n^2\alpha^2}{3 \cdot 4} + \ldots\right),$$

так как

$$\log \cos^n \alpha = -(1 - \cos^n \alpha) - \frac{(1 - \cos^n \alpha)^2}{2} - \ldots$$

Ввиду того, что

$$\lim_{n \to 0} \frac{(1 - \cos^n \alpha)^2}{n} = 0,$$

отсюда следует, что

$$\lim_{n \to 0} \frac{1 - \cos n\alpha \cos^n \alpha}{n} = -\log \cos \alpha.$$

Это последнее равенство проще, впрочем, получить, пользуясь обычным правилом раскрытия неопределенностей.

Что касается предельного перехода под знаком интеграла, приводящего от [18а] к (19), то очевидно, что, благодаря наличию в [18а] под знаком интеграла множителя $1 - \cos ax$, этот интеграл сходится равномерно не только в окрестности точки $n = 0$, но даже при $n > -2 + \varepsilon$, где ε — любое положительное число.

[8] Предельный переход от [28b] к [28c] Лобачевским не обоснован. Приводим здесь обоснование равенства [28c].

Ниже (см. примечание [10]) доказывается следующее предложение.

Если функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию в интервале $(0, h)$, где $h > 0$, и интеграл

$$\int_0^\infty \frac{F(x)}{x}\,dx$$

сходится, то

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^h f(x)\frac{F(Tx)}{x}\,dx = f(+0)\int_0^\infty \frac{F(x)}{x}\,dx.$$

Функция $f(x) = (1+x)^n e^{-ax}$ имеет ограниченную вариацию в интервале $(0, \infty)$ и, положив $F(x) = \sin x$, имеем для второго интеграла в правой части [28a]

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^\infty (1+x)^n e^{-ax}\,\frac{e^{bx\sqrt{-1}} - e^{-bx\sqrt{-1}}}{x\sqrt{-1}}\,dx =$$

$$= 2\lim_{b\to\infty}\int_0^\infty (1+x)^n e^{-ax}\,\frac{\sin bx}{x}\,dx = 2\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Что касается первого интеграла в правой части [28a], то

$$\int_0^1 (1-x)^n e^{ax}\,\frac{e^{bx\sqrt{-1}} - e^{-bx\sqrt{-1}}}{x\sqrt{-1}}\,dx = 2\int_0^1 (1-x)^n e^{ax}\,\frac{\sin bx}{x}\,dx =$$

$$= 2\int_0^{1-\varepsilon} (1-x)^n e^{ax}\,\frac{\sin bx}{x}\,dx + 2\int_{1-\varepsilon}^1 (1-x)^n e^{ax}\,\frac{\sin bx}{x}\,dx, \qquad \text{(a)}$$

где ε — произвольное положительное число.

Так как $n > -1$, то модуль последнего интеграла в правой части (a) может быть сделан сколь угодно малым для всех значений b при соответствующем выборе числа ε, а

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^{1-\varepsilon} (1-x)^n e^{ax}\,\frac{\sin bx}{x}\,dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$$

и равенство [28c], таким образом, обосновано.

[9] Обоснование предельного перехода можно построить аналогично тому, как это показано в предыдущем примечании. Предварительно нужно только следующим образом преобразовать интеграл в послед-

ной части [28d]:

$$\int_1^{\infty}(x-1)^n e^{-ax}\frac{\sin bx}{x}\,dx=$$

$$=\int_0^{\infty}(x-1)^n e^{-ax}\frac{\sin bx}{x}\,dx-\int_0^{1}(x-1)^n e^{-ax}\frac{\sin bx}{x}\,dx=$$

$$=\int_0^{\infty}\varphi(x)\frac{\sin bx}{x}\,dx+\int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon}(x-1)^n e^{-ax}\frac{\sin bx}{x}\,dx-$$

$$-\int_0^{1}(x-1)^n e^{-ax}\frac{\sin bx}{x}\,dx,$$

где ε — произвольное положительное число, а $\varphi(x)$ — функция, равная нулю в интервале $(1-\varepsilon,\ 1+\varepsilon)$ и совпадающая с $(x-1)^n e^{-ax}$ вне этого интервала.

[10] Приводим обоснование следующих далее выкладок, кончая равенством (36). Начнем с доказательства основной леммы:

Лемма. *Если $h>0$, функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию в интервале $(0,\ h)$ и интеграл*

$$\int_0^{\infty}\frac{F(x)}{x}\,dx \tag{a}$$

сходится, то

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^{h}f(t)\frac{F(Tt)}{t}\,dt=f(+0)\int_0^{\infty}\frac{F(x)}{x}\,dx. \tag{b}$$

Заметим, что из справедливости (b) для функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ следует его справедливость для функции $k_1f_1(x)+k_2f_2(x)$, где k_1 и k_2 — постоянные; так как, кроме того, очевидно, что равенство (b) имеет место, если $f(x)\equiv 1$, то будем считать, что в интервале $(0,\ h)$ функция $f(x)$ действительная, неубывающая и $f(+0)=0$.

Взяв произвольное положительное ε, выберем α так, чтобы $0<\alpha<h$ и $f(x)<\varepsilon$ при $0<x\leqslant\alpha$.

Применяя вторую теорему о среднем, получим

$$\int_0^{\alpha}f(t)\frac{F(Tt)}{t}\,dt=f(\alpha-0)\int_{\beta}^{\alpha}\frac{F(Tt)}{t}\,dt,\ \text{где}\ 0\leqslant\beta\leqslant\alpha.$$

Следовательно,

$$\left|\int_0^{\alpha}f(t)\frac{F(Tt)}{t}\,dt\right|<C\varepsilon,$$

где C — некоторая постоянная, так как

$$\left|\int_{\beta}^{\alpha} \frac{F(Tt)}{t}\,dt\right| = \left|\int_{\beta T}^{\alpha T} \frac{F(x)}{x}\,dx\right| < C$$

в силу предположенной сходимости интеграла (a).

С помощью второй теоремы о среднем имеем также

$$\int_{\alpha}^{h} f(t)\frac{F(Tt)}{t}\,dt = f(\alpha+0)\int_{\alpha}^{\gamma}\frac{F(Tt)}{t}\,dt + f(h-0)\int_{\gamma}^{h}\frac{F(Tt)}{t}\,dt =$$

$$= f(\alpha+0)\int_{\alpha T}^{\gamma T}\frac{F(x)}{x}\,dx + f(h-0)\int_{\gamma T}^{hT}\frac{F(x)}{x}\,dx, \qquad \text{(c)}$$

где $\alpha \leqslant \gamma \leqslant h$. Ввиду сходимости интеграла (a), модуль интеграла в левой части (c) можно сделать сколь угодно малым, если T достаточно велико, а так как число ε произвольно, то равенство (b) доказано.

При тех же условиях относительно функции $f(x)$, если сходится интеграл

$$\int_{0}^{-\infty}\frac{F(x)}{x}\,dx, \qquad \text{(a')}$$

аналогичным образом можно доказать, что

$$\lim_{T\to-\infty}\int_{0}^{h} f(t)\frac{F(Tt)}{t}\,dt = f(+0)\int_{0}^{-\infty}\frac{F(x)}{x}\,dx. \qquad \text{(b')}$$

Если функция $F(x)$ равномерно ограничена в интервале $(0, \infty)$ или, соответственно $(0, -\infty)$, то равенства (b) и (b′) остаются справедливыми и в случае, когда в окрестности конечного числа точек интервала $(0, h)$ функция $f(x)$ имеет неограниченную вариацию (в частности, становится неограниченной), лишь бы она была абсолютно интегрируемой в окрестности этих точек.

Действительно, если ω — такая точка, а δ — произвольное положительное число $(0 < \omega-\delta,\ \omega+\delta < h)$, то

$$\int_{0}^{h} f(t)\frac{F(Tt)}{t}\,dt = \int_{0}^{h}\overline{f(t)}\frac{F(Tt)}{t}\,dt + \int_{\omega-\delta}^{\omega+\delta} f(t)\frac{F(Tt)}{t}\,dt, \qquad \text{(d)}$$

где $\overline{f(t)} = 0$ в интервале $(\omega-\delta,\ \omega+\delta)$ и $\overline{f(t)} = f(t)$ вне этого интервала. В силу (a)

$$\lim_{T\to\infty}\int_{0}^{h}\overline{f(t)}\frac{F(Tt)}{t}\,dt = f(+0)\int_{0}^{\infty}\frac{F(x)}{x}\,dx,$$

а так как модуль второго слагаемого в правой части (d) при достаточно малом δ и любом T произвольно мал, то равенство (b) остается в силе. Так же обстоит дело и с равенством (b′).

Пусть теперь функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию в любом конечном интервале и абсолютно интегрируема в интервале $(-\infty, \infty)$, функция $F(x)$ равномерно ограничена в интервале $(-\infty, \infty)$ и интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(x)}{x}\, dx$$

сходится.

Докажем, что

$$\lim_{T\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, \frac{F[T(t-u)]}{t-u}\, du = f(t-0)\int_{0}^{\infty} \frac{F(x)}{x}\, dx + f(t+0) \int_{-\infty}^{0} \frac{F(x)}{x}\, dx. \tag{e}$$

В самом деле, при этих условиях можно выбрать так R и $\overline{R}$, не зависящие от T, чтобы $R > t$, $\overline{R} > -t$ и чтобы

$$\left|\int_{R}^{\infty} f(u)\, \frac{F[T(t-u)]}{t-u}\, du\right| < \frac{C}{R-t} \int_{R}^{\infty} |f(u)|\, du < \varepsilon,$$

$$\left|\int_{-\infty}^{-\overline{R}} f(u)\, \frac{F[T(t-u)]}{t-u}\, du\right| < \frac{C}{\overline{R}+t} \int_{-\infty}^{-\overline{R}} |f(u)|\, du < \varepsilon,$$

как мало бы ни было $\varepsilon > 0$, и следовательно, интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, \frac{F[T(t-u)]}{t-u}\, du \tag{f}$$

сходится при любом t равномерно относительно T.

Но

$$\int_{-\overline{R}}^{R} f(u)\, \frac{F[T(t-u)]}{t-u}\, du =$$

$$= \int_{-\overline{R}}^{t} f(u) \frac{F[T(t-u)]}{t-u}\, du + \int_{t}^{R} f(u)\, \frac{F[T(t-u)]}{t-u}\, du =$$

$$= \int_{0}^{\overline{R}+t} f(t-y)\, \frac{F(Ty)}{y}\, dy - \int_{0}^{R-t} f(t+y)\, \frac{F(-Ty)}{y}\, dy,$$

и в соответствии с (b) и (b′), если $-\overline{R} < t < R$, то

$$\lim_{T\to\infty}\int_{-\overline{R}}^{R} f(u)\,\frac{F[T(t-u)]}{t-u}\,du =$$

$$= f(t-0)\int_0^\infty \frac{F(x)}{x}\,dx + f(t+0)\int_{-\infty}^0 \frac{F(x)}{x}\,dx.$$

Отсюда и из равномерной сходимости интеграла (*f*) немедленно следует (e).

Нетрудно видеть, что равенство (e) остается справедливым при наличии конечного числа точек, в окрестности которых функция $f(x)$ имеет неограниченную вариацию (в частности, становится неограниченной), если только она имеет ограниченную вариацию в окрестности точки t.

Из равенства (e), в частности, следует, что

$$\lim_{T\to\infty}\int_\alpha^\beta f(u)\,\frac{F[T(t-u)]}{t-u}\,du = 0, \tag{g}$$

если $t<\alpha$ или $t>\beta$, так как в этом случае функцию $f(x)$ можно положить равной нулю в интервалах $(-\infty,\ \alpha)$ или $(\beta,\ \infty)$.

Предположим теперь, что функция $\varphi(x)$ интегрируема в любом конечном интервале, обозначим

$$F(x) = \int_0^x \varphi(x)\,dx$$

и допустим, что функции $f(x)$ и $F(x)$ удовлетворяют условиям, оговоренным при выводе (e).

Тогда

$$\int_{-T_1}^{T_2} dz \int_0^h f(x)\,\varphi[z(t-x)]\,dx = \int_0^h f(x)\,\frac{F[T_2(t-x)] - F[T_1(t-x)]}{t-x}\,dx,$$

так как условия, наложенные на функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, делают возможным изменение порядка интегрирования.

Если считать, что $f(x)\equiv 0$ в интервале $(-\infty,\ 0)$ и $(h,\ \infty)$, то при $0<t<h$ на основании (e) получим

$$\lim_{\substack{T_1\to\infty\\ T_2\to\infty}}\int_{-T_1}^{T_2} dz\int_0^h f(x)\,\varphi[z(t-x)]\,dx = [f(t-0)+f(t+0)]\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(x)}{x}\,dx =$$

$$= [f(t-0)+f(t+0)]\int_0^\infty \frac{F(x)-F(-x)}{x}\,dx,$$

т. е. формулу (33) Лобачевского.

Если $t = 0$, то, полагая $f(x) = 0$ при $t < 0$, приходим к формуле Лобачевского (36).

Если же $t < 0$ (или $t > h$), то, пользуясь (g), найдем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{0}^{h} f(x)\,\varphi\,[z\,(t-x)]\,dx = 0,$$

или

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{0}^{h} f(x)\,\varphi\,[z\,(t+x)]\,dx = 0$$

при $t > 0$ (или $t < -h$). Этим обоснована формула Лобачевского (35).

Если интеграл

$$\int_{0}^{\infty} f(x)\,\varphi\,[z\,(t-x)]\,dx$$

сходится равномерно относительно z во всяком конечном интервале, то наряду с формулой (33) справедлива и формула [33а], а также формулы (35) и (36) при $h = \infty$.

Из приведенных рассуждений нетрудно видеть, что все выведенные выше формулы остаются в силе, когда интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(x)}{x}\,dx$$

расходится, но существует главное значение

$$\lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \frac{F(x)}{x}\,dx = \int_{0}^{\infty} \frac{F(x) - F(-x)}{x}\,dx.$$

Запись формул Лобачевским этот случай предусматривает.

Формулы (28) и (29) получаются, если положить (в обозначениях Лобачевского) $f(x) = x^n e^{-ax}$, $\varphi(x) = e^{x\sqrt{-1}}$, $\lambda = 1$, причем при $n > -1$ легко убедиться в выполнении всех оговоренных выше условий.

Заметим, наконец, следующее.

Если функция $\Phi(x)$ становится неограниченной в точках β_k $(\ldots < \beta_{-2} < \beta_{-1} < 0 < \beta_0 < \beta_1 < \beta_2 < \ldots)$, $\inf\,(\beta_k - \beta_{k-1}) > 0$ и если главным значением интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x)\,dx$$

называть величину

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k,$$

где I_k — главное значение интеграла

$$\int\limits_{\frac{\beta_k+\beta_{k-1}}{2}}^{\frac{\beta_k+\beta_{k+1}}{2}} \Phi(x)\,dx,$$

то при некоторых дополнительных условиях, которые мы здесь приводить не будем, можно доказать, что формула (e) останется справедливой, если под значениями интегралов понимать главные значения в указанном смысле.

[11] Формула (45) лишена смысла, так как внутренний интеграл в ее правой части расходится и не имеет даже главного значения; тем не менее формула (46) справедлива (см. примечание [10]), если в правой ее части подразумевать главное значение соответствующего интеграла, как это следует из формулы (e) примечания [10] и из равенства (5) (см. также примечание [3]).

[12] Далее в оригинале в результате недосмотра[1]) следует текст, почти дословно повторяющийся после равенства [46a]. Приводим этот текст полностью:

«Например, для $f(x)=1$, сделав в L наперед интегрирование в отношении к x, получим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dz\, e^{z\sqrt{-1}}}{(a\lambda+z\sqrt{-1})^{n+2}} = \frac{2\pi\, e^{-a\lambda}}{\lambda^{n+1}\, n^{\infty n}} \int\limits_0^{\lambda} dx\, x^n = \frac{2\pi\, e^{-a\lambda}}{(n+1)^{\infty n+1}},$$

как было найдено выше (28).

Поставя $f(x)=x^m$, получим

$$\int\limits_0^{\lambda} dx\, x^n(\lambda-x)^m = \frac{\lambda^{m+n+1} m^{\infty m} n^{\infty n}}{(n+m+1)^{\infty n+m+1}},$$

который интеграл переходит в интеграл (23), когда здесь делаем

$$x=\lambda\sin^2\omega».$$

[13] В современных обозначениях и если положить $a+\frac{zi}{\lambda}=t$, равенство [46a] примет вид:

$$\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{\lambda t}\,dt}{t^{n+1}} \int\limits_0^{\infty} e^{-xt} f(x)\,dx = \frac{2\pi i}{\Gamma(n+1)} \int\limits_0^{\lambda} (\lambda-x)^n f(x)\,dx.$$

---

1) Это сочинение Лобачевский диктовал, будучи слепым.

В этом равенстве содержится преобразование, полученное формально из пары трансформаций Лапласа

$$\varphi(t)=\int_0^\infty e^{-xt}\,\alpha^{(n+1)}(x)\,dx,\qquad \alpha^{(n+1)}(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\varphi(t)\,e^{\lambda t}\,dt \tag{a}$$

$(n+1)$-кратным интегрированием второй формулы, что даст

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\varphi(t)}{t^{n+1}}\,e^{\lambda t}\,dt=\int_0^\lambda\frac{(\lambda-x)^n}{n!}\,\alpha^{(n+1)}(x).$$

Подставив сюда $\varphi(t)$ из первой формулы (a), получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{\lambda t}\,dt}{t^{n+1}}\int_0^\infty e^{-xt}\,\alpha^{(n+1)}(x)\,dx=\frac{1}{n!}\int_0^\lambda(\lambda-x)^n\,\alpha^{(n+1)}(x)\,dx \tag{b}$$

и, положив $\alpha^{(n+1)}(x)=f(x)$, приходим к формуле [46a].

Однако формула [46a] является более общей, чем (b), так как в равенстве (b) n — целое положительное число или нуль.

[14] При вычислении предела, приводящего к правой части (47), удобно воспользоваться тождеством

$$(\alpha+r)^{\infty r}=\frac{(\alpha+r)^{\infty\alpha+r}}{\alpha^{\infty\alpha}}$$

и асимптотической формулой

$$x^{\infty x}\approx\sqrt{2\pi}\;x^{x+\frac{1}{2}}\,e^{-x}.$$

Равенство (47) получается из предыдущего при помощи предельного перехода при $r\to\infty$ и замены $a-1$, $b-1$ соответственно через a и b.

[15] Так как

$$[a+b+(m-2i)\,b]^m=$$
$$=(a+b+mb)\,[a+b+(m-2i)b]^{m-1}-2bi\,[a+b+(m-2i)\,b]^{m-1}$$

и

$$(m+1)^{\infty i}=m^{\infty i}+im^{\infty i-1},$$

то

$$L_{m+1}(a) = \sum_{i=0}^{m+1} (-1)^i \frac{(m+1)^{\infty i}}{i^{\infty i}} [a + b + (m - 2i) b]^m =$$

$$= (a + b + mb) \sum_{i=0}^{m+1} (-1)^i \frac{m^{\infty i} + i m^{\infty i - 1}}{i^{\infty i}} [a + b + (m - 2i) b]^{m-1} -$$

$$- 2b \sum_{i=0}^{m+1} (-1)^i \, i \, \frac{(m+1)^{\infty i}}{i^{\infty i}} [a + b + (m - 2i) b]^{m-1} =$$

$$= (a + b + mb) L_m (a + b) +$$

$$+ (a + b + mb) \sum_{i=1}^{m+1} (-1)^i \frac{m^{\infty i - 1}}{(i-1)^{\infty i - 1}} [a + b + (m - 2i) b]^{m-1} -$$

$$- 2b \sum_{i=1}^{m+1} (-1)^i \frac{(m+1)^{\infty i}}{(i-1)^{\infty i - 1}} [a + b + (m-2i) b]^{m-1},$$

если учесть также, что $(-1)^{\infty -1} = \infty$ и $m^{\infty m+1} = 0$.

Лобачевский, повидимому, пропустил под знаком суммы в третьей строчке равенств [49а] множитель i в числителе.

Далее замена i на $i+1$ дает

$$\sum_{i=1}^{m+1} (-1)^i \frac{m^{\infty i - 1}}{(i-1)^{\infty i - 1}} [a + b + (m - 2i) b]^{m-1} =$$

$$= - \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \frac{m^{\infty i}}{i^{\infty i}} [a - b + (m - 2i) b]^{m-1} = - L_m (a - b)$$

и

$$L_{m+1}(a) = \sum_{i=1}^{m+1} (-1)^i \frac{(m+1)^{\infty i}}{(i-1)^{\infty i - 1}} [a + b + (m - 2i) b]^{m-1} =$$

$$= -(m+1) \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \frac{m^{\infty i}}{i^{\infty i}} [a - b + (m - 2i) b]^{m-1} = -(m+1) L_m (a - b)$$

и, следовательно,

$$L_{m+1}(a) = (a + b + mb) [L_m (a + b) - L_m (a - b)] + 2b (m+1) L_m (a - b).$$

Таким образом, действительно из тождества $L_m(a) = 0$ следует тождество $L_{m+1}(a) = 0$.

ИСТОРИКО-БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ О СОЧИНЕНИИ «ЗНАЧЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ»

Последнее сочинение Н. И. Лобачевского по математическому анализу «Значение некоторых определенных интегралов» было напечатано в «Ученых записках Казанского университета» за 1852 год, в книжке IV на страницах 1—34. Две ее части, озаглавленные «Статья I» и «Статья II», следуют подряд (статья I — на стр. 1—26, статья II — на стр. 27—34) и имеют общую нумерацию формул; в то же время каждая из них снабжена заглавием сочинения и фамилией автора [1]). Это производит странное впечатление. Возможно, что сначала предполагалось поместить эти статьи в разных книжках «Ученых записок» и что Лобачевский сдал в редакцию свое сочинение в два приема, но их оказалось возможным напечатать вместе.

Журнал с сочинением Лобачевского вышел в 1853 году. В том же году это сочинение вышло отдельным оттиском с надписью на обложке: «Значение некоторых определенных интегралов. Сочинение *Николая Лобачевского*, заслуженного профессора императорского Казанского университета»; в конце 34-й страницы оттиска указано: «Перепечатано из 4-й книжки Ученых записок за 1852 год».

Сочинение на русском языке ни разу не переиздавалось.

В 1855 году в «Архиве Эрмана» (Archiv für wissenschaftliche Kunde von Russland, Берлин, том 14, стр. 232—272) был опубликован перевод этого сочинения на немецкий язык под заглавием: «Ueber den Werth einiger bestimmten Integrale. Nach dem Russischen von Herrn Lobatschewskij, Prof. emerit. zu Kazan».

Текст настоящего издания воспроизводит текст оригинала; исключено только несколько строк, по ошибке напечатанных дважды (см. примечание [12] на стр. 322); порядок дополнительной нумерации формул, исправления ошибок и опечаток, а также изменения обозначений тот же, что и в сочинениях Лобачевского по теории рядов [2]).

---

[1]) Фотография стр. 1 помещена перед стр. 275 наст. тома; заглавие второй статьи (стр. 27 оригинального издания) имеет точно такой же вид.

[2]) См. стр. 263 и 264 наст. тома.

ВЕРОЯТНОСТЬ СРЕДНИХ РЕЗУЛЬТАТОВ, ПОЛУЧЕННЫХ ИЗ ПОВТОРНЫХ НАБЛЮДЕНИЙ

1842

ВВОДНАЯ СТАТЬЯ А.Н. КОЛМОГОРОВА,
ПЕРЕВОД А.Н. ХОВАНСКОГО,
КОММЕНТАРИИ А.Н. КОЛМОГОРОВА
И А.Н. ХОВАНСКОГО

ВЕРОЯТНОСТЬ СРЕДНИХ РЕЗУЛЬТАТОВ, ПОЛУЧЕННЫХ ИЗ ПОВТОРНЫХ НАБЛЮДЕНИЙ

ОБЗОР СОЧИНЕНИЯ «ВЕРОЯТНОСТЬ СРЕДНИХ РЕЗУЛЬТАТОВ, ПОЛУЧЕННЫХ ИЗ ПОВТОРНЫХ НАБЛЮДЕНИЙ»

Статья Лобачевского «Вероятность средних результатов, полученных из повторных наблюдений», напечатанная в 1842 году на французском языке в журнале Крелля, является переработкой статей (параграфов) 164—165 его «Новых начал геометрии с полной теорией параллельных»[1]. В некоторых частях французский текст статьи является простым переводом русского текста «Новых начал». Некоторые чисто технические выкладки текста «Новых начал» в журнальной статье сокращены или опущены, но зато в ней добавлены сопоставление полученных результатов с результатами Лапласа и применения к вычислению определенных интегралов.

В современной терминологии исследование Лобачевского посвящено нахождению закона распределения суммы, или среднего арифметического r взаимно независимых и одинаково распределенных случайных величин. Лобачевский ограничивается двумя специальными задачами этого рода. Первая из решаемых им задач заключается в нахождении распределения суммы

$$\mu_r = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_r,$$

где λ_i взаимно независимы и каждое из них принимает только целые значения l, заключенные в пределах

$$-a \leqslant l \leqslant +a,$$

с одинаковой вероятностью $\frac{1}{2a+1}$. Очевидно, что сумма μ_r способна принимать только целые значения m, заключенные в пределах

$$-ra \leqslant m \leqslant +ra,$$

и задача состоит в нахождении соответствующих вероятностей

$$p_r(m) = \frac{C_r(m)}{(2a+1)^r},$$

[1] Т. II наст. издания, стр. 397—408.

где $C_r(m)$ обозначает «число шансов» получить $\mu_r = m$. Вместо обычной в современных исследованиях формулы «композиции» распределений

$$p_{r+1}(m) = \sum_n p_r(n)\, p_1(m-n)$$

Лобачевский пользуется формулой

$$C_{r+1}(m) = \sum_n C_r(n)\, C_1(m-n),$$

которая позволяет последовательно вычислять $C_r(m)$ при $r = 2, 3, 4, \ldots$, отправляясь от

$$C_1(m) = \begin{cases} 1 \text{ при } |m| \leqslant a, \\ 0 \text{ при } |m| > a. \end{cases}$$

Вторая задача, рассмотренная Лобачевским, заключается в нахождении распределения среднего арифметического

$$\xi_r = \frac{1}{r}(\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_r),$$

где каждая из взаимно независимых величин δ_i распределена равномерно на отрезке $[-1; +1]$. В настоящее время такая задача решалась бы на основе формулы композиции для плотностей вероятности. Лобачевский получает ее решение предельным переходом при

$$a \to \infty,$$
$$x = \frac{m}{ra}$$

из решения первой задачи.

Наиболее замечательным является то, что Лобачевский совершенно элементарными методами находит для чисел $C_r(m)$ в первой задаче и вероятностей

$$P_r(x) = P\{|\xi_r| \leqslant x\}$$

во второй задаче явные формулы, которые в современных обозначениях имеют вид [1]):

$$C_r(m) = \sum_{0 \leqslant \lambda < \frac{ra+m+1}{2a+1}} (-1)^\lambda C_r^\lambda C_{(r-2\lambda)a+m+r-1-\lambda}^{r-1}, \tag{1}$$

$$P_r(x) = 1 - \frac{1}{r!\,2^{r-1}} \sum_{0 \leqslant \lambda < \frac{r-rx}{2}} (-1)^\lambda C_r^\lambda (r - rx - 2\lambda)^r. \tag{2}$$

---

[1]) Где C_n^m — биномиальные коэффициенты

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}.$$

В заключительной части статьи Лобачевский пользуется формулой Лапласа

$$C_r(m) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos m\omega \left(\frac{\sin\left(a+\frac{1}{2}\right)\omega}{\sin\frac{\omega}{2}}\right)^r d\omega, \qquad (3)$$

и получает для $P_r(x)$ интегральное выражение

$$P_r(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin(rxz)}{z}\left(\frac{\sin z}{z}\right)^r dz. \qquad (4)$$

Сопоставление (4) и (2) приводит к выражению в виде конечной суммы интеграла, стоящего в правой части равенства (4). Попутно Лобачевский получает еще формулу

$$\int_0^{\infty} \cos(rxz)\left(\frac{\sin z}{z}\right)^r dz = \frac{\pi}{(r-1)!\,2^r} \sum_{0\leqslant\lambda<\frac{r\pm rx}{2}} (-1)^{\lambda} C_r^{\lambda} (r-2\lambda\pm rx)^{r-1}, \quad (5)$$

где знак перед rx можно выбрать по произволу.

Наконец, полагая в (5) $r=1$, $x=0$, Лобачевский получает новое доказательство известной формулы

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin z}{z}\,dz = \frac{\pi}{2}. \qquad (6)$$

Относительно формулы (5) Лобачевский указывает, что она была получена Лапласом, хотя и «несколько обходным путем». Кроме указаний на сложность рассуждений Лапласа, Лобачевский отмечает, что Лаплас интересовался «собственно говоря лишь случаем очень большого числа наблюдений». Лобачевский, наоборот, подчеркивает существенность получения точных количественных результатов, применимых уже при ограниченном числе слагаемых r. В частности, для $r=10$ он дает таблицу функции $P_{10}(x)$ с интервалом в 0,1 по x и пятью знаками после запятой в значениях функции.

Обращение к вопросам теории вероятностей в параграфах 164—165 «Новых начал» и в статье «Вероятность средних результатов» осталось незначительным эпизодом в научном творчестве Лобачевского. В этой побочной для него области математики Лобачевский оказался вполне на уровне лучших специалистов того времени; поставив перед собой конкретные и вполне естественные с точки зрения теории ошибок задачи, он решил их с исключительной простотой. Найденные им

формулы (1) и (2) сохраняют интерес и до настоящего времени, хотя для второй из них мы предпочли бы теперь другой способ ее вывода.

С методологической стороны интерес представляет стремление Лобачевского получить точные количественные результаты, применимые уже при ограниченном числе слагаемых r, т. е. с практической точки зрения — при обработке небольшого числа наблюдений. Это связано, повидимому, с тем, что результаты, относящиеся к обработке наблюдений, Лобачевский предполагал применить к оценке надежности выводов в высшей степени важных[1]).

Отметим, наконец, что основная часть статьи Лобачевского находится на очень высоком уровне в смысле логической строгости выводов. Большей ясности, чем это имеется у Лобачевского при предельном переходе от первой задачи о распределении сумм μ_r ко второй задаче о распределении средних арифметических ξ_r, в его время требовать было невозможно. Слабее в этом отношении заключительная часть статьи, где Лобачевский допускает смешение предельных и допредельных соотношений в стиле чисто эвристических приемов, свойственных Лапласу (см. примечания [15], [16], [21]).

Трудно сказать, как относился Лобачевский к проблематике, связанной с предельным переходом при $r \to \infty$, которую он оставляет в стороне. Как известно, ее полное исследование вполне строгими методами является заслугой русской чебышевской школы. Сравнение таблицы функции $P_{10}(x)$, составленной Лобачевским, с таблицей нормального интеграла

$$t = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

показало бы, что на самом деле в случае, разобранном Лобачевским уже при $r = 10$, нормальное приближение удовлетворяет всем практическим потребностям. Но во времена Лапласа и Лобачевского вряд ли имелась возможность доказать это, не производя расчетов по формулам Лобачевского.

1) См. по этому поводу обзор сочинения «Новые начала геометрии» во втором томе настоящего издания, стр. 145.

13.

Probabilité des résultats moyens tirés d'observations répetées.

(Par Mr. *Lobatschewsky*, recteur de l'université de Cazan.)

Je me sers de l'expression $r^{\pi n}$ pour représenter le produit des n facteurs

$$r(r-1)(r-2)\dots(r-n+1),$$

le nombre n étant entier et positif, quel que soit au reste l'autre nombre r. Posons de plus que $r^{\pi n}=1$ pour $n=0$ et $r^{\pi n}=0$ toutes les fois que l'exposant n devient négativ. On a de cette manière

$$1.\quad \frac{r^{\pi n}}{n^{\pi n}} = \frac{(r-1)^{\pi n}}{n^{\pi n}} + \frac{(r-1)^{\pi n-1}}{(n-1)^{\pi n-1}}.$$

Je considère à présent la fonction algébrique

$$2.\quad C_r(m) = \Sigma \frac{(-1)^\lambda r^{\pi\lambda}}{(r-1)^{\pi r-1}\lambda^{\pi\lambda}}[(r-2\lambda)a+m+r-1-\lambda]^{\pi r-1},$$

où le signe Σ s'étend à toutes les valeurs du nombre entier positif λ depuis $\lambda=0$, tant que

$$\lambda \leqq \frac{ra-m+1}{2a+1},$$

les autres nombres r, a étant entiers positifs, m est aussi un entier positif ou négatif. Par exemple en mettant $r=0, 1, 2$, etc. et en regardant m comme positif, on trouve

$$3.\quad \begin{cases} C_0(m) = 0, \\ C_1(m) = 1, \\ C_1(-m) = 1, \\ C_2(m) = 2a-m+1, \\ C_2(-m) = 2a-m+1, \end{cases}$$

A l'aide des équations (1), (2) on trouve

$$\begin{aligned} C_r(m+1) &= C_r(m) + \Sigma \frac{(-1)^\lambda (r-1)^{\pi\lambda}}{(r-2)^{\pi r-2}\lambda^{\pi\lambda}}[(r-2\lambda)a+m+r-1-\lambda]^{\pi r-2} \\ &= C_r(m) + \Sigma \frac{(-1)^\lambda (r-1)^{\pi\lambda}}{(r-2)^{\pi r-2}\lambda^{\pi\lambda}}[(r-2\lambda)a+m+r-1-\lambda]^{\pi r-2} \\ &\qquad + \Sigma \frac{(-1)^\lambda (r-1)^{\pi\lambda-1}}{(r-2)^{\pi r-2}(\lambda-1)^{\pi\lambda-1}}[(r-2\lambda)a+m+r-1-\lambda]^{\pi r-2} \\ &= C_r(m) + C_{r-1}(a+m) - \Sigma \frac{(-1)^\lambda (r-1)^{\pi\lambda}}{(r-2)^{\pi r-2}\lambda^{\pi\lambda}}[(r-2\lambda)a+m-2a+r-2-\lambda]^{\pi r-2}, \end{aligned}$$

Первая страница оригинального издания сочинения «Вероятность средних результатов, полученных из повторных наблюдений» (164-я стр. 24-й книжки журнала Крелля за 1842 г.).

К стр. 333.

ВЕРОЯТНОСТЬ СРЕДНИХ РЕЗУЛЬТАТОВ, ПОЛУЧЕННЫХ ИЗ ПОВТОРНЫХ НАБЛЮДЕНИЙ

Перевод с французского А. Н. Хованского

Я пользуюсь выражением $r^{\infty n}$ [1] для обозначения произведения n множителей

$$r(r-1)(r-2)\ldots(r-n+1),$$

где число n — целое и положительное, каково бы ни было другое число r. Положим, кроме того, $r^{\infty n}=1$ для $n=0$ и $r^{\infty n}=0$ каждый раз, когда показатель n становится отрицательным. Тогда имеем

$$1. \qquad \frac{r^{\infty n}}{n^{\infty n}}=\frac{(r-1)^{\infty n}}{n^{\infty n}}+\frac{(r-1)^{\infty n-1}}{(n-1)^{\infty n-1}} \text{ [2]}.$$

Я рассмотрю теперь алгебраическую функцию

$$2. \quad C_r(m)=\sum\frac{(-1)^{\lambda}r^{\infty\lambda}}{(r-1)^{\infty r-1}\lambda^{\infty\lambda}}[(r-2\lambda)a+m+r-1-\lambda]^{\infty r-1},$$

где знак $\sum$ распространяется на все целые положительные числа λ от $\lambda=0$ до

$$\lambda\leqq\frac{ra+m+1}{2a+1} \text{ [3]},$$

и где числа r, a целые положительные, а m целое положительное или отрицательное. Например, полагая $r=0, 1, 2$ и т. д. и считая m положительным, находим

$$3. \qquad \begin{cases} C_0(m)=0, \\ C_1(m)=1, \\ C_1(-m)=1, \\ C_2(m)=2a-m+1, \\ C_2(-m)=2a-m+1. \end{cases}$$

С помощью уравнений (1), (2) находим [4]

$$C_r(m+1)=C_r(m)+\sum\frac{(-1)^\lambda r^{\infty\lambda}}{(r-2)^{\infty r-2}\lambda^{\infty\lambda}}[(r-2\lambda)a+m+r-1-\lambda]^{\infty r-2}=$$

$$=C_r(m)+\sum\frac{(-1)^\lambda (r-1)^{\infty\lambda}}{(r-2)^{\infty r-2}\lambda^{\infty\lambda}}[(r-2\lambda)a+m+r-1-\lambda]^{\infty r-2}+$$

$$+\sum\frac{(-1)^\lambda (r-1)^{\infty\lambda-1}}{(r-2)^{\infty r-2}(\lambda-1)^{\infty\lambda-1}}[(r-2\lambda)a+m+r-1-\lambda]^{\infty r-2}=$$

$$=C_r(m)+C_{r-1}(a+m+1)-$$

$$-\sum\frac{(-\lambda)^\lambda (r-1)^{\infty\lambda}}{(r-2)^{\infty r-2}\lambda^{\infty\lambda}}[(r-2\lambda)a+m-2a+r-2-\lambda]^{\infty r-2},$$

или, наконец,

$$4. \qquad C_r(m+1)=C_r(m)+C_{r-1}(a+m+1)-C_{r-1}(m-a).$$

Функция $C_r(m)$ обладает еще свойством не менять свое значение при замене $+m$ на $-m$, так что

$$5. \qquad C_r(m)=C_r(-m).$$

Уравнения (3) уже подтверждают это свойство для $r=0,\ 1,\ 2$. Предположим, что это свойство верно для всех чисел r от $r=0$ до данного r. Подставляя $r+1$ вместо r и $m+1$ или $-m$ вместо m в уравнение (4), имеем

$$\begin{aligned}C_{r+1}(m+1)&=C_{r+1}(m)+C_r(a+m+1)-C_r(m-a),\\ C_{r+1}(-m)&=C_{r+1}(-m-1)+C_r(a-m)-C_r(-m-a-1)=\\ &=C_{r+1}(-m-1)+C_r(m-a)-C_r(m+a+1);\end{aligned}$$

следовательно,

$$C_{r+1}(m+1)=C_{r+1}(-m-1)+C_{r+1}(m)-C_{r+1}(-m).$$

Полагая здесь по порядку $m=0,\ 1,\ 2$ и т. д., заключаем, что данное утверждение верно для индекса $r+1$ и для всех целых чисел m.

При $r=2,\ m=2a$ имеем

$$6. \qquad C_r(ra)=1,$$

что также верно для всех чисел r; последнее утверждение доказывается с помощью выражения (2), где λ в этом случае не может быть больше нуля [5].

При $r=2$, $m=2a+\alpha$ и $\alpha>0$ функция $C_r(m)$ становится

7. $$C_r(ra+\alpha)=0,$$

что также верно для всех целых положительных чисел r, и что можно доказать, рассмотрев сперва уравнение (7) для всех индексов, меньших r.

В самом деле, уравнение (4) нам дает

8. $$C_r(ra+\alpha)=$$
$$=C_r(ra+\alpha-1)+C_{r-1}(ra+a-\alpha)-C_{r-1}(ra-a+\alpha-1).$$

Но уже было доказано по уравнению (6), что

$$C_r(ra)=1,\quad C_{r-1}(ra-a)=1,$$

а так как мы только что предположили, что

$$C_{r-1}(ra+\alpha)=0,$$

то уравнение (8) нам дает сначала для $\alpha=1$

$$C_r(ra+1)=0.$$

Если предположить затем, что

$$C_{r-1}(ra+a+\alpha)=0,\quad C_{r-1}(ra-a+\alpha-1)=0,$$

то из того же уравнения (8) получим:

$$C_r(ra+\alpha)=C_r(ra+\alpha-1).$$

Подставляя сюда $\alpha=1$, затем $\alpha=2$, 3 и т. д., мы докажем правильность уравнения (7) для всех чисел α.

Определим теперь вероятность ошибок в средних результатах. Предположим, что в каком-нибудь наблюдении все ошибки равно возможны и являются целыми числами, заключенными между $+a$ и $-a$. Сочетая между собой наблюдения, число которых есть r, мы будем иметь в сумме ошибку m, которая не может выйти за пределы $+ra$, $-ra$. Это число сочетаний есть та же функция от r и m, которую мы обозначили выше через $C_r(m)$. В самом деле, это выражение уже удовлетворяет условию обращаться в нуль всякий раз, когда m превышает ra; затем оно равно единице при $m=ra$ и, наконец, оно обладает свойством не менять свое значение при замене $+m$ на $-m$ (см. уравнения (5), (6), (7)). Остается лишь рассмотреть случай m положительных и меньших ra.

При $r=1$ число сочетаний равно единице, что также является значением $C_r(m)$, как видно из одного из уравнений (3). Для всех

других чисел r необходимо и достаточно, чтобы функция $C_{r+1}(m)$ была суммой всех значений произведения

$$C_r(p)\cdot C_1(m-p)$$

от $p=m-a$ до $p=m+a$. Но так как $C_1(m-p)=1$, то необходимо, чтобы

$$C_{r+1}(m)=\sum C_r(p)$$

внутри тех же пределов для p, что также проверяется и доказывается путем подстановки сюда выражения (2) для $C_r(p)$. Таким образом, мы получим

$$C_{r+1}(m)=\sum\sum\frac{(-1)^{\lambda}r^{\infty\lambda}}{(r-1)^{\infty r-1}\lambda^{\infty\lambda}}[(r-2\lambda)a+p+r-1-\lambda]^{\infty r-1},$$

где двойное суммирование распространяется на все значения p и λ, от $p=m-a$ до $p=m+a$ и от $\lambda=0$ до

$$\lambda\leqq\frac{ra+p+1}{2a+1}.$$

Произведя суммирование по p, мы имеем

$$C_{r+1}(m)=\sum\frac{(-1)^{\lambda}r^{\infty\lambda}}{r^{\infty r}\lambda^{\infty\lambda}}[(r-2\lambda)a+p+r-\lambda]^{\infty r}+A,$$

где следует положить $p=m+a$ и определить постоянную A так, чтобы $C_{r+1}(m)$ обращалось в нуль для $p=m-a-1$. Следовательно,

$$A=-\sum\frac{(-1)^{\lambda}r^{\infty\lambda}}{r^{\infty r}\lambda^{\infty\lambda}}[(r-2\lambda)a+m-a-1+r-\lambda]^{\infty r},$$

где λ меняется в пределах от $\lambda=0$ до

$$\lambda\leqq\frac{ra+m-a}{2a+1},$$

или, заменив λ на $\lambda-1$, получим

$$A=\sum\frac{(-1)^{\lambda}r^{\infty\lambda-1}}{r^{\infty r}(\lambda-1)^{\infty\lambda-1}}[(r+1-2\lambda)a+m+r-\lambda]^{\infty r}\ [6],$$

где λ меняется в пределах от $\lambda=0$ до

$$\lambda\leqq\frac{(r+1)a+m+1}{2a+1}.$$

Таким образом, значение $C_{r+1}(m)$ равно

$$C_{r+1}(m) = \sum \frac{(-1)^{\lambda} r^{\infty\lambda}}{r^{\infty r} \lambda^{\infty\lambda}} [(r+1-2\lambda)a + m + r - \lambda]^{\infty r} +$$
$$+ \sum \frac{(-1)^{\lambda} r^{\infty\lambda-1}}{r^{\infty r} (\lambda-1)^{\lambda-1}} [(r+1-2\lambda)a + m + r - \lambda]^{\infty r},$$

причем пределы суммирования по λ одинаковы в обеих суммах, т. е. $\lambda = 0$ и

$$\lambda \leqq \frac{(r+1)a + m + 1}{2a+1}.$$

Соединив эти две суммы в одну, получим

$$\sum \frac{(-1)^{\lambda} (r+1)^{\infty\lambda}}{r^{\infty r} \lambda^{\infty\lambda}} [(r+1-2\lambda)a + m + r - \lambda]^{\infty r},$$

что действительно является выражением $C_{r+1}(m)$, как мы его дали выше (уравнение (2)), и в котором, как было доказано, можно поставить $-m$ вместо $+m$ и обозначить тем самым величину числа сочетаний, могущих произвести ошибку m,

$$C_r(m) = \sum \frac{(-1)^{\lambda} r^{\infty\lambda}}{(r-1)^{\infty r-1} \lambda^{\infty\lambda}} [(r-2\lambda)a - m + r - \lambda - 1]^{\infty r-1},$$

причем суммирование ведется от $\lambda = 0$ до

$$\lambda \leqq \frac{ra - m + 1}{2a+1}.$$

Соединив все значения $C_r(m)$ от $m = 1$ до данного числа m, находим

$$\sum_{+1}^{+m} C_r(m) = A - \sum \frac{(-1)^{\lambda} r^{\infty\lambda}}{r^{\infty r} \lambda^{\infty\lambda}} [(r-2\lambda)a - m + r - \lambda]^{\infty r}.$$

Постоянная A определяется тем условием, чтобы левая часть этого равенства обращалась в нуль при $m = 0$. Следовательно,

9. $$A = \sum \frac{(-1)^{\lambda} r^{\infty\lambda}}{r^{\infty r} \lambda^{\infty\lambda}} [(r-2\lambda)a + r - \lambda]^{\infty r}$$

от $\lambda = 0$ до

$$\lambda \leqq \frac{ra+1}{2a+1}.$$

Умножив на 2 уравнение (9) и прибавив к этому произведению $C_r(0)$, мы получим полное число сочетаний, приводящих к тому,

чтобы ошибка m оставалась внутри границ $+m$, $-m$. Это число будет

10. $$\sum_{-m}^{+m} C_r(m) =$$

$$= 2\sum \frac{(-1)^{\lambda} r^{\infty\lambda}}{r^{\infty r}\lambda^{\infty\lambda}} \{[(r-2\lambda)a + r - \lambda]^{\infty r} - [(r-2\lambda)a - m + r - \lambda]^{\infty r}\} + \\ + \sum \frac{(-1)^{\lambda} r^{\infty\lambda}}{(r-1)^{\infty r-1}\lambda^{\infty\lambda}} [(r-2\lambda)a + r - \lambda - 1]^{\infty r-1},$$

где λ под знаком $\sum$ возрастает от $\lambda = 0$ до тех пор, пока в произведениях не будет больше положительных множителей.

Ясно, что число сочетаний, которые производят все возможные ошибки, должно равняться $(2a+1)^r$. Неöбходимо, следовательно, чтобы [7]

11. $$(2a+1)^r =$$

$$= \sum \frac{(-1)^{\lambda} r^{\infty\lambda}}{r^{\infty r}\lambda^{\infty\lambda}} \{2[(r-2\lambda)a + r - \lambda]^{\infty r} + [(r-2\lambda)a + r - \lambda - 1]^{\infty r-1}\}.$$

Обозначив через $P_r(m)$ [8] вероятность того, что ошибка m среднего результата r наблюдений должна быть заключена в границах $+m$, $-m$, имеем, очевидно,

$$P_r(m) = \frac{1}{(2a+1)^r} \sum_{-m}^{+m} C_r(m).$$

Сочетав это уравнение с уравнениями (10), (11), разделив предварительно два последние на $(2a+1)^r$ и полагая затем

$$\frac{m}{ra} = x, \quad a = \infty,$$

имеем

$$P_r(x) = \frac{2}{r^{\infty r}} \sum \frac{(-1)^{\lambda} r^{\infty\lambda}}{\lambda^{\infty\lambda}} \left[\left(\frac{1}{2}r - \lambda\right)^r - \left(\frac{1}{2}r - \frac{1}{2}rx - \lambda\right)^r\right],$$

$$r^{\infty r} = 2\sum (-1)^{\lambda} \frac{r^{\infty\lambda}}{\lambda^{\infty\lambda}} \left(\frac{1}{2}r - \lambda\right)^r,$$

где $P_r(x)$ представляет вероятность того, что ошибка среднего результата, полученного из r наблюдений, не выходит из границ $+x$, $-x$, когда наибольшая ошибка каждого наблюдения не вы-

ходит за пределы $+1$ и -1. Соединение двух последних уравнений дает для этой вероятности

$$P_r(x) = 1 - \frac{1}{r^{**r} 2^{r-1}} \sum (-1)^\lambda \frac{r^{**\lambda}}{\lambda^{**\lambda}} (r - rx - 2\lambda)^r,$$

где сумма распространяется на все целые λ, начиная с $\lambda = 0$, для которых $r - rx - 2\lambda$ положительно [9].

Взяв, например, $r = 10$, имеем [10]

для $0{,}8 \leqslant x \leqslant 1$

$$P_{10}(x) = 1 - \frac{390\,625}{72\,576}(1-x)^{10},$$

для $0{,}6 \leqslant x \leqslant 0{,}8$

$$P_{10}(x) = 1 - \frac{390\,625}{72\,576}(1-x)^{10} + \frac{(4-5x)^{10}}{181\,440},$$

для $0{,}4 \leqslant x \leqslant 0{,}6$

$$P_{10}(x) = 1 - \frac{390\,625}{72\,576}(1-x)^{10} + \frac{(4-5x)^{10}}{181\,440} - \frac{(3-5x)^{10}}{40\,320},$$

для $0{,}2 \leqslant x \leqslant 0{,}4$

$$P_{10}(x) = 1 - \frac{390\,625}{72\,576}(1-x)^{10} + \frac{(4-5x)^{10}}{181\,440} - \frac{(3-5x)^{10}}{40\,320} + \frac{(2-5x)^{10}}{15\,120},$$

для $0 \leqslant x \leqslant 0{,}2$

$$P_{10}(x) =$$

$$= 1 - \frac{390\,625}{72\,576}(1-x)^{10} + \frac{(4-5x)^{10}}{181\,440} - \frac{(3-5x)^{10}}{40\,320} + \frac{(2-5x)^{10}}{15\,120} - \frac{(1-5x)^{10}}{8\,640}.$$

Вычисляя с точностью до пятого десятичного знака, имеем [11]:

Ошибка	Вероятность
1,0	1,00000
0,9	1,00000
0,8	1,00000
0,7	0,99997 *
0,6	0,99944
0,5	0,99506
0,4	0,97310 *
0,3	0,89907 *
0,2	0,72220
0,1	0,41097 *
0,0	0,00000

Можно, следовательно, держать 18 против 7, что при наблюдении, повторенном десять раз, ошибка среднего числа не превзойдет

одной пятой наибольшей ошибки, которая может быть допущена в отдельном наблюдении [12].

Лаплас в своей «Аналитической теории вероятностей» занимается, собственно говоря, лишь случаем очень большого числа наблюдений. Путем чрезвычайно сложных рассуждений и постоянно пользуясь определенными интегралами, он пришел к выражениям, которые вполне совпадают с только что приведенными здесь. Число сочетаний, в которых сумма ошибок есть m, а число повторений есть r, можно выразить следующим определенным интегралом

$$C_r(m)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\omega\cos m\omega\left(\frac{\sin\left(a+\frac{1}{2}\right)\omega}{\sin\frac{1}{2}\omega}\right)^r.$$

Разделив этот интеграл на $(2a+1)^r$, т. е. на полное число сочетаний, имеем [13]

$$\frac{1}{(2a+1)^r}C_r(m)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{d\omega\cos m\omega}{(2a+1)^r}\left(\frac{\sin\left(a+\frac{1}{2}\right)\omega}{\sin\frac{1}{2}\omega}\right)^r$$

для вероятности того, что сумма ошибок равна m. Теперь вероятность того, чтобы эта сумма была внутри пределов $+m$ и $-m$, должна быть [14]

$$P_r(m)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{d\omega\sin m\omega}{\omega(2a+1)^r}\left(\frac{\sin\left(a+\frac{1}{2}\right)\omega}{\sin\omega}\right)^r.$$

Положив $m=rax$, затем $a=\infty$ и обозначив $a\omega=z$, имеем [15]

12. $$\frac{1}{(2a+1)^r}C_r(m)=\frac{1}{a\pi}\int_0^{\infty}dz\cos(rzx)\left(\frac{\sin z}{z}\right)^r.$$

13. $$P_r(x)=\frac{2r}{\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{x}dz\,dx\cos(rzx)\left(\frac{\sin z}{z}\right)^r.$$

Но мы нашли для $C_r(m)$ выражение (2), которое в случае $a=\infty$ позволяет нам установить, что интеграл в уравнении (12) равен [16]

14. $$\int_0^{\infty}dz\cos(rzx)\left(\frac{\sin z}{z}\right)^r=\frac{\pi}{2^r}\sum\frac{(-1)^{\lambda}r^{\infty\lambda}}{(r-1)^{\infty\,r-1}\lambda^{\infty\lambda}}(r-2\lambda\pm rx)^{\infty\,r-1}.$$

Сумма здесь распространяется на все значения $\lambda \geqslant 0$, для которых величина, стоящая под показателем $r-1$, положительна [17], причем знак перед x можно выбрать произвольно. *Лаплас* также приписывает это значение определенному интегралу, но приходит к этому несколько обходным путем [18].

Выражение, которое мы нашли для $P_r(x)$, служит также для вычисления двойного интеграла (13), откуда мы заключаем, произведя интегрирование по x, что [19]

15. $$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{dz}{z}\sin(rxz)\left(\frac{\sin z}{z}\right)^r =$$

$$= 1 - \frac{1}{r^{\infty r} 2^{r-1}} \sum (-1)^\lambda \frac{r^{\infty \lambda}}{\lambda^{\infty \lambda}} (r - rx - 2\lambda)^r,$$

причем сумма распространяется на все значения λ от $\lambda = 0$, для которых $r - 2x - 2\lambda$ положительно [20], число x положительно, меньше или равно единице, а r есть целое положительное число. Уравнения (14), (15) должны быть верны и при $r = 1$, причем оба они согласным образом приводят к известному интегралу [21]

$$\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x}\sin x = \frac{1}{2}\pi$$

и доставляют, таким образом, новое доказательство этого равенства.

ПРИМЕЧАНИЯ

[1] В «Новых началах» Лобачевский называет такое выражение *уступом*, а число n — *показателем уступа* [1]).

[2] Здесь и далее Лобачевский отказывается от употреблявшегося им в «Новых началах» обозначения $p_c^{\infty q} = \frac{p^{\infty q}}{q^{\infty q}}$.

[3] В журнале Крелля опечатка, отсутствующая в «Новых началах»:

$$\lambda \leqq \frac{ra - m + 1}{2a + 1}.$$

Легко заметить, что член с $\lambda = \frac{ra + m + 1}{2a + 1}$ равен нулю и мог бы быть поэтому отброшен.

[4] В первой строке этой формулы в журнале Крелля вместо $r^{\infty\lambda}$ ошибочно поставлено $(r-1)^{\infty\lambda}$. Этой опечатки нет в «Новых началах», где Лобачевский вместо $\frac{r^{\infty\lambda}}{\lambda^{\infty\lambda}}$ употреблял обозначение $r_c^{\infty\lambda}$. Кроме того, в журнале Крелля вместо $C_{r-1}(a+m+1)$ ошибочно напечатано $C_{r-1}(a+m)$. Эта опечатка имелась и в «Новых началах».

[5] Подробный вывод этого равенства находится в «Новых началах» [2]).

[6] У Лобачевского здесь, как и в «Новых началах», пропущено слагаемое $-\lambda$ в квадратных скобках. Эта ошибка повторяется и дальше в формуле для $C_{r+1}(m)$ и в соединении обеих сумм в одну.

[7] В журнале Крелля при второй квадратной скобке формулы (11) имеется лишний множитель r, отсутствующий в «Новых началах».

[8] В «Новых началах» Лобачевский обозначает вероятность буквой B.

---

1) См. т. II наст. издания, стр. 398.

2) Там же, стр. 399—400.

[9] Буквальный перевод этого места гласит: «на все значения λ, вплоть до степеней отрицательных чисел».

[10] В подлиннике во всех нижеследующих неравенствах для x указан лишь нижний предел, а в последнем неравенстве указан лишь верхний предел: $x < 0,2$. Как и в «Новых началах», мы везде уточнили эти неравенства. Индекс r в выражениях для $P_r(x)$ при $r = 10$ мы заменили индексом 10, как это сделал сам Лобачевский в «Новых началах».

[11] В четырех местах, отмеченных нами звездочкой, числовые значения $P_{10}(x)$ указаны у Лобачевского не вполне точно. Мы везде приводим правильные значения $P_{10}(x)$.

[12] $\frac{18}{18+7} = \frac{18}{25} = 0,72.$

В «Новых началах» Лобачевский дает более грубое приближение:

$$\frac{7}{7+3} = 0,7.$$

[13] Лаплас приходит к этому интегралу путем следующих соображений (мы пользуемся обозначениями Лобачевского).

Пусть ошибки для каждого из r наблюдений могут быть с одинаковой вероятностью некоторыми из чисел $-a, -a+1, \ldots, 0, 1, \ldots, a$. Всего, таким образом, имеется $2a+1$ возможных значений для каждой ошибки, и вероятность того, что она примет данное значение, равна $\frac{1}{2a+1}$. Тогда число сочетаний, в которых сумма ошибок есть m, а число наблюдений r есть коэффициент при $e^{m\omega i}$ в разложении выражения

$$[e^{-a\omega i} + e^{-(a-1)\omega i} + \ldots + e^{-\omega i} + 1 + e^{\omega i} + \ldots + e^{a\omega i}]^r$$

в ряд по целым степеням $e^{\omega i}$.

Но

$$e^{-a\omega i} + e^{-(a-1)\omega i} + \ldots + e^{-\omega i} + 1 + e^{\omega i} + \ldots + e^{a\omega i} =$$

$$= e^{-a\omega i}\frac{e^{(2a+1)\omega i} - 1}{e^{\omega i} - 1} = \frac{(e^{(a+1)\omega i} - e^{-a\omega i})(e^{-\omega i} - 1)}{(e^{\omega i} - 1)(e^{-\omega i} - 1)} =$$

$$= \frac{e^{a\omega i} - e^{-(a+1)\omega i} - e^{(a+1)\omega i} + e^{-a\omega i}}{2 - 2\cos\omega} =$$

$$= \frac{\cos a\omega - \cos(a+1)\omega}{1 - \cos\omega} = \frac{\sin\frac{2a+1}{2}\omega}{\sin\frac{\omega}{2}}.$$

Поэтому наше разложение имеет вид

$$\left(\frac{\sin\frac{2a+1}{2}\omega}{\sin\frac{\omega}{2}}\right)^r=\sum_{k=0}^{\infty}C_r(k)\cos k\omega.$$

Но коэффициенты этого тригонометрического ряда определяются соотношением

$$C_r(m)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos m\omega\left(\frac{\sin\left(a+\frac{1}{2}\right)\omega}{\sin\frac{\omega}{2}}\right)^r d\omega,$$

что и является интегралом, применяющимся Лапласом.

[14] Формула верна, конечно, только в качестве асимптотической при $a\to\infty$.

[15] Лобачевский здесь слишком рано полагает $a=\infty$. В формуле (12) при $a=\infty$ обе стороны обращаются в нуль.

Положив $m=rax$, имеем:

$$\frac{1}{(2a+1)^r}C_r(m)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos(raxz)}{(2a+1)^r}\left(\frac{\sin\left(a+\frac{1}{2}\right)\omega}{\sin\frac{\omega}{2}}\right)^r d\omega.$$

Обозначив $a\omega=z$, получим:

$$\frac{1}{(2a+1)^r}C_r(m)=\frac{1}{\pi a}\int_0^{a\pi}\frac{\cos(rxz)}{2^r a^r\left(1+\frac{1}{2a}\right)^r}\left(\frac{\sin\left(a+\frac{1}{2}\right)\frac{z}{a}}{\sin\frac{z}{2a}}\right)^r dz=$$

$$=\frac{1}{\pi a}\int_0^{a\pi}\cos(rxz)\frac{\sin^r\left(1+\frac{2}{a}\right)z}{\left(1+\frac{1}{2a}\right)^r}\cdot\frac{1}{2^r a^r\sin^r\frac{z}{2a}}\,dz.$$

При помощи этого соотношения можно показать, что в случае $r>1$

$$\lim_{a\to\infty}\frac{C_r(m)}{(2a+1)^r}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\cos(rzx)\left(\frac{\sin z}{z}\right)^r dz$$

равномерно относительно m, находящегося, как было с самого начала предположено, в пределах

$$-ra\leqslant m\leqslant +ra.$$

Таков точный смысл, который надо приписать формуле (12) для того, чтобы из нее можно было вывести, что при $r > 1$

$$\lim_{a \to \infty} P_r(m) = \frac{2r}{\pi} \int_0^x dx \int_0^\infty \cos(rzx) \left(\frac{\sin z}{z}\right)^r dz.$$

Отсюда естественно заключить, что во второй задаче с непрерывно и равномерно на отрезке $[-1, +1]$ распределенными слагаемыми δ_i имеет место формула

$$P_r(x) = \frac{2r}{\pi} \int_0^x dx \int_0^\infty \cos(rzx) \left(\frac{\sin z}{z}\right)^r dz,$$

которая после замены порядка интегрирования, не вызывающей сомнений при $r > 1$, превращается в формулу Лобачевского (13).

[16] Формула (2) вместе с уточненной, в соответствии с предыдущим примечанием, формулой (12) дает:

$$\int_0^\infty \cos(rzx) \left(\frac{\sin z}{z}\right)^r dz =$$

$$= \lim_{a \to \infty} \left\{ \frac{\pi a}{(2a+1)^r} \sum \frac{(-1)^\lambda r^{\infty \lambda}}{(r-1)^{\infty r-1} \lambda^{\infty \lambda}} [(r-2\lambda)a + rax + r - 1 - \lambda]^{\infty r-1} \right\} =$$

$$= \lim_{a \to \infty} \left\{ \frac{\pi}{2^r \left(1 + \frac{1}{2a}\right)^r} \sum \frac{(-1)^\lambda r^{\infty \lambda}}{(r-1)^{\infty r-1} \lambda^{\infty \lambda}} \left[r - 2\lambda + rx + \frac{r-1-\lambda}{a} \right]^{\infty r-1} \right\},$$

откуда уже легко получается формула (14).

В журнале Крелля в (14) опечатка: вместо 2^r поставлено 2^{r-1}. Знак $\pm$ перед x поставлен Лобачевским потому, что в левую часть x входит под знаком косинуса, и поэтому обе части равенства являются четными функциями x.

[17] В подлиннике здесь пропущено несколько слов. Напечатано только: «Le signe qui exprime ici la somme, se rapportant à toutes les valeurs de λ, jusqu'aux quantités sous l'exposant $r - 1$», что не имеет ясного смысла.

[18] См. La Place — «Théorie analytique des probabilités», seconde édition, Paris, 1814, стр. 157—169.

[19] См. формулу для $P_r(x)$ на стр. 339 наст. тома.

[20] В подлиннике: «от $\lambda = 0$ до степеней отрицательных чисел».

[21] Положив в (14) $r=1$, получим [так как правая часть при $r=1$ равна $C_1(m)=1$] при любом x

$$\int_0^\infty \cos zx \frac{\sin z}{z}\,dz = \frac{\pi}{2}.$$

В самом деле, как известно,

$$\int_0^\infty \cos zx \frac{\sin z}{z}\,dz = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \text{ при } |x|<1, \\ \frac{\pi}{4} \text{ при } |x|=1, \\ 0 \text{ при } |x|>1. \end{cases}$$

Согласно определению у Лобачевского $|x|\leqslant 1$, так как $|m|\leqslant|ra|$. Но, как было уже указано в примечаниях [15] и [16], вывод формулы (14) для случая $r=1$ встречает некоторые затруднения. На самом деле оказывается, что она верна в случае $r=1$ лишь при $|x|<1$. Остается неясным, каким образом Лобачевский получает интеграл

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

из формулы (15).

ИСТОРИКО-БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ О СОЧИНЕНИИ «ВЕРОЯТНОСТЬ СРЕДНИХ РЕЗУЛЬТАТОВ, ПОЛУЧЕННЫХ ИЗ ПОВТОРНЫХ НАБЛЮДЕНИЙ»

Сочинение было напечатано в 1842 году на французском языке в журнале Крелля «Journal für die reine und angewandte Mathematik» в 24 томе под номером 13 на стр. 164—170. Название работы Лобачевского: «Probabilité des résultats moyens tirés d'observations répétées».

После заглавия стоит (в скобках) фамилия автора: «Par Mr. *Lobatschewsky*, recteur de l'université de Cazan».

Эта работа в дальнейшем не переиздавалась и на русском языке появляется впервые (в переводе А. Н. Хованского).

Сочинение «Вероятность средних результатов» является переработанным переводом ст. 164—165 его сочинения «Новые начала геометрии».

Статьи 164—165 «Новых начал» были напечатаны в I книжке «Ученых записок Казанского университета» за 1838 год, а сочинение «Вероятность средних результатов» вышло в свет только в 1842 году. Такой разрыв объясняется тем, что сочинение пролежало в редакции журнала Крелля более трех лет: Лобачевский отправил его для помещения в журнале почти одновременно с соответствующим текстом «Новых начал». В издании «Обозрение преподаваний в императорском Казанском университете» [1]) помещена «Краткая историческая записка о состоянии Казанского университета за 1837/38 и 1838/39 академический год», в которой между прочим говорится:

«*Ординарный профессор Лобачевский* напечатал в ученых записках Казанского университета новые начала геометрии, решение прямолинейных треугольников [2]) и решение прямоугольных сферических треугольников, отправил для помещения в журнале, издаваемом г. Креллем, статью: Sur la probabilité des resultats moyens, tirés des observations répétées».

Шесть опечаток, имевшихся в соответствующем тексте «Новых начал», исправлены в тексте французской статьи, но зато добавлены

---

1) Казань, 1839, приложение. Цитируемый текст воспроизведен в сборнике Л. Б. Модзалевского «Материалы для биографии Н. И. Лобачевского», изд. АН СССР, М. — Л., 1948, на стр. 402—403 (документ № 431).

2) Глава «Решения прямолинейных треугольников» сочинения «Новые начала геометрии» и содержит ст. 164—165, составившие содержание сочинения «Вероятность средних результатов наблюдений».

пять новых. Если учесть при этом, что французский текст сокращен по сравнению с текстом «Новых начал», то следует признать, что Креллевский журнал, считавшийся тогда одним из лучших математических журналов, не уступал по числу допускавшихся опечаток казанским «Ученым запискам». Эта замена одних опечаток другими лишний раз доказывает, что их не следует ставить в вину самому Лобачевскому: очевидно, что в рукописи перевода большинство опечаток «Ученых записок» было исправлено.

Насколько нам известно, печатных отзывов на статью «Вероятность средних результатов» не было. Только Биеренс де Хаан в своих известных таблицах определенных интегралов [1]) указывает, что два из них

$$\int \frac{\sin bq\,x}{x}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^b dx = \frac{1}{2}\pi\left\{1 - \frac{1}{2^{b-1}\,1^{b/1}} \sum_0^{\frac{a-bq}{2}} (-1)^n \frac{b^{n/-1}}{1^{n/1}} (b - bq - 2n)^b\right\},$$

$$\int \cos bqx \left(\frac{\sin x}{x}\right)^b dx = \frac{\pi}{2^{b-1}} \sum_0^{\frac{a\pm bq}{2}} (-1)^n \frac{b^{n/-1}}{1^{b/1}\,1^{n/1}} (b \pm q - 2n)^{b-1}$$

(помещенные в таблице 202 под номерами 6 и 7) извлечены из работы Лобачевского «Probabilité...» (это — формулы 15 и 14 Лобачевского) [2]). Недавно появилась статья В. В. Гнеденко «О работах Н. И. Лобачевского по теории вероятностей» [3]), посвященная этому сочинению.

Рукописи Лобачевского, как и почти всех его сочинений, не сохранилось. В геометрическом кабинете Казанского университета сохранилось несколько отдельных листов с черновыми записями Лобачевского. На одном из них, написанном, очевидно, на части бланка университетского диплома, имеются записи карандашом — вычисления вероятностей $B_n(x)$, вошедшие в ст. 165 «Новых начал геометрии» и в работу «Вероятность средних результатов». Снимок этого листка помещен в настоящем томе.

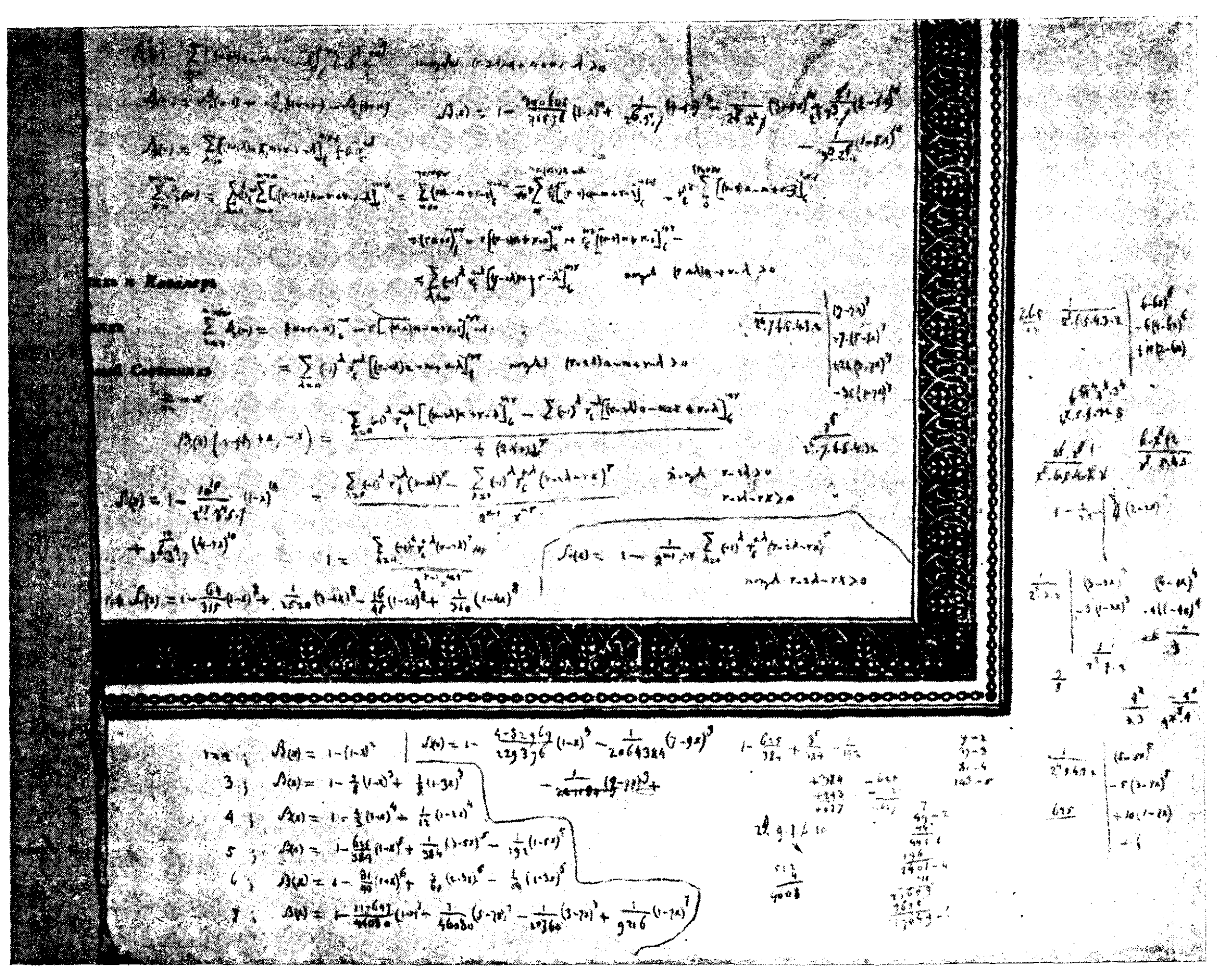
В настоящем издании сочинение Лобачевского сопровождается примечаниями, составленными А. Н. Колмогоровым (примечания [14], [15], [16], [21] и частично [4], [17]) и А. Н. Хованским (остальные).

---

1) Bierens de Haan — Tables d'intégrales définies. Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen (Amsterdam, Deal IV, 1858, стр. XXXI + 572.

2) Во втором интеграле можно взять любой из двух знаков.

3) «Историко-математические исследования», вып. II, Гостехиздат, М. — Л., 1949, стр. 129—136.



Записи Н. И. Лобачевского, относящиеся к вычислениям вероятностей, помещенным в сочинениях «Новые начала геометрии» и «Вероятность средних результатов, полученных из повторных наблюдений». (Написано карандашом, очевидно, на части бланка университетского диплома. Хранится в геометрическом кабинете Казанского университета.)

К стр. 349.

УСЛОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ДВИЖЕНИЯ И ПОЛОЖЕНИЕ ГЛАВНЫХ ОСЕЙ В ТВЕРДОЙ СИСТЕМЕ



ВВОДНАЯ СТАТЬЯ И КОММЕНТАРИИ
Н.И. ИДЕЛЬСОНА

УСЛОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ДВИЖЕНИЯ И ПОЛОЖЕНИЕ ГЛАВНЫХ ОСЕЙ В ТВЕРДОЙ СИСТЕМЕ[1])

---

[1]) Опубликовано в «Ученых записках Московского университета», ч. VIII, февраль 1835 г., стр. 169—190. В перечне сочинений Лобачевского, помещенном в I томе настоящего издания (стр. 21), в названии сочинения допущена ошибка: после слова *«осей»* стоит ненужное слово *«обращения»*, отсутствующее в подлиннике. Эта же ошибка имеется во многих библиографических указателях, например, в списке изданий сочинений Н. И. Лобачевского, приводимом Л. Б. Модзалевским в сборнике «Материалы для биографии Н. И. Лобачевского», изд. АН СССР, М.—Л., 1948.

ОСНОВНЫЕ РАБОТЫ ПО ВОПРОСАМ КИНЕМАТИКИ И ДИНАМИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА, ПРЕДШЕСТВОВАВШИЕ СОЧИНЕНИЮ ЛОБАЧЕВСКОГО

Сочинение Лобачевского «Условные уравнения для движения и положение главных осей в твердой системе» содержит оригинальные и глубоко задуманные доказательства двух основных положений теоретической механики. Первая часть сочинения относится к кинематике системы точек, расстояния между которыми остаются неизменными при ее движении; здесь выводится основная теорема Эйлера, утверждающая, что произвольное бесконечно малое перемещение такой системы приводится к бесконечно малому поступательному перемещению и к бесконечно малому вращению вокруг мгновенной оси вращения. Вторая часть сочинения, совершенно независимая от первой, принадлежит к тому разделу механики, который носит теперь название «геометрии масс»; здесь Лобачевский доказывает существование для любой системы материальных точек трех взаимно перпендикулярных осей — главных осей тензора инерции данной системы.

Оба эти положения, лежащие в основе кинематики и динамики твердого тела, были установлены в XVIII в. в работах Даламбера, Эйлера и Лагранжа. Лобачевский ссылается на некоторые из этих работ. Поэтому целесообразно представить о них краткую историческую справку.

Даламбер

Общие принципы составления уравнений движения любой материальной системы под действием каких угодно сил были установлены Даламбером в его знаменитом «Трактате по динамике» (1743) [1]; через несколько лет, отправляясь от весьма актуальной тогда астрономической проблематики, именно от теории прецессии и нутации земной оси в системе ньютоновского тяготения, Даламбер дал чрезвычайно важную работу: «О предварении равноденствий» [2]. Для истории меха-

[1] D'Alembert — Traité de Dynamique, 1-е изд., 1743; 2-е изд., 1758. Русский перевод: Даламбер — Динамика, Гостехиздат, М. — Л., 1950.

[2] D'Alembert — Recherches sur la précession des équinoxes et sur la nutation de l'axe de la Terre dans le Système Newtonien, 1749.

ники она существенна тем, что в ней были впервые выведены все шесть дифференциальных уравнений движения твердого тела; в три уравнения второй группы — уравнения вращения системы вокруг ее центра инерции — естественно вошли и величины, эквивалентные моментам и произведениям инерции, в современной терминологии, — но с тем существенным отличием, что Даламбер относил уравнения движения к неподвижным осям, в силу чего все эти величины входили как переменные в уравнения вращения. Вопроса о свободном вращении твердого тела при отсутствии внешних сил Даламбер в этой работе не рассматривал, поскольку в ней была поставлена и решена задача о вращении Земли в заданном поле сил притяжения тела Земли Солнцем и Луной; однако впоследствии, в одной работе 1768 г. [1]), когда вопрос о свободном вращении и об осях, вокруг которых такое вращение возможно, приобрел существенную важность в динамике твердого тела, Даламбер напоминал и подчеркивал, что его работа о предварении равноденствий от 1749 г. «содержит все принципы, необходимые для того, чтобы определить в общем случае законы движения тела произвольной формы». Но только в этой работе 1768 г. Даламбер развил полную теорию главных осей инерции и получил характеристическое уравнение третьей степени, корнями которого определяются направления этих осей.

Эйлер

Цикл работ Эйлера по механике твердого тела начинается с мемуара 1750 г. «Открытие нового принципа механики» [2]). Здесь впервые дан чисто кинематический анализ задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки и доказана фундаментальная теорема о распределении скоростей точек системы: оно оказывается таким, как если бы система вращалась в данный момент вокруг некоторой оси, проходящей через неподвижную точку, — т. е. именно та теорема, которой посвящена первая часть мемуара Лобачевского. К проблемам динамики твердого тела Эйлер подошел несколько позже, в мемуаре 1760 г. «О движении произвольного твердого тела, вращающегося вокруг подвижной оси» [3]). Методическое значение этой работы чрезвычайно велико, прежде всего, потому, что здесь Эйлер впервые перешел к осям, неиз-

---

[1]) D'Alembert — Recherches sur les axes de rotation d'un corps de figure quelconque, qui n'est animé par aucune force accélératrice (Opusc. Mathem., т. IV, 1768, стр. 1—31).

[2]) L. Euler — Découverte d'un nouveau principe de Mécanique. Hist. Acad. de Berlin, 1750, стр. 185—217; особенно стр. 198—205.

[3]) L. Euler — Du mouvement d'un corps solide quelconque, lorsqu'il tourne autour d'un axe mobile. Hist. Acad. de Berlin, 1760, стр. 176—227; особенно стр. 212—213.

менно связанным с твердым телом, в силу чего те величины, которые в уравнениях Даламбера являлись переменными, теперь превратились в постоянные. Здесь же в полном объеме рассмотрен и вопрос о свободных осях вращения [1]) и доказана теорема: «Какова бы ни была форма тела, можно всегда указать в нем такую ось, проходящую через центр тяжести, вокруг которой тело может вращаться свободно и непрерывным движением»; вслед за этим Эйлер выводит то кубическое уравнение, от которого зависит определение осей свободного вращения [2]). Наконец, еще через пять лет Эйлер опубликовал знаменитый трактат: «Теория движения твердых или жестких тел» [3]), в котором кинематика и динамика твердого тела представлены, в основном, в том самом виде, в котором они излагаются и по настоящее время.

Лагранж

Аналитическая механика Лагранжа [4]) в каждом из ее разделов представляет собой гармоническое сочетание всех результатов, полученных в предыдущем развитии науки, с новыми, порою грандиозными концепциями ее автора. Это относится и к обеим интересующим нас здесь задачам кинематики неизменяемой системы и геометрии масс. Первая из них трактуется в двух разделах «Аналитической механики»: «Свойства равновесия по отношению к вращательному движению» [5]) и «О равновесии твердого тела конечной величины и любой формы, все точки которого находятся под действием любых сил» [6]). Таким образом, оба эти вывода соподчинены задачам статики: Лагранж ищет здесь те выражения виртуальных перемещений жесткой системы, которые, в сочетании с основным началом статики, могут обеспечить равновесие системы при тех или иных распределениях действующих сил. Тем не менее оба эти вывода представляют независимый и выдаю-

---

[1]) Впрочем, самое открытие этих осей принадлежит не Даламберу, не Эйлеру а И. Сегнеру (1704—1777), изобретателю «Сегнерова колеса», обратившему внимание на их значение в 1755 г. (Joh. Segner — Specimen Theoriae Turbinum).

[2]) Вопрос о приоритете Даламбера или Эйлера здесь все же остается довольно спорным, так как Даламбер в работе, опубликованной уже в 1761 г., дал совершенно корректную формулировку условий, необходимых и достаточных для того, чтобы данная ось могла быть осью свободного вращения (D'Alembert — Du mouvement d'un corps de figure quelconque animé par des forces quelconques. Opusc. Math., t. I, 1761, стр. 74—103). Однако полный анализ всей проблемы выполнен Даламбером только в работе 1768 г., отмеченной выше.

[3]) L. Euler — Theoria Motus Corporum solidorum seu rigidorum. Rostock, 1765.

[4]) J. Lagrange — Mecanique Analytique, изд. 1787 и 1813. Русский перевод Ж. Лагранж — Аналитическая механика, пер. под ред. Л. Г. Лойцянского и А. И. Лурье, 2-е изд., т. I—II, Гостехиздат, М. — Л., 1950.

[5]) См. русский перевод, т. I, стр. 72—83.

[6]) Там же, стр. 227—233.

щийся интерес. Лобачевский в своей работе исходит от второго лагранжева доказательства, но придает ему существенно бо́льшую общность и полноту. Действительно, Лагранж рассматривал «большое количество расположенных друг за другом точек» неизменяемой системы и обозначал их координаты через

$$\begin{gathered} x,\ y,\ z; \\ x+dx,\ y+dy,\ z+dz; \\ x+2dx+d^2x,\ y+2dy+d^2y,\ z+2dz+d^2z; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{gathered}$$

Таким образом, символу d придается здесь значение бесконечно малого приращения координаты; но в то же время Лагранж применяет к нему и схемы исчисления конечных разностей, именно формулу Ньютона

$$x_k=(1+d)^k x.$$

Расстояния между всеми точками рассматриваемой совокупности должны быть неизменными при движении; обозначая соответствующие приращения координат через δx, δy, δz и учитывая очевидную здесь коммутативность операторов d и δ, Лагранж приходит к «условным уравнениям» для приращений δx, δy, δz:

$$\left.\begin{aligned} dx\,d\,\delta x+dy\,d\,\delta y+dz\,d\,\delta z&=0,\\ d^2x\,d^2\,\delta x+d^2y\,d^2\,\delta y+d^2z\,d^2\,\delta z&=0,\\ d^3x\,d^3\,\delta x+d^3y\,d^3\,\delta y+d^3z\,d^3\,\delta z&=0.\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Все эти уравнения заключены в одной общей формуле [1])

$$d^nx\,d^n\,\delta x+d^ny\,d^n\,\delta y+d^nz\,d^n\,\delta z=0 \tag{1'}$$

или

$$\delta\,[(d^nx)^2+(d^ny)^2+(d^nz)^2]=0. \tag{2}$$

Для того чтобы вывести те значения δx, δy, δz в функции от x, y, z, которые могли бы удовлетворять условным уравнениям (2) при любом n, Лагранж применяет следующее рассуждение. Символ d, говорит он, можно понимать теперь в смысле дифференциала координаты; примем одну из координат, например x, за независимую переменную [2]); тогда все дифференциалы от x порядка выше первого обратятся в нуль; уравнения (1) и (2) будут заключать только по два члена; второе и третье уравнения группы (1) после определения $d^2\,\delta y$ из второго, его дифференцирования (т. е. применения оператора d) и подстановки

---

[1]) См. сноску [4]) на предыдущей странице, стр. 217 и 229 I тома русского перевода.

[2]) По старинной терминологии это выражается словами «примем dx постоянным».

в третье уравнение, приводят к основной формуле [1])

$$d\,\frac{d^2\,\delta z}{d^2 y} = 0. \tag{3}$$

После двух интегрирований эта формула дает:

$$d\,\delta z = \alpha\,dy - \beta\,dx,$$

где α и $\beta\,dx$ — две произвольные постоянные.

Подставляя выражение $d^2\,\delta z$ во второе уравнение группы (1) и снова дважды интегрируя, найдем

$$d\,\delta y = -\alpha\,dz + \gamma\,dx,$$

где $\gamma\,dx$ есть третья произвольная постоянная.

Подстановкой обоих полученных выражений в первое уравнение этой же группы получим

$$d\,\delta x = \beta\,dz - \gamma\,dy.$$

Интегрируя еще раз и обозначая через a, b, c три новые произвольные постоянные, найдем окончательно:

$$\left.\begin{aligned} \delta x &= a + \beta z - \gamma y,\\ \delta y &= b + \gamma x - \alpha z,\\ \delta z &= c + \alpha y - \beta x. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

В этих формулах и содержится теорема о перемещениях жесткой системы, данная в 1750 г. Эйлером. От вывода их, предложенного Лагранжем, остается впечатление некоторой искусственности, именно потому, что, трактуя символы d как дифференциалы, Лагранж, как уже отмечено, применяет к ним и правила исчисления конечных разностей. Несомненно, это обстоятельство имеет в виду Лобачевский, начиная свое исследование следующими словами:

«Лагранж в Аналитической Механике выводит условные уравнения [2]), которые первый дал Эйлер, для движения сплошного твердого тела, полагая бесконечно малые расстояния вещественных точек постоянными и принимая, для простоты решения, тоже постоянным дифференциал одной из трех перпендикулярных друг к другу координат, которыми определяется положение точки в теле» [3]).

В разделе «Аналитической механики», озаглавленном «Свойства неподвижных осей вращения свободного тела любой формы» [4])

---

[1]) Ж. Лагранж — Аналитическая механика, изд. 2-е, Гостехиздат, М. — Л., 1950, т. I, стр. 228.

[2]) То-есть уравнения (4).

[3]) Стр. 357 наст. тома.

[4]) См. сноску [1]), стр. 357—369 книги Лагранжа.

Лагранж дает теорию осей свободного вращения. Для современного читателя, привыкшего к изложению динамики твердого тела в эйлеровых осях, неизменно связанных с телом, и к конструкции эллипсоида инерции по Пуансо [1]) вывод Лагранжа представляется необычайно сложным. В общем, Лагранж довольно близко следует за рассуждениями Даламбера в упомянутом выше мемуаре 1768 г. Здесь, прежде всего, составляются выражения проекций вектора момента количеств движения твердого тела на неподвижные «даламберовы» оси; в случае равенства нулю моментов действующих сил, указанные проекции постоянны. Но входящие в них выражения моментов и произведений инерции тела по отношению к неподвижным осям (или плоскостям) — переменные. Задача состоит в определении положения оси, вокруг которой тело могло бы вращаться с постоянной угловой скоростью; Лагранж принимает за неизвестные отношения двух направляющих косинусов этой оси к третьему, и, исключая одно из этих отношений из тех трех уравнений, к которым в данном случае приводятся три уравнения моментов, получает для другого отношения косинусов кубическое уравнение; исследование этого уравнения и дает полное решение задачи о свободных осях.

Лобачевский был, повидимому, первым математиком, обратившим внимание на то, что такой метод определения осей свободного вращения, подчиняет задачу, связанную только с распределением масс данного тела, сложному динамическому анализу. «Между тем, — говорит он, — геометрическое свойство этих осей может быть доказано без помощи Механики и даже Дифференциального Исчисления» [2]).

Таким образом, предвосхищая метод Пуансо, Лобачевский открывает здесь новую главу теоретической механики, ту именно, которая получила название «геометрии масс». В этом — историческое значение второй части сочинения Лобачевского.

Детальный анализ этого сочинения дан в комментарии [3]).

---

[1]) Poinsot — Théorie nouvelle de la rotation des corps, 1852.

[2]) Стр. 365 наст. тома.

[3]) Стр. 369—378 наст. тома.

УЧЕНЫЯ

ЗАПИСКИ

ИМПЕРАТОРСКАГО

МОСКОВСКАГО УНИВЕРСИТЕТА.

ГОДЪ ВТОРОЙ.

ЧАСТЬ ВОСЬМАЯ.

МОСКВА.

Въ Университетской Типографіи.

1 8 3 5.

Титульный лист 8-й части «Ученых записок Московского университета», в которой было напечатано сочинение «Условные уравнения для движения и положение главных осей в твердой системе».

К стр. 357.

УЧЕНЫЯ ЗАПИСКИ

ИМПЕРАТОРСКАГО МОСКОВСКАГО УНИВЕРСИТЕТА.

1835. Февраль, № VIII.

I. НАУКИ.

А. МЕХАНИКА.

1. Условныя уравненія для движенія, и положеніе главныхъ осей въ твердой системѣ.

Профессора Лобачевскаго.

Лагранжъ въ Аналитической Механикѣ выводитъ условныя уравненія, которыя первый далъ* *Эйлеръ*, для движенія сплошнаго твердаго тѣла, полагая безконечно малыя разстоянія вещественныхъ точекъ постоянными и принимая, для простоты рѣшенія, тоже постояннымъ дифференціалъ одной изъ трехъ перпендикулярныхъ другъ къ другу координатъ, ко-

Первая страница оригинального издания сочинения «Условные уравнения для движения и положение главных осей в твердой системе»
(169-я стр. 8-й части «Ученых записок Московского университета»).

УСЛОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ДВИЖЕНИЯ И ПОЛОЖЕНИЕ ГЛАВНЫХ ОСЕЙ В ТВЕРДОЙ СИСТЕМЕ

[I]*

1835 VIII 169 ‖ *Лагранж* в Аналитической Механике выводит условные уравнения, которые первый дал *Эйлер*, для движения сплошного твердого тела, полагая бесконечно малые расстояния вещественных точек постоянными и принимая, для простоты решения, тоже постоянным дифференциал одной из трех перпендикулярных друг к другу 170 координат, ко|торыми определяется положение точки в теле (Mécanique analytique, par Lagrange. 1811. T. I. p. 108). Можно к таким уравнениям притти, хотя бы число вещественных точек в твердой системе было ограничено, а расстояния между ними конечные.

Назначаем, по выбору произвольному, в каком порядке вещественные точки твердой системы должны быть рассматриваемы одна за другой. В этом порядке называем x, y, z перпендикулярные друг к другу координаты одной точки; x', y', z' — следующей за нею; x'', y'', z'' — третьей; x''', y''', z''' — четвертой. Пусть по известному принятому означению в вычислении приращений

$$x'-x=\Delta x,\quad x''-x'=\Delta x+\Delta^2 x,\quad x'''-x''=\Delta x+2\,\Delta^2 x+\Delta^3 x,$$

так и для других координат y, z. Расстояния между вещественными точками в твердой системе не должны изменяться от движения, а следовательно значение их квадратов

$$\begin{gathered}
(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2,\\
(x''-x')^2+(y''-y')^2+(z''-z')^2,\\
(x''-x)^2+(y''-y)^2+(z''-z)^2,\\
(x'''-x'')^2+(y'''-y'')^2+(z'''-z'')^2,\\
(x'''-x')^2+(y'''-y')^2+(z'''-z')^2,\\
(x'''-x)^2+(y'''-y)^2+(z'''-z)^2
\end{gathered}$$

171 |

* Разделение сочинения Лобачевского на части I и II сделано нами.

не зависит от времени. Вставляя сюда

$$x' = x + \Delta x,$$
$$x'' = x + 2\,\Delta x + \Delta^2 x,$$
$$x''' = x + 3\,\Delta x + 3\,\Delta^2 x + \Delta^3 x,$$

подобным образом и для других координат y, z, выражая к тому знаком δ впереди то изменение бесконечно малое, которое происходит в движении, должны почитать

$$\delta\,(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2) = 0,$$
$$\delta\,[(\Delta x + \Delta^2 x)^2 + (\Delta y + \Delta^2 y)^2 + (\Delta z + \Delta^2 z)^2] = 0,$$
$$\delta\,[(2\,\Delta x + \Delta^2 x)^2 + (2\,\Delta y + \Delta^2 y)^2 + (2\,\Delta z + \Delta^2 z)^2] = 0\,^*,$$
$$\delta\,[(\Delta x + 2\,\Delta^2 x + \Delta^3 x)^2 + (\Delta y + 2\,\Delta^2 y + \Delta^3 y)^2 + (\Delta z + 2\,\Delta^2 z + \Delta^3 z)^2] = 0,$$
$$\delta\,[(2\,\Delta x + 3\,\Delta^2 x + \Delta^3 x)^2 + (2\,\Delta y + 3\,\Delta^2 y + \Delta^3 y)^2 + (2\,\Delta z + 3\,\Delta^2 z + \Delta^3 z)^2] = 0,$$
$$\delta\,[(3\,\Delta x + 3\,\Delta^2 x + \Delta^3 x)^2 + (3\,\Delta y + 3\,\Delta^2 y + \Delta^3 y)^2 + (3\,\Delta z + 3\,\Delta^2 z + \Delta^3 z)^2] = 0.$$

Второе и третье с помощию первого из этих уравнений дают два таких:

$$\delta\,(\Delta x\,\Delta^2 x + \Delta y\,\Delta^2 y + \Delta z\,\Delta^2 z) = 0,$$
$$\delta\,(\Delta^2 x^2 + \Delta^2 y^2 + \Delta^2 z^2) = 0,$$

179 |которыми пользуясь, находим из трех остальных

$$\delta\,(\Delta x\,\Delta^3 x + \Delta y\,\Delta^3 y + \Delta z\,\Delta^3 z) = 0,$$
$$\delta\,(\Delta^2 x\,\Delta^3 x + \Delta^2 y\,\Delta^3 y + \Delta^2 z\,\Delta^3 z) = 0,$$
$$\delta\,(\Delta^3 x^2 + \Delta^3 y^2 + \Delta^3 z^2) = 0;$$

идя той же дорогой, можно бы доказать вообще для целых чисел n, m, что

$$\delta\,(\Delta^n x\,\Delta^m x + \Delta^n y\,\Delta^m y + \Delta^n z\,\Delta^m z) = 0. \tag{1}$$

Лагранж замечает, что условие для движения твердого тела выражается дифференциальным уравнением

$$d^n x\, d^n\,\delta x + d^n y\, d^n\,\delta y + d^n z\, d^n\,\delta z = 0,$$

или иначе

$$\delta\,(d^n x^2 + d^n y^2 + d^n z^2) = 0,$$

и где, следовательно, как это показывает уравнение (1), квадраты дифференциалов от координат могут быть заменены произведением двух приращений какого угодно порядка.

---

* В оригинале начало этой формулы ошибочно напечатано так:

$$\delta\,[(\Delta x + \Delta^3 x)^2 + \ldots$$

Берем еще тожественные уравнения

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\delta(\Delta x^2)}{\Delta x^2}+\frac{\delta(\Delta^2 x^2)}{\Delta^2 x^2}-2\,\frac{\delta(\Delta x\,\Delta^2 x)}{\Delta x\,\Delta^2 x}=0,\\
&\frac{\delta(\Delta^2 x^2)}{\Delta^2 x^2}+\frac{\delta(\Delta^3 x^2)}{\Delta^3 x^2}-2\,\frac{\delta(\Delta^2 x\,\Delta^3 x)}{\Delta^2 x\,\Delta^3 x}=0,\\
&\frac{\delta(\Delta^3 x^2)}{\Delta^3 x^2}+\frac{\delta(\Delta x^2)}{\Delta x^2}-2\,\frac{\delta(\Delta^3 x\,\Delta x)}{\Delta^3 x\,\Delta x}=0.
\end{aligned}\right\}\qquad [1a]^{*}$$

173 | Основываясь на уравнениях (1), заключаем отсюда, что

$$\frac{\delta(\Delta y^2+\Delta z^2)}{\Delta x^2}+\frac{\delta(\Delta^2 y^2+\Delta^2 z^2)}{\Delta^2 x^2}-2\,\frac{\delta(\Delta y\,\Delta^2 y+\Delta z\,\Delta^2 z)}{\Delta x\,\Delta^2 x}=0,$$

$$\frac{\delta(\Delta^2 y^2+\Delta^2 z^2)}{\Delta x^2}+\frac{\delta(\Delta^3 y^2+\Delta^3 z^2)}{\Delta^3 x^2}-2\,\frac{\delta(\Delta^2 y\,\Delta^3 y+\Delta^2 z\,\Delta^3 z)}{\Delta x\,\Delta^3 x}=0,$$

$$\frac{\delta(\Delta^3 y^2+\Delta^3 z^2)}{\Delta^3 x^2}+\frac{\delta(\Delta y^2+\Delta z^2)}{\Delta x^2}-2\,\frac{\delta(\Delta y\,\Delta^3 y+\Delta z\,\Delta^3 z)}{\Delta x\,\Delta^3 x}=0,$$

которым уравнениям можем дать еще такой вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{\Delta^2 y}{\Delta^2 x}-\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)\left(\frac{\Delta^2\,\delta y}{\Delta^2 x}-\frac{\Delta\,\delta y}{\Delta x}\right)+\left(\frac{\Delta^2 z}{\Delta^2 x}-\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)\left(\frac{\Delta^2\,\delta z}{\Delta^2 x}-\frac{\Delta\,\delta z}{\Delta x}\right)=0,\\
&\left(\frac{\Delta^3 y}{\Delta^3 x}-\frac{\Delta^2 y}{\Delta^2 x}\right)\left(\frac{\Delta^3\,\delta y}{\Delta^3 x}-\frac{\Delta^2\,\delta y}{\Delta^2 x}\right)+\left(\frac{\Delta^3 z}{\Delta^3 x}-\frac{\Delta^2 z}{\Delta^2 x}\right)\left(\frac{\Delta^3\,\delta z}{\Delta^3 x}-\frac{\Delta^2\,\delta z}{\Delta^2 x}\right)=0,\\
&\left(\frac{\Delta^3 y}{\Delta^3 x}-\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)\left(\frac{\Delta^3\,\delta y}{\Delta^3 x}-\frac{\Delta\,\delta y}{\Delta x}\right)+\left(\frac{\Delta^3 z}{\Delta^3 x}-\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)\left(\frac{\Delta^3\,\delta z}{\Delta^3 x}-\frac{\Delta\,\delta z}{\Delta x}\right)=0.
\end{aligned}\right\}\qquad (2)$$

174 | Умножая первое из этих уравнений на $\Delta^2 x$ и разделяя на $\Delta x+\Delta^2 x$, получим

$$\Delta\,\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\Delta\,\frac{\Delta\,\delta y}{\Delta x}+\Delta\,\frac{\Delta z}{\Delta x}\cdot\Delta\,\frac{\Delta\,\delta z}{\Delta x}=0. \qquad (3)$$

Подобным образом, умножая второе из уравнений (2) на $\Delta^3 x$ и разделяя на $\Delta^2 x+\Delta^3 x$, находим

$$\Delta\,\frac{\Delta^2 y}{\Delta^2 x}\cdot\Delta\,\frac{\Delta^2\,\delta y}{\Delta^2 x}+\Delta\,\frac{\Delta^2 z}{\Delta^2 x}\cdot\Delta\,\frac{\Delta^2\,\delta z}{\Delta^2 x}=0. \qquad (4)$$

Из последнего в уравнениях (2) берем первый член

$$\left(\frac{\Delta^3 y}{\Delta^3 x}-\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)\left(\frac{\Delta^3\,\delta y}{\Delta^3 x}-\frac{\Delta\,\delta y}{\Delta x}\right)=$$

$$=\frac{\Delta(\Delta x\,\Delta^2 y-\Delta^2 x\,\Delta y)-(\Delta^2 x\,\Delta^3 y-\Delta^3 x\,\Delta^2 y)}{\Delta x\,\Delta^3 x}\times$$

$$\times\frac{\Delta(\Delta x\,\Delta^2\delta y-\Delta y\,\Delta^2\delta x)-(\Delta^2 x\,\Delta^3\delta y-\Delta^2 y\,\Delta^3\delta x)}{\Delta x\,\Delta^3 x}.$$

* Номера формул с литерами сделаны нами для удобства ссылок в комментарии.

Положив здесь для краткости

$$X = \Delta x^2 + \Delta x\, \Delta^2 x, \quad X' = \Delta^2 x^2 + \Delta^2 x\, \Delta^3 x, \qquad [4a]$$

продолжаем вычисление так:

$$\Delta x^3\, \Delta^3 x^3 \left(\frac{\Delta^3 y}{\Delta^3 x} - \frac{\Delta y}{\Delta x}\right)\left(\frac{\Delta^3 \delta y}{\Delta^3 x} - \frac{\Delta\, \delta y}{\Delta x}\right) =$$

$$= \left\{\Delta\left(X \Delta \frac{\Delta y}{\Delta x}\right) - X' \Delta \frac{\Delta^2 y}{\Delta^2 x}\right\}\left\{\Delta\left(X \Delta \frac{\Delta\, \delta y}{\Delta x}\right) - X' \Delta \frac{\Delta^2 \delta y}{\Delta^2 x}\right\}^* =$$

$$= \Delta\left(X \Delta \frac{\Delta y}{\Delta x}\right) \cdot \Delta\left(X \Delta \frac{\Delta\, \delta y}{\Delta x}\right) -$$

175 $$- X'\left\{\Delta \frac{\Delta^2 y}{\Delta^2 x} \cdot \Delta\left(X \Delta \frac{\Delta\, \delta y}{\Delta x}\right) + \Delta \frac{\Delta^2 \delta y}{\Delta^2 x} \cdot \Delta\left(X \Delta \frac{\Delta y}{\Delta x}\right)\right\} +$$

$$+ X'^2 \Delta \frac{\Delta^2 y}{\Delta^2 x} \cdot \Delta \frac{\Delta^2 \delta y}{\Delta^2 x}\,.$$

Потом

$$\Delta\left(X \Delta \frac{\Delta y}{\Delta x}\right) \cdot \Delta\left(X \Delta \frac{\Delta\, \delta y}{\Delta x}\right) =$$

$$= (X + \Delta X)^2\, \Delta^2 \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta^2 \frac{\Delta\, \delta y}{\Delta x} +$$

$$+ (X + \Delta X)\, \Delta X \left\{\Delta^2 \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta \frac{\Delta \delta y}{\Delta x} + \Delta \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta^2 \frac{\Delta\, \delta y}{\Delta x}\right\} +$$

$$+ \Delta X^2 \cdot \Delta \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta \frac{\Delta\, \delta y}{\Delta x} =$$

$$= X\,(X + \Delta X)\, \Delta^2 \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta^2 \frac{\Delta\, \delta y}{\Delta x} + \Delta X \cdot (X + \Delta X)\, \Delta\left(\Delta \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta \frac{\Delta\, \delta y}{\Delta x}\right) +$$

$$+ \Delta X^2 \cdot \Delta \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta \frac{\Delta\, \delta y}{\Delta x},$$

$$\Delta \frac{\Delta^2 y}{\Delta^2 x} \cdot \Delta\left(X \Delta \frac{\Delta\, \delta y}{\Delta x}\right) + \Delta \frac{\Delta^2 \delta y}{\Delta^2 x} \cdot \Delta\left(X \Delta \frac{\Delta y}{\Delta x}\right) =$$

$$= (X + \Delta X)\left[\Delta \frac{\Delta^2 y}{\Delta^2 x} \cdot \Delta^2 \frac{\Delta \delta y}{\Delta x} + \Delta^2 \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta \frac{\Delta^2 \delta y}{\Delta^2 x}\right] +$$

$$+ \Delta X \left[\Delta \frac{\Delta^2 y}{\Delta^2 x} \cdot \Delta \frac{\Delta \delta y}{\Delta x} + \Delta \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta \frac{\Delta^2 \delta y}{\Delta^2 x}\right].$$

---

* В оригинале в этой формуле вместо $\frac{\Delta^2 y}{\Delta^2 x}$ и $\frac{\Delta^2 \delta y}{\Delta^2 x}$ напечатано соответственно $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ и $\frac{\Delta \delta y}{\Delta x}$.

Заметим, что

$$\frac{\Delta^2 y}{\Delta^2 x} = \left(1 + \frac{\Delta x}{\Delta^2 x}\right) \Delta \frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\Delta y}{\Delta x}, \qquad [4b]$$

$$\Delta \frac{\Delta^2 y}{\Delta^2 x} = \left(1 + \frac{\Delta x}{\Delta^2 x} + \Delta \frac{\Delta x}{\Delta^2 x}\right) \Delta^2 \frac{\Delta y}{\Delta x} + \left(1 + \Delta \frac{\Delta x}{\Delta^2 x}\right) \Delta \frac{\Delta y}{\Delta x}, \qquad [4c]$$

$$\Delta \frac{\Delta^2 \delta y}{\Delta^2 x} = \left(1 + \frac{\Delta x}{\Delta^2 x} + \Delta \frac{\Delta x}{\Delta^2 x}\right) \Delta^2 \frac{\Delta \delta y}{\Delta x} + \left(1 + \Delta \frac{\Delta x}{\Delta^2 x}\right) \Delta \frac{\Delta \delta y}{\Delta x}.$$

176 | После чего

$$\Delta \frac{\Delta^2 y}{\Delta^2 x} \cdot \Delta^2 \frac{\Delta \delta y}{\Delta x} + \Delta \frac{\Delta^2 \delta y}{\Delta^2 x} \cdot \Delta^2 \frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

$$= 2\left(1 + \frac{\Delta x}{\Delta^2 x} + \Delta \frac{\Delta x}{\Delta^2 x}\right) \Delta^2 \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta^2 \frac{\Delta \delta y}{\Delta x} +$$

$$+ \left(1 + \Delta \frac{\Delta x}{\Delta^2 x}\right) \left(\Delta \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta^2 \frac{\Delta \delta y}{\Delta x} + \Delta^2 \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta \frac{\Delta \delta y}{\Delta x}\right) =$$

$$= \left(1 + 2\frac{\Delta x}{\Delta^2 x} + \Delta \frac{\Delta x}{\Delta^2 x}\right) \Delta^2 \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta^2 \frac{\Delta \delta y}{\Delta x} + \left(1 + \Delta \frac{\Delta x}{\Delta^2 x}\right) \Delta \left(\Delta \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta \frac{\Delta \delta y}{\Delta x}\right). \qquad [4d]$$

$$\Delta \frac{\Delta^2 y}{\Delta^2 x} \cdot \Delta \frac{\Delta \delta y}{\Delta x} + \Delta \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta \frac{\Delta^2 \delta y}{\Delta^2 x} =$$

$$= \left(1 + \frac{\Delta x}{\Delta^2 x} + \Delta \frac{\Delta x}{\Delta^2 x}\right) \left[\Delta \left(\Delta \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta \frac{\Delta \delta y}{\Delta x}\right) - \Delta^2 \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta^2 \frac{\Delta \delta y}{\Delta x}\right] +$$

$$+ 2\left(1 + \Delta \frac{\Delta x}{\Delta^2 x}\right) \Delta \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta \frac{\Delta \delta y}{\Delta x}. \qquad [4e]$$

Соединив всё вместе, получим

$$\Delta x^2 \Delta^3 \Delta^2 \left(\frac{\Delta^3 y}{\Delta^3 x} - \frac{\Delta y}{\Delta x}\right) \left(\frac{\Delta^3 \delta y}{\Delta^3 x} - \frac{\Delta \delta y}{\Delta x}\right) =$$

$$= \Delta^2 \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta^2 \frac{\Delta \delta y}{\Delta x} \left\{X(X + \Delta X) - X' \Delta X \frac{\Delta x}{\Delta^2 x} - XX' \left(1 + 2\frac{\Delta x}{\Delta^2 x} + \Delta \frac{\Delta x}{\Delta^2 x}\right)\right\} +$$

$$+ \Delta \left(\Delta \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta \delta y}{\Delta x}\right) \left\{(X + \Delta X) \left(\Delta X - X' - X' \Delta \frac{\Delta x}{\Delta^2 x}\right) -\right.$$

$$\left. - X' \Delta X \left(1 + \frac{\Delta x}{\Delta^2 x} + \Delta \frac{\Delta x}{\Delta^2 x}\right)\right\} +$$

177 |

$$+ \Delta \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta \frac{\Delta \delta y}{\Delta x} \left\{\Delta X^2 - 2X' \Delta X \left(1 + \Delta \frac{\Delta x}{\Delta^2 x}\right)\right\} +$$

$$+ X'^2 \Delta \frac{\Delta^2 y}{\Delta^2 x} \cdot \Delta \frac{\Delta^2 \delta y}{\Delta^2 x}.$$

Поставивши сюда z вместо y и складывая, находим, основываясь на уравнениях (2), (3), (4)

$$0=\left(\Delta^2\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\Delta^2\frac{\Delta\,\delta y}{\Delta x}+\Delta^2\frac{\Delta z}{\Delta x}\cdot\Delta^2\frac{\Delta\,\delta z}{\Delta x}\right)\times$$
$$\times\left\{X(X+\Delta X)-X'\Delta X\cdot\frac{\Delta x}{\Delta^2 x}-XX'\left(1+2\frac{\Delta x}{\Delta^2 x}+\Delta\frac{\Delta x}{\Delta^2 x}\right)\right\}. \quad [4f]$$

Здесь

$$X+\Delta X=\frac{X^2}{\Delta x^2}+\frac{XX'}{\Delta x\,\Delta^2 x},$$
$$1+2\frac{\Delta x}{\Delta^2 x}+\Delta\frac{\Delta x}{\Delta^2 x}=\frac{X}{\Delta x\,\Delta^3 x}+\frac{X\,\Delta^2 x}{\Delta x\,X'};$$

следовательно,

$$X(X+\Delta X)-X'\Delta X\frac{\Delta x}{\Delta^2 x}-XX'\left(1+2\frac{\Delta x}{\Delta^2 x}+\Delta\frac{\Delta x}{\Delta^2 x}\right)=$$
$$=X\left\{\frac{X^2}{\Delta x^2}-\frac{X'^2}{\Delta^2 x^2}+\frac{X'\,\Delta x}{\Delta^2 x}-\frac{XX'}{\Delta x\,\Delta^2 x}-\frac{X\,\Delta^2 x}{\Delta x}\right\}=$$
$$=\Delta x\,(\Delta x+\Delta^2 x)\,[(\Delta x+\Delta^2 x)^2-(\Delta^2 x+\Delta^3 x)^2-\Delta^2 x\,(\Delta x+2\,\Delta^2 x+\Delta^3 x)]=$$
$$=\Delta x\cdot(\Delta x+\Delta^2 x)\,(\Delta x+2\,\Delta^2 x+\Delta^3 x)\,(\Delta x-\Delta^2 x-\Delta^3 x).$$

Так как

$$\Delta^2\frac{\Delta y}{\Delta x},\quad \Delta^2\frac{\Delta\,\delta y}{\Delta x}$$

178 |содержат в знаменателях произведение

$$\Delta x\,(\Delta x+\Delta^2 x)^2\,(\Delta x+2\,\Delta^2 x+\Delta^3 x),$$

то необходимо

$$(\Delta x-\Delta^2 x-\Delta^3 x)\left(\Delta^2\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\Delta^2\frac{\Delta\,\delta y}{\Delta x}+\Delta^2\frac{\Delta z}{\Delta x}\cdot\Delta^2\frac{\Delta\,\delta z}{\Delta x}\right)=0. \quad (4')\,*$$

Пусть для краткости

$$\Delta^2\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\Delta^2\frac{\Delta\,\delta y}{\Delta x}+\Delta^2\frac{\Delta z}{\Delta x}\cdot\Delta^2\frac{\Delta\,\delta z}{\Delta x}=P.$$

Находим

$$P=\left(\frac{\Delta y''}{\Delta x''}-2\frac{\Delta y'}{\Delta x'}+\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)\left(\frac{\Delta\,\delta y''}{\Delta x''}-2\frac{\Delta\,\delta y'}{\Delta x'}+\frac{\Delta\,\delta y}{\Delta x}\right)+$$
$$+\left(\frac{\Delta z''}{\Delta x''}-2\frac{\Delta z'}{\Delta x'}+\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)\left(\frac{\Delta\,\delta z''}{\Delta x''}-2\frac{\Delta\,\delta z'}{\Delta x'}+\frac{\Delta\,\delta z}{\Delta x}\right),$$

* Номер формулы (4) у Лобачевского здесь повторяется.

или, основываясь на уравнении (3),

$$P = \left(\frac{\Delta y''}{\Delta x''} + \frac{\Delta y}{\Delta x}\right)\left(\frac{\Delta\,\delta y''}{\Delta x''} + \frac{\Delta\,\delta y}{\Delta x}\right) + \left(\frac{\Delta z''}{\Delta x''} + \frac{\Delta z}{\Delta x}\right)\left(\frac{\Delta\,\delta z''}{\Delta x''} + \frac{\Delta\,\delta z}{\Delta x}\right) - \\ - 2\,\frac{\Delta y'}{\Delta x'}\left(\frac{\Delta\,\delta y''}{\Delta x''} + \frac{\Delta\,\delta y}{\Delta x}\right) - 2\,\frac{\Delta z'}{\Delta x'}\left(\frac{\Delta\,\delta z''}{\Delta x''} + \frac{\Delta\,\delta z}{\Delta x}\right) - \\ - 2\,\frac{\Delta\,\delta y'}{\Delta x'}\left(\frac{\Delta y''}{\Delta x''} + \frac{\Delta y}{\Delta x}\right) - 2\,\frac{\Delta\,\delta z'}{\Delta x'}\left(\frac{\Delta z''}{\Delta x''} + \frac{\Delta z}{\Delta x}\right). \quad [4g]$$

179 Здесь

$$\frac{\Delta y'}{\Delta x'}\cdot\frac{\Delta\,\delta y}{\Delta x} + \frac{\Delta\,\delta y'}{\Delta x'}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\Delta z'}{\Delta x'}\cdot\frac{\Delta\,\delta z}{\Delta x} + \frac{\Delta\,\delta z'}{\Delta x'}\cdot\frac{\Delta z}{\Delta x} = \\ = 2\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta\,\delta y}{\Delta x} + \frac{\Delta z}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta\,\delta z}{\Delta x}\right) + \Delta\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta\,\delta y}{\Delta x} + \frac{\Delta z}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta\,\delta z}{\Delta x}\right) - \\ - \left(\Delta\,\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\Delta\,\frac{\Delta\,\delta y}{\Delta x} + \Delta\,\frac{\Delta z}{\Delta x}\cdot\Delta\,\frac{\Delta\,\delta z}{\Delta x}\right) = \\ = -2\,\frac{\Delta\,\delta x}{\Delta x} - \Delta\,\frac{\Delta\,\delta x}{\Delta x}.$$

После чего

$$P = \left(\frac{\Delta y''}{\Delta x''} + \frac{\Delta y}{\Delta x}\right)\left(\frac{\Delta\,\delta y''}{\Delta x''} + \frac{\Delta\,\delta y}{\Delta x}\right) + \left(\frac{\Delta z''}{\Delta x''} + \frac{\Delta z}{\Delta x}\right)\left(\frac{\Delta\,\delta z''}{\Delta x''} + \frac{\Delta\,\delta z}{\Delta x}\right) - \\ - 2\,\frac{\Delta\,\delta x}{\Delta x} - 2\,\frac{\Delta\,\delta x'}{\Delta x'} - \Delta\,\frac{\Delta\,\delta x}{\Delta x} - \Delta\,\frac{\Delta\,\delta x'}{\Delta x'}. \quad [4h]^*$$

Отсюда следует, что значение P не переменяется, когда вместо координат x, y, z ставим x', y', z', делая то же наоборот. В таком случае уравнение (4) должно давать

$$(\Delta x - \Delta^2 x - \Delta^3 x)\,P = (x''' - 2x'' + x)\,P = (x''' - 2x'' + x')\,P;$$

следовательно, $xP = x'P$. Если $x = x'$, то не может быть вместе $y' = y$,
180 $z' = z$, а так как означение координат произвольно, | то, принимая x, x' неравными, должны почитать $P = 0$; это значит:

$$\Delta^2\,\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\Delta^2\,\frac{\Delta\,\delta y}{\Delta x} + \Delta^2\,\frac{\Delta z}{\Delta x}\cdot\Delta^2\,\frac{\Delta\,\delta z}{\Delta x} = 0. \qquad (5)$$

С помощию этого уравнения и дифференцируя уравнение (3), находим

$$\Delta^2\,\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\Delta\,\frac{\Delta\,\delta y}{\Delta x} + \Delta^2\,\frac{\Delta z}{\Delta x}\cdot\Delta\,\frac{\Delta\,\delta z}{\Delta x} + \Delta\,\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\Delta^2\,\frac{\Delta\,\delta y}{\Delta x} + \Delta\,\frac{\Delta z}{\Delta x}\cdot\Delta^2\,\frac{\Delta\,\delta z}{\Delta x} = 0.$$

---

* Эта формула не обоснована (см. комментарий, стр. 375 наст. тома).

Вставляя сюда из уравнений (3), (5) значения $\Delta\frac{\Delta\,\delta z}{\Delta x}$, $\Delta^2\frac{\Delta\,\delta z}{\Delta x}$, получим

$$\left(\Delta^2\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\Delta\frac{\Delta z}{\Delta x}-\Delta\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\Delta^2\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)\left\{\frac{\Delta\frac{\Delta\,\delta y}{\Delta x}}{\Delta\frac{\Delta z}{\Delta x}}-\frac{\Delta^2\frac{\Delta\,\delta y}{\Delta x}}{\Delta^2\frac{\Delta z}{\Delta x}}\right\}=0.$$

181 В этом произведении можем тот или другой производитель полагать нулем. Если принимаем

$$\Delta^2\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\Delta\frac{\Delta z}{\Delta x}-\Delta\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\Delta^2\frac{\Delta z}{\Delta x}=0,$$

или, все то же,

$$\Delta\left\{\frac{\Delta\frac{\Delta y}{\Delta x}}{\Delta\frac{\Delta z}{\Delta x}}\right\}=0,$$

то интегрирование даст

$$y=Cz+C'x+C'',$$

которое уравнение с постоянными C, C', C'' должно быть справедливо по крайней мере для четырех точек по порядку; а как ничто не мешает четвертую точку всякий раз выбирать вне плоскости трех предшествовавших и даже, в случае невозможности из остальных, возвращаться к прежним точкам, то остается необходимое условие, чтобы

$$\frac{\Delta\frac{\Delta\,\delta y}{\Delta x}}{\Delta\frac{\Delta z}{\Delta x}}-\frac{\Delta^2\frac{\Delta\,\delta y}{\Delta x}}{\Delta^2\frac{\Delta z}{\Delta x}}=0,\quad\text{или иначе}\quad\Delta\frac{\Delta\frac{\Delta\,\delta y}{\Delta x}}{\Delta\frac{\Delta z}{\Delta x}}=0.\qquad[5a]$$

Это последнее уравнение интегрируя, находим

$$\Delta\,\delta y=\Delta z\cdot\delta\alpha-\Delta x\cdot\delta\gamma,\quad \delta y=\delta b+z\,\delta\alpha-x\,\delta\gamma,$$

где δb, $\delta\alpha$, $\delta\gamma$ произвольные постоянные. Вставляя значение $\Delta\,\delta y$ в уравнение (3), получим $\Delta\frac{\Delta\,\delta z}{\Delta x}=-\delta\alpha\,\Delta\frac{\Delta y}{\Delta x}$, интегрирование чего дает

$$\delta z=\delta c+x\,\delta\beta-y\,\delta\alpha,$$

где δc, $\delta\beta$ новые произвольные постоянные. Наконец уравнение (1) для $n=1$, $m=1$ делается

$$\Delta x\,\Delta\,\delta x+\Delta y\,\Delta\,\delta y+\Delta z\,\Delta\,\delta z=0,$$

куда поставя значения δy, δz, находим

$$\Delta\,\delta x = \Delta y\cdot\delta\gamma - \Delta z\cdot\delta\beta.$$

Интегрируя, получим

$$\delta x = y\,\delta\gamma - z\,\delta\beta + \delta a,$$

183 |где δa новое произвольное постоянное. Таким образом, условия для движения твердой системы будут:

$$\delta x = \delta a + y\,\delta\gamma - z\,\delta\beta,$$
$$\delta y = \delta b + z\,\delta\alpha - x\,\delta\gamma,$$
$$\delta z = \delta c + x\,\delta\beta - y\,\delta\alpha.$$

Для одного обращательного движения они сделаются

$$\delta x = y\,\delta\gamma - z\,\delta\beta,$$
$$\delta y = z\,\delta\alpha - x\,\delta\gamma,$$
$$\delta z = x\,\delta\beta - y\,\delta\alpha.$$

Если оси координат вместе главные оси обращения, то

$$\sum myz = 0, \quad \sum mzx = 0, \quad \sum mxy = 0,$$

где m — масса вещественной точки, а сумма берется в отношении ко всем таким точкам системы. *Эйлер* открыл первый существование трех главных или свободных осей обращения и взаимную перпендикулярность их, определяя самое большое и самое меньшое значение момента косности. *Лагранж* в Аналитической Механике приходит к тому же заключению, рассматривая свободное движение около оси, которой положение само собой сохраняется. Между
184 тем геометрическое свойство этих осей может быть до|казано без помощи Механики и даже Дифференциального исчисления.

[II]

Воображаем чрез начало координат плоскость, к которой перпендикулярная дает ξ, η, ζ косинусы ее углов с осями координат x, y, z. Расстояние p всякой точки (x, y, z) от этой плоскости будет

$$p = x\xi + y\eta + z\zeta.$$

Для двух новых плоскостей, также проведенных чрез начало координат, различая буквы ударениями, должны писать

$$p' = x\xi' + y\eta' + z\zeta', \quad p'' = x\xi'' + y\eta'' + z\zeta''\,*.$$

* В оригинальном тексте вместо p', p'' ошибочно напечатано q', q''.

После чего

$$p'p'' = x^2 \cdot \xi'\xi'' + y^2 \cdot \eta'\eta'' + z^2 \cdot \zeta'\zeta'' + yz\,(\eta'\zeta'' + \eta''\zeta') + zx\,(\zeta'\xi'' + \zeta''\xi') + \\ + xy\,(\xi'\eta'' + \xi''\eta'),$$

$$p''p = x^2 \cdot \xi''\xi + y^2 \cdot \eta''\eta + z^2 \cdot \zeta''\zeta + yz\,(\eta''\zeta + \eta\zeta'') + zx\,(\zeta''\xi + \zeta\xi'') + \\ + xy\,(\xi''\eta + \xi\eta''),$$

$$pp' = x^2 \cdot \xi\xi' + y^2 \cdot \eta\eta' + z^2 \cdot \zeta\zeta' + yz\,(\eta\zeta' + \eta'\zeta) + zx\,(\zeta\xi' + \zeta'\xi) + \\ + xy\,(\xi\eta' + \xi'\eta).$$

Умножая все три уравнения на m, ставя перед каждым членом знак суммы и полагая

$$\begin{aligned} &\sum mp'p'' = 0, && \sum mp''p = 0, && \sum mpp' = 0, \\ &\sum mx^2 = A, && \sum my^2 = B, && \sum mz^2 = C, \\ &\sum myz = a, && \sum mzx = b, && \sum mxy = c, \end{aligned}$$

185 | получим

$$\left.\begin{aligned} 0 &= A\,\xi'\xi'' + B\,\eta'\eta'' + C\,\zeta'\zeta'' + a\,(\eta'\zeta'' + \eta''\zeta') + b\,(\zeta'\xi'' + \zeta''\xi') + \\ &\qquad + c\,(\xi'\eta'' + \xi''\eta'), \\ 0 &= A\,\xi''\xi + B\,\eta''\eta + C\,\zeta''\zeta + a\,(\eta''\zeta + \eta\zeta'') + b\,(\zeta''\xi + \zeta\xi'') + \\ &\qquad + c\,(\xi''\eta + \xi\eta''), \\ 0 &= A\,\xi\xi' + B\,\eta\eta' + C\,\zeta\zeta' + a\,(\eta\zeta' + \eta'\zeta) + b\,(\zeta\xi' + \zeta'\xi) + \\ &\qquad + c\,(\xi\eta' + \xi'\eta). \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Если к тому плоскости, от которых расстояния точки назвали p, p', p'', все три перпендикулярны друг к другу, то

$$\xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta'' = 0, \quad \xi''\xi + \eta''\eta + \zeta''\zeta = 0, \quad \xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta' = 0. \quad (7)$$

Присоединяя сюда еще уравнения

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1, \quad \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = 1, \quad \xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2 = 1, \quad (8)$$

получим всего 9 уравнений (6), (7), (8) для определения девяти неизвестных ξ, η, ζ', ξ' и проч. Чтобы избегнуть затруднений
186 в обык|новенном способе исключения, заменим три уравнения (6) новыми

$$\left.\begin{aligned} \lambda X &= A\xi + c\eta + b\zeta, \\ \lambda Y &= B\eta + a\zeta + c\xi, \\ \lambda Z &= C\zeta + b\xi + a\eta, \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda' X' &= A\xi' + c\eta' + b\zeta', \\ \lambda' Y' &= B\eta' + a\zeta' + c\xi', \\ \lambda' Z' &= C\zeta' + b\xi' + a\eta', \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda'' X'' &= A\xi'' + c\eta'' + b\zeta'', \\ \lambda'' Y'' &= B\eta'' + a\zeta'' + c\xi'', \\ \lambda'' Z'' &= C\zeta'' + b\xi'' + a\eta'', \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

где λ, λ', λ'' произвольные числа и где

$$X = \eta'\zeta'' - \eta''\zeta', \quad Y = \zeta'\xi'' - \zeta''\xi', \quad Z = \xi'\eta'' - \xi''\eta', \qquad (12)$$

$$X' = \eta''\zeta - \eta\zeta'', \quad Y' = \zeta''\xi - \zeta\xi'', \quad Z' = \xi''\eta - \xi\eta'', \qquad (13)$$

$$X'' = \eta\zeta' - \eta'\zeta, \quad Y'' = \zeta\xi' - \zeta'\xi, \quad Z'' = \xi\eta' - \xi'\eta. \qquad (14)$$

157 | Отсюда

$$\left.\begin{aligned} X'X'' + Y'Y'' + Z'Z'' &= 0, \\ X''X + Y''Y + Z''Z &= 0, \\ XX' + YY' + ZZ' &= 0; \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

$$\left.\begin{aligned} X^2 + Y^2 + Z^2 &= 1, \\ X'^2 + Y'^2 + Z'^2 &= 1, \\ X''^2 + Y''^2 + Z''^2 &= 1. \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Произведение первых из уравнений (9), (10) дает

$$\lambda\lambda' XX' =$$
$$= A^2\xi\xi' + c^2\eta\eta' + b^2\zeta\zeta' + bc(\eta\zeta' + \eta'\zeta) + Ab(\zeta\xi' + \zeta'\xi) + Ac(\xi\eta' + \xi'\eta).$$

Таким же образом находим $\lambda\lambda' YY'$, $\lambda\lambda' ZZ'$; а складывая все три уравнения вместе и принимая для краткости

$$A' = A^2 - a^2, \qquad B' = B^2 - b^2, \qquad C' = C^2 - c^2,$$
$$a' = bc + a(B + C), \quad b' = ca + b(C + A), \quad c' = ab + c(A + B),$$

с помощию уравнений (15) и с переменой ударений над буквами, получим

158 | $$\left.\begin{aligned} 0 &= A'\xi'\xi'' + B'\eta'\eta'' + C'\zeta'\zeta'' + a'(\zeta'\xi'' + \zeta''\xi') + b'(\xi'\eta'' + \xi''\eta') + \\ &\qquad + c'(\eta'\zeta'' + \eta''\zeta'), \\ 0 &= A'\xi''\xi + B'\eta''\eta + C'\zeta''\zeta + a'(\zeta''\xi + \zeta\xi'') + b'(\xi''\eta + \xi\eta'') + \\ &\qquad + c'(\eta''\zeta + \eta\zeta''), \\ 0 &= A'\xi\xi' + B'\eta\eta' + C'\zeta\zeta' + a'(\zeta\xi' + \zeta'\xi) + b'(\xi\eta' + \xi'\eta) + \\ &\qquad + c'(\eta\zeta' + \eta'\zeta). \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Уравнения, подобные уравнениям (6) и которые приводят к заключению, что если в одном теле

$$\sum mx^2 = A, \quad \sum my^2 = B, \quad \sum mz^2 = C,$$
$$\sum myz = a, \quad \sum mzx = b, \quad \sum mxy = c,$$

в другом

$$\sum mx^2 = A^2 - a^2, \qquad \sum my^2 = B^2 - b^2, \qquad \sum mz^2 = C^2 - c^2,$$
$$\sum myz = bc + a(B+C), \quad \sum mzx = ca + b(C+A), \quad \sum mxy = ab + c(A+B),$$

то положение трех главных осей в обоих телах одинаково.

Два последние из уравнений (17) можем снова заменить уравнениями

$$\mu X = A'\xi + c'\eta + b'\zeta, \ \mu Y = B'\eta + a'\zeta + c'\xi, \ \mu Z = C'\zeta + b'\xi + a'\eta, \quad (18)$$

139 где μ произвольное число. Сличая уравнения (18) с уравнениями (9) и полагая $\lambda = \mu v$, получим:

$$\left.\begin{aligned} (A' - Av)\xi + (c' - cv)\eta + (b' - bv)\zeta = 0, \\ (c' - cv)\xi + (B' - Bv)\eta + (a' - av)\zeta = 0, \\ (b' - bv)\xi + (a' - av)\eta + (C' - Cv)\zeta = 0. \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Отсюда исключая которые нибудь два числа из ξ, η, ζ, потом отбрасывая третье, находим

$$(A' - Av)(B' - Av)(C' - Cv) - (A' - Av)(a' - av)^2 - (B' - Bv)(b' - bv)^2 -$$
$$- (C' - Cv)(c' - cv)^2 + 2(a - a'v)(b - b'v)(c - c'v) = 0 \qquad (20)$$

— уравнение третьей степени и которого по крайней мере один корень необходимо действительный. Отыскавши его, потом содержание друг к другу чисел ξ, η, ζ помощию двух из уравнений (19), получим самые числа ξ, η, ζ, всегда действительные, из первого уравнения (8):

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1.$$

Зная ξ, η, ζ, определяем содержание друг к другу чисел ξ', η', ζ', соединяя последнее из уравнений (6) с последним из уравнений (7);
140 а наконец получим и самые числа ξ', η', ζ', тоже действительные, из уравнений (8). Подобным образом находим и числа ξ'', η'', ζ''.

Надобно заметить, что если множитель в уравнении (20) при v^3 будет нуль, то можно принимать $v = \infty$, после чего уравнения (19) сделаются

$$A\xi + c\eta + b\zeta = 0, \quad c\xi + B\eta + a\zeta = 0, \quad b\xi + a\eta + C\zeta = 0 \quad (21)$$

и предполагают

$$ABC - a^2A - b^2B - c^2C + 2abc = 0.$$

В таком случае уравнения (21) в соединении с первым из уравнений (8) дают всегда действительные значения чисел ξ, η, ζ.

КОММЕНТАРИЙ

В первой части своего сочинения Лобачевский ставит задачу вывести эйлеровы уравнения [1]), применяя общий ход рассуждений Лагранжа, но допуская, что «число вещественных точек в твердой системе... ограничено, а расстояния между ними конечные» [2]).

При такой постановке вопроса лагранжев оператор d должен уступить место оператору конечной разности Δ; обозначая координаты последовательных точек через $x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z'', \ldots$, имеем:

$$x' = x + \Delta x, \qquad x'' = x' + \Delta x',$$
$$\Delta x' = \Delta x + \Delta^2 x, \qquad x'' = x + 2\Delta x + \Delta^2 x,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Этими и аналогичными равенствами определяются разности первого и высших порядков от координат. Наряду с конечными разностями вводятся символы δx, δy, δz; их нужно понимать как дифференциалы координат при их дифференцировании по времени.

Так как

$$\delta\,\Delta x = \delta\,(x' - x) = \delta x' - \delta x = \Delta\,\delta x,$$

то операторы Δ и δ коммутируют; то же самое имеет место для δ и для разностей высших порядков.

Оба символа Δ и δ входят во все формулы Лобачевского; сопоставляя их с основными формулами Лагранжа, приведенными во вводной статье [3]), мы должны проследить, ка́к отражается на них замена символа d на Δ.

Мы наметим сначала только основные этапы вывода Лобачевского. Здесь фундаментальными являются четыре формулы, которые мы обозначим (A), (B), (C) и (D).

Первая из них гласит:

$$\delta\,(\Delta^n x \cdot \Delta^m x + \Delta^n y \cdot \Delta^m y + \Delta^n z \cdot \Delta^m z) = 0, \qquad \text{(A)}$$

при любых целых и положительных n и m [4]).

---

[1]) Уравнения (4) на стр. 355 (во вводной статье). В дальнейшем все ссылки на страницы относятся к настоящему тому.

[2]) Стр. 357.

[3]) Формулы (1), (2) и (3) на стр. 354—355.

[4]) Лобачевского — формула (1) на стр. 358.

Уравнение (А) имеет фундаментальное значение в работе Лобачевского; оно выражает в наиболее общей форме условие неизменяемости при движении расстояний между точками твердой системы, взятыми в ограниченном числе.

Очевидно, что основная формула Лагранжа

$$\delta\,[(d^n x)^2 + (d^n y)^2 + (d^n z)^2] = 0$$

является только частным случаем уравнения (А), при замене Δ на d и при условии $m = n$.

На следующем этапе анализа Лобачевский получает уравнение:

$$\Delta \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta \frac{\Delta\,\delta y}{\Delta x} + \Delta \frac{\Delta z}{\Delta x} \cdot \Delta \frac{\Delta\,\delta z}{\Delta x} = 0\ ^{1)}. \qquad (B)$$

Это соотношение переходит во вторую формулу лагранжевой группы формул [2], если только считать Δx постоянным и заменить символ Δ лагранжевым d.

Далее, после весьма утомительных выкладок Лобачевский приходит к уравнению

$$\Delta^2 \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta^2 \frac{\Delta\,\delta y}{\Delta x} + \Delta^2 \frac{\Delta z}{\Delta x} \cdot \Delta^2 \frac{\Delta\,\delta z}{\Delta x} = 0\ ^{3)}. \qquad (C)$$

Очевидно, при $\Delta x = \text{const}$ мы пришли бы к третьему уравнению системы лагранжевой группы при $dx = \text{const}$.

Путем весьма замечательного анализа уравнений (В) и (С) Лобачевский приходит [4] к последнему основному уравнению:

$$\Delta \frac{\Delta \dfrac{\Delta\,\delta y}{\Delta x}}{\Delta \dfrac{\Delta z}{\Delta x}} = 0. \qquad (D)$$

Это уравнение, по его структуре, аналогично уравнению

$$\Delta \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta \frac{\Delta\,\delta y}{\Delta x} + \Delta \frac{\Delta z}{\Delta x} \cdot \Delta \frac{\Delta\,\delta z}{\Delta x} = 0$$

в методе Лагранжа: оно является разрешающим для метода Лобачевского; интегрируя его, как уравнение в конечных разностях, затем привлекая снова уравнения (В) и (А), Лобачевский получает (в несколько иной записи) те эйлеровы выражения для δx, δy, δz, которые были приведены нами во вводной статье [5]; на этом и завершается первая, кинематическая, часть исследования Лобачевского.

---

[1] У Лобачевского — формула (3) на стр. 359.

[2] Формулы (1) во вводной статье (стр. 354).

[3] У Лобачевского — формула (5) на стр. 363.

[4] У Лобачевского — формула [5а] на стр. 364.

[5] Уравнения (4) на стр. 355.

Проследим теперь более детально за главными этапами выкладок Лобачевского и для этого приведем, прежде всего, основные формулы того алгоритма, которым он пользуется.

По самому определению конечных разностей, имеем для произведения и для частного переменных u, v:

$$\Delta(uv) = u\,\Delta v + v\,\Delta u + \Delta u \cdot \Delta v,$$

$$\Delta\frac{u}{v} = \frac{v\,\Delta u - u\,\Delta v}{v\,(v + \Delta v)}$$

при $v \neq 0$, $v + \Delta v \neq 0$.

Отсюда, для $u = \Delta x$, $v = \Delta y$,

$$\Delta\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x \cdot \Delta^2 y - \Delta y \cdot \Delta^2 x}{\Delta x \cdot (\Delta x + \Delta^2 x)} \tag{a}$$

и точно так же, при $u = \Delta^2 x$, $v = \Delta^2 y$,

$$\Delta\frac{\Delta^2 y}{\Delta^2 x} = \frac{\Delta^2 x \cdot \Delta^3 y - \Delta^2 y \cdot \Delta^3 x}{\Delta^2 x\,(\Delta^2 x + \Delta^3 x)}. \tag{b}$$

Знаменатели дробей в (a) и (b) обозначаются у Лобачевского [1]) через X и X', так что

$$X \cdot \Delta\frac{\Delta y}{\Delta x} = \Delta x \cdot \Delta^2 y - \Delta y \cdot \Delta^2 x, \tag{c}$$

$$X' \cdot \Delta\frac{\Delta^2 y}{\Delta^2 x} = \Delta^2 x \cdot \Delta^3 y - \Delta^2 y \cdot \Delta^3 x. \tag{d}$$

Взяв разность от обеих частей (c) и вычитая почленно (d), получим:

$$\Delta\left(X \cdot \Delta\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) - X' \cdot \Delta\frac{\Delta^2 y}{\Delta^2 x} = \Delta x \cdot \Delta^3 y - \Delta y \cdot \Delta^3 x. \tag{e}$$

Для некоторых выводов Лобачевского важно заметить, что в выражение второй разности

$$\Delta^2\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

войдет произведение

$$\Delta x\,(\Delta x + \Delta^2 x)^2\,(\Delta x + 2\,\Delta^2 x + \Delta^3 x).$$

Отметим еще применяемые Лобачевским соотношения:

$$\Delta(u\,\Delta v) = \Delta u\,\Delta v + (u + \Delta u)\,\Delta^2 v$$

и, наконец,

$$\Delta(uv) \cdot \Delta(uw) = u\,(u + \Delta u) \cdot \Delta v \cdot \Delta w + \Delta u\,(u + \Delta u) \cdot \Delta(vw) + \Delta u^2 \cdot vw.$$

---

[1]) Формулы (4a) на стр. 360.

Этими формулами исчерпывается тот аппарат, которым пользуется Лобачевский в первой части своей работы.

Вывод основной формулы, обозначенной выше через (A), проводится Лобачевским [1]) шаг за шагом, исходя из неизменяемости при движении квадратов расстояний между первой и второй, первой и третьей, второй и третьей точками и т. д.; этот вывод особых пояснений не требует; подчеркнем только, что обозначения:

$$\Delta x^2,\ \Delta^2 x^2,\ \Delta^3 x^2 \text{ и т. п.}$$

применяются всегда для квадратов соответствующих разностей, *но никогда как разности от* x^2; эти последние у Лобачевского вовсе и не встречаются.

Весь дальнейший анализ Лобачевского основан на трех «тождественных уравнениях» [2]), которые все заключены в тождестве:

$$\frac{\delta u^2}{u^2}+\frac{\delta v^2}{v^2}=\frac{2\delta(uv)}{uv};$$

в первом из них $u=\Delta x$, $v=\Delta^2 x$, во втором $u=\Delta^2 x$, $v=\Delta^3 x$, в третьем $u=\Delta^3 x$, $v=\Delta x$.

Но в силу условия неизменяемости расстояния между точками $(x,\ y,\ z)$, $(x',\ y',\ z')$ и из уравнения (A) при $m=n=2$ имеем:

$$\delta(\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2)=0,$$
$$\delta(\Delta^2 x^2+\Delta^2 y^2+\Delta^2 z^2)=0.$$

Поэтому, например, из первого тождественного уравнения по выполнении дифференцирований под знаком δ найдем, обозначая многоточием члены соответственной структуры с Δz и δz:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}\frac{\Delta\,\delta y}{\Delta x}+\frac{\Delta^2 y}{\Delta^2 x}\frac{\Delta^2\,\delta y}{\Delta^2 x}+\ldots=\frac{\Delta y}{\Delta x}\frac{\Delta^2\,\delta y}{\Delta x}+\frac{\Delta^2 y}{\Delta^2 x}\frac{\Delta\,\delta y}{\Delta x}+\ldots$$

или

$$\left(\frac{\Delta^2 y}{\Delta^2 x}-\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)\left(\frac{\Delta^2\,\delta y}{\Delta^2 x}-\frac{\Delta\,\delta y}{\Delta x}\right)+\left\{\begin{matrix}\text{аналогичное про-}\\ \text{изведение с } \Delta z \text{ и } \delta z\end{matrix}\right\}=0. \text{ [3])} \qquad \text{(f)}$$

Но в силу формулы (c),

$$\frac{\Delta^2 y}{\Delta^2 x}-\frac{\Delta y}{\Delta x}=\Delta\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{X}{\Delta x\cdot\Delta^2 x}\ .\text{ [4])}$$

---

[1]) На стр. 358.

[2]) Формулы [1a] на стр. 359.

[3]) Формулы (2) на стр. 359.

[4]) Формула [4b] на стр. 361.

Последний множитель справа появится и в тех членах (f), где y и z заменены на δy и на δz; сокращая этот множитель, получим одно из основных соотношений, уже отмеченных выше, именно формулу (В).

Столь же просто производится обработка второго «тождественного уравнения». Учитывая теперь, что в силу формулы (d)

$$\frac{\Delta^3 y}{\Delta^3 x} - \frac{\Delta^2 y}{\Delta^2 x} = \Delta \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} \cdot \frac{X'}{\Delta^2 x \cdot \Delta^3 x},$$

Лобачевский приходит к уравнению (4) [1]), именно:

$$\Delta \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} \cdot \Delta \frac{\Delta^2 \delta y}{\Delta x^2} + \Delta \frac{\Delta^2 \delta z}{\Delta x^2} \cdot \Delta \frac{\Delta^2 \delta z}{\Delta x^2} = 0.$$

Существенно сложнее выполняется замечательная обработка третьего «тождественного уравнения»:

$$\frac{\delta \Delta^3 x^2}{\Delta^3 x^2} + \frac{\delta \Delta x^2}{\Delta x^2} = \frac{2 \delta (\Delta^3 x \cdot \Delta x)}{\Delta^3 x \cdot \Delta x}.$$

Эта обработка занимает у Лобачевского страницы 359—362 наст. тома; здесь мы отметим ее основные моменты. Из третьего уравнения системы (2) [2]), учитывая значения X и X' и применяя формулу (е), Лобачевский приходит к уравнению [3]):

$$[\Delta (X \Delta v) - X' \Delta w] \cdot [\Delta (X \Delta v') - X' \Delta w'] + \ldots = 0, \qquad \text{(g)}$$

где нами для краткости положено

$$v = \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad v' = \frac{\Delta \delta y}{\Delta x}, \quad w = \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}, \quad w' = \frac{\Delta^2 \delta y}{\Delta x^2} \qquad \text{(g')}$$

и где многоточием обозначены аналогичные члены с z и δz.

Выполняя перемножение, получим:

а) члены, не содержащие X', именно:

$$\Delta (X \Delta v) \cdot \Delta (X \Delta v') =$$
$$= X (X + \Delta X) \Delta^2 v \cdot \Delta^2 v' + \Delta X (X + \Delta X) \Delta (\Delta v \cdot \Delta v') + \Delta X^2 \Delta v \cdot \Delta v',$$

б) члены с множителем X', именно:

$$\Delta w \cdot \Delta (X \Delta v') + \Delta w' \cdot \Delta (X \Delta v) =$$
$$= (X + \Delta X)(\Delta w \cdot \Delta^2 v' + \Delta w' \Delta^2 v) + \Delta X (\Delta w \cdot \Delta v' + \Delta v \cdot \Delta w')\ ^{4)}$$

и, наконец,

в) член

$$X'^2 \Delta w \cdot \Delta w'.$$

---

1) См. стр. 359.

2) Стр. 359.

3) Стр. 360.

4) Множитель X' опущен.

Но мы имеем $w = \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = \Delta \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{X}{\Delta x \cdot \Delta^2 x} + \frac{\Delta y}{\Delta x}$ или $w = \left(1 + \frac{\Delta x}{\Delta^2 x}\right)\Delta v + v$, откуда [1])

$$\Delta w = \left(1 + \frac{\Delta x}{\Delta^2 x} + \Delta \frac{\Delta x}{\Delta^2 x}\right)\Delta^2 v + \left(1 + \Delta \frac{\Delta x}{\Delta^2 x}\right)\Delta v. \qquad \text{(h)}$$

Аналогичные соотношения имеют место между $\Delta w'$ и $\Delta v'$, $\Delta^2 v'$. Они приводят к равенствам [2]):

$$\Delta w \cdot \Delta^2 v' + \Delta w' \cdot \Delta^2 v =$$
$$= 2\left(1 + \frac{\Delta x}{\Delta^2 x} + \Delta \frac{\Delta x}{\Delta^2 x}\right)\Delta^2 v \cdot \Delta^2 v' + \left(1 + \frac{\Delta x}{\Delta^2 x}\right) \cdot \Delta(\Delta v \cdot \Delta v'), \qquad \text{(i)}$$

$$\Delta w \cdot \Delta v' + \Delta v \cdot \Delta w' =$$
$$= \left(1 + \frac{\Delta x}{\Delta^2 x} + \Delta \frac{\Delta x}{\Delta^2 x}\right)[\Delta(\Delta v \cdot \Delta v') - \Delta^2 v \cdot \Delta^2 v'] + 2\left(1 + \Delta \frac{\Delta x}{\Delta^2 x}\right)\Delta v \cdot \Delta v'. \qquad \text{(k)}$$

Подставляя (h), (i) и (k) в указанные члены а), б) и в), мы получим:

1) члены с $\Delta^2 v \cdot \Delta^2 v'$; коэффициент при них обозначим через K,

2) члены с $\Delta v \cdot \Delta v'$; их коэффициент обозначим через K_1,

3) члены с $\Delta(\Delta v \cdot \Delta v')$; их коэффициент обозначим через K_2.

Но, очевидно, те же самые коэффициенты K, K_1 и K_2 получатся при разложениях тех членов уравнения (g), в которые входят z и δz вместо y и δy. Поэтому, восстанавливая значения v, v', w и w' по (g′), придем к уравнению

$$K\left[\Delta^2 \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta^2 \frac{\Delta \delta y}{\Delta x} + \Delta^2 \frac{\Delta z}{\Delta x} \cdot \Delta^2 \frac{\Delta \delta z}{\Delta x}\right] +$$
$$+ K_1\left[\Delta \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta \frac{\Delta \delta y}{\Delta x} + \Delta \frac{\Delta z}{\Delta x} \cdot \Delta \frac{\Delta \delta z}{\Delta x}\right] +$$
$$+ K_2 \Delta\left[\Delta \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta \frac{\Delta \delta y}{\Delta x} + \Delta \frac{\Delta z}{\Delta x} \cdot \Delta \frac{\Delta \delta z}{\Delta x}\right] = 0. \qquad \text{(l)}$$

Здесь сумма при коэффициенте K_1 равна нулю в силу основного уравнения (B); следовательно, равен нулю и коэффициент при K_2, как разность этой суммы. Поэтому уравнение (l) приводится к виду

$$K\left[\Delta^2 \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta^2 \frac{\Delta \delta y}{\Delta x} + \Delta^2 \frac{\Delta z}{\Delta x} \cdot \Delta^2 \frac{\Delta \delta z}{\Delta x}\right] = 0 \text{ [3]}. \qquad \text{(m)}$$

Вычисление коэффициента K проведено у Лобачевского на стр. 362. В конечном итоге уравнение (m) принимает форму:

$$(\Delta x - \Delta^2 x - \Delta^3 x)\left[\Delta^2 \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta^2 \frac{\Delta \delta y}{\Delta x} + \Delta^2 \frac{\Delta z}{\Delta x} \cdot \Delta^2 \frac{\Delta \delta z}{\Delta x}\right] = 0 \text{ [4]}. \qquad \text{(n)}$$

---

[1]) Формула [4c] на стр. 361.

[2]) Формулы [4d] и [4e] на стр. 361.

[3]) Формула [4f] на стр. 362.

[4]) У Лобачевского — формула (4′) на стр. 362.

После этого Лобачевский проводит довольно сложные выкладки, чтобы показать, что из (n) вытекает уравнение (C), которое и есть третье фундаментальное уравнение его исследования, как уже было отмечено выше. К сожалению, именно эти страницы в работе Лобачевского содержат либо пропуск текста, либо искажение в печати, так как, вычисляя P[1]), он приравнивает нулю сумму

$$\frac{\Delta y'}{\Delta x'}\frac{\Delta\delta y'}{\Delta x'}+\frac{\Delta z'}{\Delta x'}\frac{\Delta\delta z'}{\Delta x'}.$$

Между тем, из уравнения (B)[2]), на которое ссылается здесь Лобачевский, равенство нулю этого выражения никак не следует; к тому же, применяя условие неизменяемости квадрата расстояния между точками (x', y', z') и (x'', y'', z''), имеем

$$\delta(\Delta x'^2+\Delta y'^2+\Delta z'^2)=0,$$

откуда, дифференцируя и деля на $\Delta x'^2$:

$$\frac{\Delta y'}{\Delta x'}\frac{\Delta\delta y'}{\Delta x'}+\frac{\Delta z'}{\Delta x'}\frac{\Delta\delta z'}{\Delta x'}=-\frac{\Delta\delta x'}{\Delta x'}.$$

В силу этого, выражение для величины P, которое Лобачевский получает[3]), места не имеет, и утверждение, что выражение

$$P=\Delta^2\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\Delta^2\frac{\Delta\delta y}{\Delta x}+\Delta^2\frac{\Delta z}{\Delta x}\cdot\Delta^2\frac{\Delta\delta z}{\Delta x}$$

симметрично относительно координат точек (x, y, z) и (x', y', z'), не доказывается проведенным Лобачевским рассуждением. Но по счастью, в этом и нет необходимости; действительно, коэффициент при P в уравнении (n), как было указано выше, есть $\Delta x-\Delta^2x-\Delta^3x$; но

$$\Delta x-\Delta^2x-\Delta^3x=x'''-2x''+x,$$

и поэтому при произвольном расположении трех точек (x, y, z), (x'', y'', z'') и (x''', y''', z''') этот коэффициент в нуль не обращается. В силу этого из уравнения (n)

$$(x'''-2x''+x)P=0,$$

которое имеет место при любых значениях координат названных точек, необходимо следует, что

$$P=0,$$

чем и устанавливается третье фундаментальное уравнение метода Лобачевского.

В заключение весьма тонким анализом уравнений (B) и (C) Лобачевский приходит к тому уравнению (D), которое мы назвали

---

[1]) Формула [4g] на стр. 363.

[2]) У Лобачевского — уравнение (3) на стр. 359.

[3]) Формула [4h] на стр. 364.

выше разрешающим в его исследовании; после этого он без труда получает эйлеровы выражения δx, δy, δz для бесконечно малых перемещений точек твердой системы.

Из сказанного нельзя не усмотреть, с каким замечательным искусством Лобачевский провел всё это доказательство, несмотря на существенные осложнения, которые возникли перед ним в силу отказа от лагранжева допущения о том, что Δx является бесконечно малой величиной, которую можно понимать в смысле дифференциала независимой переменной, уничтожая тем самым ее разности второго и высших порядков.

Вторая часть исследования Лобачевского имеет своим предметом, как уже упомянуто, задачу об определении главных осей тензора инерции любой системы материальных точек. Для пояснения приемов, которыми пользуется Лобачевский в этом классическом вопросе, целесообразно применить векторные обозначения. Пусть $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{p}'$, $\boldsymbol{p}''$ — три взаимно перпендикулярных орта; их проекции на заданные оси x, y, z, иными словами — направляющие косинусы этих ортов, назовем, как у Лобачевского, через

$$\xi,\ \eta,\ \zeta;\quad \xi',\ \eta',\ \zeta';\quad \xi'',\ \eta'',\ \zeta'';$$

проведем через начало координат три плоскости, перпендикулярные к этим ортам; возьмем точку системы с массой m_i и с координатами x_i, y_i, z_i; ее радиус-вектор относительно начала координат назовем $\boldsymbol{r}_i$; обозначим через p_i, p_i' и p_i'' расстояния этой точки до плоскостей, образуемых соответственно ортами $\boldsymbol{p}'$ и $\boldsymbol{p}''$; $\boldsymbol{p}''$ и $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{p}'$; эти расстояния выразятся, очевидно, скалярными произведениями:

$$p_i = \boldsymbol{r}_i\boldsymbol{p},\quad p_i' = \boldsymbol{r}_i\boldsymbol{p}',\quad p_i'' = \boldsymbol{r}_i\boldsymbol{p}''.$$

Положение трех «главных плоскостей» Лобачевский определяет условиями:

$$\sum m_i p_i' p_i'' = \sum m_i p_i'' p_i = \sum m_i p_i p_i' = 0;$$

из них, в связи с ортогональностью трех ортов, и надлежит определить их проекции; но каждая из сумм типа $\sum m_i p_i' p_i''$ приводится к билинейной форме проекций тех двух ортов, через которые получаются соответствующие расстояния. Коэффициентами в этих формах являются те величины, которые обозначены у Лобачевского через A, B, C, a, b, c. Обозначим эти билинейные формы соответственно через T, T' и T''. Развернутые их выражения даны Лобачевским в правых частях формул (6) [1].

---

[1] На стр. 366.

Рассмотрим одну из этих форм, например T''. Поскольку она билинейна в проекциях (ξ, η, ζ) и (ξ', η', ζ'), имеем по теореме Эйлера:

$$\frac{\partial T''}{\partial \xi}\xi' + \frac{\partial T''}{\partial \eta}\eta' + \frac{\partial T''}{\partial \zeta}\zeta' = T''.$$

Но по условию о главных плоскостях $T''=0$; следовательно, вектор с проекциями

$$\frac{\partial T''}{\partial \xi'}, \quad \frac{\partial T''}{\partial \eta'}, \quad \frac{\partial T''}{\partial \zeta'} \tag{p}$$

ортогонален к орту $\boldsymbol{p}'$; далее, непосредственным вычислением убеждаемся, что

$$\frac{\partial T''}{\partial \xi'}\xi'' + \frac{\partial T''}{\partial \eta'}\eta'' + \frac{\partial T''}{\partial \zeta'}\zeta'' = T';$$

и поскольку $T'=0$, то введенный выше вектор (p) ортогонален и к орту $\boldsymbol{p}''$; следовательно, его направление совпадает, с точностью до знака, с направлением векторного произведения $\boldsymbol{p}' \times \boldsymbol{p}''$.

Проекции вектора (p) обозначены у Лобачевского через λX, λY, λZ, где λ — неопределенное вещественное число. Вместо того, чтобы писать три скалярных равенства для проекций этого вектора, обозначим его через $\lambda \boldsymbol{R}$ и напишем в очевидной символике:

$$\frac{\partial T''}{\partial \boldsymbol{p}'} = \lambda \boldsymbol{R} = \lambda(\boldsymbol{p}' \times \boldsymbol{p}''). \tag{q}$$

Три соответствующие скалярные равенства совпадают с формулами (9) и (12) текста Лобачевского[1]); аналогично найдем:

$$\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{p}''} = \lambda' \boldsymbol{R}' = \lambda'(\boldsymbol{p}'' \times \boldsymbol{p}) \tag{r}$$

и

$$\frac{\partial T'}{\partial \boldsymbol{p}} = \lambda'' \boldsymbol{R}'' = \lambda''(\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{p}'). \tag{s}$$

В скалярной записи мы получили здесь группы формул (10) и (13), (11) и (14) исследования Лобачевского[2]).

Но векторы $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{R}'$, $\boldsymbol{R}''$, очевидно, попарно ортогональны; образуя их скалярные произведения, мы получим снова три билинейные формы, которые обозначим через S, S' и S''; по структуре они вполне аналогичны рассмотренным выше формам T, T' и T'', с заменой коэффициентов A, B, C, a, b, c на A', B', C', a', b', c', причем

$$\begin{aligned} A' &= A^2 + b^2 + c^2, & a' &= ac + b(A + C), \\ B' &= B^2 + c^2 + a^2, & b' &= ab + c(A + B), \\ C' &= C^2 + a^2 + b^2, & c' &= bc + a(B + C)\,^{3}). \end{aligned}$$

---

[1]) На стр. 366, 367.

[2]) См. стр. 367.

[3]) Этими выражениями следует заменить формулы Лобачевского для $A', \ldots, C'$ на стр. 367.

Условие перпендикулярности векторов $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{R}'$ $\boldsymbol{R}''$ приводит к уравнениям (17)[1]:

$$S = S' = S'' = 0.$$

Но теперь очевидно, что формы S можно подвергнуть такой же обработке, как и формы T; в частности, мы получим

$$\frac{\partial S''}{\partial \boldsymbol{p}'} = \mu \boldsymbol{R} = \mu (\boldsymbol{p}' \times \boldsymbol{p}''), \qquad (\mathrm{q}')$$

где μ — неопределенный множитель. В скалярной записи это дает три уравнения (18)[2]; Лобачевский полагает $\mu = \lambda v$, и получает, сопоставляя уравнения (q) и (q′):

$$\frac{\partial T''}{\partial \boldsymbol{p}'} = \mu v \boldsymbol{R} = v \frac{\partial S''}{\partial \boldsymbol{p}'}. \qquad (\mathrm{t})$$

Три соответствующих скалярных уравнения — это уравнения (19)[3]; они линейны и однородны в проекциях ξ, η, ζ вектора $\boldsymbol{p}$; приравнивая нулю их определитель, Лобачевский получает уравнение (20), т. е. то характеристическое уравнение третьей степени относительно параметра v, которое приводит к решению задачи о главных плоскостях системы.

В современных трактатах теоретической механики сохранились, в основном, лишь два метода определения главных осей: метод Эйлера определения экстремальных значений моментов инерции и геометрическое построение Пуансо. Но за методом Лобачевского навсегда сохранится значение исследования, в котором эта задача была представлена именно как проблема из «геометрии масс», и ее замечательное решение проведено с точек зрения, едва намечавшихся в эпоху тридцатых годов прошлого столетия.

---

[1]) На стр. 367.

[2]) На стр. 368.

[3]) На стр. 368.

ПОДРОБНЫЙ РАЗБОР РАССУЖДЕНИЯ, ПРЕДСТАВЛЕННОГО МАГИСТРОМ ПОПОВЫМ

ПОД НАЗВАНИЕМ «ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ, ПРИВЕДЕННЫХ К ЛИНЕЙНОМУ ВИДУ»

1845

КОММЕНТАРИИ Г.Г. ТУМАШЕВА

ПОДРОБНЫЙ РАЗБОР РАССУЖДЕНИЯ

ОБЪ ИНТЕГРИРОВАНІИ

ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫХЪ УРАВНЕНІЙ ГИДРОДИНАМИКИ,

ПРИВЕДЕННЫХЪ КЪ ЛИНЕЙНОМУ ВИДУ.

РАЗСУЖДЕНІЕ

Магистра Александра Попова

НА

СТЕПЕНЬ ДОКТОРА

МАТЕМАТИКИ И АСТРОНОМІИ.

КАЗАНЬ, 1845 ГОДА.

ВЪ УНИВЕРСИТЕТСКОЙ ТИПОГРАФІИ

Титульный лист докторской диссертации А. Ф. Попова, к которой был приложен печатный отзыв Н. И. Лобачевского.

К стр. 391.

ПОДРОБНОЙ РАЗБОРЪ

РАЗСУЖДЕНІЯ, ПРЕДСТАВЛЕННАГО МАГИСТРОМЪ ПОПОВЫМЪ,

ПОДЪ НАЗВАНІЕМЪ

«ОБЪ ИНТЕГРИРОВАНІИ УРАВНЕНІЙ ГИДРОДИНАМИКИ, ПРИВЕДЕННЫХЪ КЪ ЛИНЕЙНОМУ ВИДУ»

НА СТЕПЕНЬ ДОКТОРА МАТЕМАТИКИ И АСТРОНОМІИ.

До сихъ поръ еще немногіе изъ математиковъ занимались интегрированіемъ тѣхъ уравненій Динамики, которыя представляютъ или явленія звука въ упругихъ жидкостяхъ, или волненіе на поверхности несжимаемыхъ жидкостей. Всѣ подобныя уравненія стараются приводить къ линейному виду, чтобъ облегчить интегрированіе. Примѣръ, какимъ образомъ линейныя диференціальныя уравненія втораго порядка, могутъ вполнѣ быть интегрированы, находимъ у перваго Фурье, въ его сочиненіи Théorie analytique de la chaleur. Интегрированіе линейнаго диференціальнаго уравненія, которое представляетъ распространеніе звука въ воздухѣ, далъ первой Пуассонъ въ общемъ видѣ (Journal de l'école polytechnique, T. VII) и въ послѣдствіи, неограничиваясь даже предположеніемъ, чтобы скорости движенія по направленію перпендикулярныхъ осей, были частными диференціалами одной функціи (sur la propagation du mouvement dans les milieux élastiques, Mém. lu à l'Academie, le 11 Octobre 1830; Mémoires de l'Institut, T. X.). Интегрированіе диференціальныхъ уравненій, которыя представляютъ волненіе на поверхности несжимаемой жидкости, далъ тоже первой Пуассонъ, въ своемъ сочиненіи Mémoire sur la théorie des ondes, lu le 2 octobre et 18 décembre 1815 (Mémoires de l'Institut, T. I.). Интегрированіемъ тѣхъ же уравненій занимался потомъ Коши, котораго сочиненіе, Théorie de la propagation des ondes à la surface d'un fluide pesant d'une profondeur indéfinie, увѣнчано было Академіей наукъ въ Парижѣ и напечатано въ Mémoires présentés par divers savans, T. I, l'an 1827.

Первая страница отзыва Н. И. Лобачевского на диссертацию А. Ф. Попова.

ПОДРОБНЫЙ РАЗБОР РАССУЖДЕНИЯ, ПРЕДСТАВЛЕННОГО МАГИСТРОМ ПОПОВЫМ ПОД НАЗВАНИЕМ «ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ, ПРИВЕДЕННЫХ К ЛИНЕЙНОМУ ВИДУ», НА СТЕПЕНЬ ДОКТОРА МАТЕМАТИКИ И АСТРОНОМИИ

До сих пор еще немногие из математиков занимались интегрированием тех уравнений Динамики, которые представляют или явления звука в упругих жидкостях, или волнение на поверхности несжимаемых жидкостей. Все подобные уравнения стараются приводить к линейному виду, чтоб облегчить интегрирование. Пример, каким образом линейныя дифференциальныя уравнения второго [порядка могут вполне быть интегрированы, находим у первого Фурье, в его сочинении Theorie analytique de la chaleur. Интегрирование линейного дифференциального уравнения, которое представляет распространение звука в воздухе, дал первый Пуассон в общем виде (Journal de l'école polytechnique, T. VII) и впоследствии, не ограничиваясь даже предположением, чтобы скорости движения по направлению перпендикулярных осей были частными дифференциалами одной функции (Sur la propagation du mouvement dans les milieux élastiques, Mém. lu à l'Academie, le 11 Octobre 1830; Mémoires de l'Institut, T. X.). Интегрирование дифференциальных уравнений, которые представляют волнение на поверхности несжимаемой жидкости, дал тоже первый Пуассон в своем сочинении Mémoire sur la théorie des ondes, lu le 2 Octobre et 18 Décembre 1815 (Mémoires de l'Institut, T. I). Интегрированием тех же уравнений занимался потом Коши, которого сочинение, Théorie de la propagation des ondes à la surface d'un fluide pesant d'une profondeur indéfinie, увенчано было Академией наук

в Париже и напечатано в Mémoires presentés par divers savans, T. I, l'an 1827 *.

Во всех этих теориях уравнения для распространения звука в упругой средине и для волнения несжимаемой жидкости на поверхности или внутри ничего между собой общего не представляли. Это не могло быть иначе, потому что в одном случае предполагали жидкость упругой, а в другом совершенно несжимаемой. Между тем упругость принадлежит всем жидкостям без исключения, так что самое движение, собственно говоря, без упругости в них происходить не может.

Теория волнений и звука представляла еще то несовершенство, что в ней сообщение движения предполагалось по тому же закону, как и распространение давления во время покоя. Навье старался поправить этот недостаток предположением хотя вероятным, но за всем тем произвольным. Взгляд Пуассона в теории движения жидкостей может назваться совершенно основательным, когда он представляет себе жидкость рядом упругих тел (Journal de l'école polytechnique, T. XIII) *. Так он приходит к общим уравнениям Гидродинамики, где явления звука и волнений заключаются как частный случай при различных ограничениях и предположениях. Интегрирования уравнений в этом виде оставалось еще желать. Г. Попов выбрал это предметом для своего рассуждения.

Он ограничивается во-первых тем случаем, когда члены с двойным размером в отношении к скорости движения ⊘ делаются

* Приводим библиографические данные сочинений, упоминаемых Лобачевским:

Fourier — Théorie analytique de la chaleur. Paris, 1822.

Poisson — Sur la théorie du son. Journal de l'École polytechnique, т. VII, 1808, стр. 319—392.

Poisson — Sur la propagation du mouvement dans les milieux élastiques. Mémoires de l'institut, т. X, 1831, стр. 549—605.

Poisson — Mémoire sur la théorie des ondes. Mémoires de l'Academie royale de l'Institut de France, Année 1816, т. I, 1818, стр. 71—186.

Cauchy — Mémoire sur la propagation des ondes à la surface d'une fluide pésant d'une profondeur indéfinie. Mémoires présentés par divers savans à l'Academie royale des sciences de l'Institut de France. Sciences mathématiques et physiques т. I, 1827, стр. 3—312.

* Poisson — Mémoire sur les équations générales d'équilibre et du Mouvement des Corps solides, élastiques et des fluides. Journal de l'École polytechnique, 20 cahier, т. XIII, 1831, стр. 1—174.

⊘ То-есть члены, содержащие квадраты и произведения проекций скоростей, а также их производных.

нечувствительны — предположение, которое обыкновенно допускают в теории звука и волнений. Потом сочинитель приводит дифференциальные уравнения к линейному виду, предполагая во время движения изменение плотности весьма малым (ур. 10) *. Однако ж это предположение надобно разуметь так, что в урав. (10) плотность ρ' принадлежит в равновесии месту, куда частичка принесена движением. Далее уравнение (11) заключает в себе новое предположение, что давление p', которое надобно разуметь подобно ρ', разнится с p в движении для того же места пропорционально изменению в плотности $\rho's$, какое на месте произошло. Эта пропорциональность выражается множителем $\frac{\lambda}{\varepsilon}$, где числу ε принадлежит определенное значение, как видно из уравнения (7) [1]. Уравнение (11) может быть заменено таким:

$$\rho = \varepsilon p + (\lambda - 1)\rho' s - \varepsilon H,$$

которое и приведено тут же выше, или еще уравнением

$$p - H = \frac{\rho}{\varepsilon} \cdot \frac{1 - \lambda s}{1 - s};$$

или, наконец, за малостию s можно принимать

$$p - H = \frac{\rho}{\varepsilon}[1 - (\lambda - 1)s].$$

Откуда видно, что предпо|ложение сочинителя заключается в том, что изменения в давлении должны быть пропорциональны изменениям в плотности, покуда те и другия очень малы; далее, что эта пропорциональность может быть различна в зависимости новой плотности от прежней и новой упругости от прежней плотности. Предположение дозволенное и столько же общее, как и принятое Пуассоном в содержании * давления к степени от плотности. (Traité de Méc. T. II, p. 647) ⊘. Если колебания в жидкости чрезвычайно

---

* См. «Краткое изложение содержания диссертации А. Ф. Попова» (стр. 400—411 наст. тома). Все формулы, на которые имеются ссылки в отзыве Лобачевского, приведены в «кратком изложении».

* То-есть в отношении.

⊘ Poisson — Traité de Mécanique. Seconde édition, т. II, 1833. Здесь имеется в виду выведенное Пуассоном уравнение адиабатического процесса $\frac{p}{\rho^{\varkappa}} = c$, где $\varkappa$ — показатель адиабаты.

малы, то известно, что предположение $\rho = \varepsilon(p - H)$, которое собственно принадлежит равновесию, удовлетворяет и явлениям движения, а следовательно во всяком другом случае, которыя здесь рассматриваются, число λ должно весьма мало разниться от единицы. На это замечание сам сочинитель намекает в след за уравнением (22). Далее, сравнение того предположения, которое сделал здесь сочинитель, с тем, которое принадлежит Пуассону, ведет к заключению, что число λ можно принимать за постоянное, как опыты показали в подтверждение теории Пуассона.

С такими предположениями общие уравнения для движения (a), (b), (c), (d), (e) [2] принимают линейный вид дифференциальных с постоянными множителями, каковы (12) и (13). Четыре уравнения (12) и (13), которыя должны определять движение вполне, заменяет сочинитель одним (14), где уже предполагается существование трех уравнений (5). Таким образом, все решение зависит от интегрирования одного уравнения (14). Из этого последнего в статье 4, довольствуясь предположением Даламберта и пренебрегая действием тяжести, сочинитель выводит уравнения, обыкновенно принимаемые в теории звука. Далее в статье 5, предполагая жидкость несжимаемой, сочинитель находит отсюда также известные уравнения в теории волн. Итак достоинство теории, предположенной сочинителем, уже заключается в том, что она обнимает собою до того две раздельные теории.

Впрочем, для такого перехода от одного случая к другому, надобно собственно довольствоваться уравнениями (11), (12) и (14), в которых заключается уравнение (13) само собою. Этот переход должен быть сделан в предположении весьма малой сжимаемости, которой значение, выраженное числом, может быть только пренебрежено в конце счета. Действительное понятие о природе жидкостей делает невозможным и самое движение без способности сжиматься. Для $h = 0$ или следуя теории Даламберта *, получим вместо сказанных уравнений такие:

$$p = p' - \frac{\lambda}{\varepsilon} \rho' s, \qquad (11)$$

* D'Alembert — Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides. Paris, 1744.

$$\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{\lambda}{\varepsilon}\left\{\frac{d^2s}{dx^2}+\frac{d^2s}{dy^2}+\frac{d^2s}{dz^2}\right\}+(2\lambda-1)\,g\,\frac{ds}{dz}+\varepsilon g^2(\lambda-1)\,s, \quad (15)$$

$$\frac{du}{dt}=\frac{\lambda}{\varepsilon}\cdot\frac{ds}{dx}; \quad \frac{dv}{dt}=\frac{\lambda}{\varepsilon}\cdot\frac{ds}{dy}; \quad \frac{dw}{dt}=\frac{\lambda}{\varepsilon}\cdot\frac{ds}{dz}+(\lambda-1)\,gs.$$

По свойству текучих жидкостей * должно почитать как s, так и $\lambda-1$ весьма малыми, а следовательно, движение таких жидкостей достаточно представят уравнения

$$p=p'-\frac{p'}{\varepsilon}\,s,$$

$$\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{1}{\varepsilon}\left\{\frac{d^2s}{dx^2}+\frac{d^2s}{dy^2}+\frac{d^2s}{dz^2}\right\}+g\,\frac{ds}{dz},$$

$$\frac{du}{dt}=\frac{1}{\varepsilon}\,\frac{ds}{dx}; \quad \frac{dv}{dt}=\frac{1}{\varepsilon}\,\frac{ds}{dy}; \quad \frac{dw}{dt}=\frac{1}{\varepsilon}\,\frac{ds}{dz}.$$

Итак, во-первых надобно определить φ такую функцию от x, y, z и t, чтобы

$$\varepsilon\,\frac{d^2\varphi}{dt^2}=\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}+\varepsilon g\cdot\frac{d\varphi}{dz}. \quad (24)$$

После чего полагать *

$$s=\varepsilon\cdot\frac{d\varphi}{dt}$$

и следовательно

$$u=\frac{d\varphi}{dx}; \quad v=\frac{d\varphi}{dy}; \quad w=\frac{d\varphi}{dz}.$$

Предположение несжимаемой жидкости превращает уравнение (24) в такое:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}=0, \quad (25)$$

которое действительно выражает собою неизменяемость объема. Итак, предполагая это уравнение во всей строгости справедливым

---

* То-есть капельных жидкостей.

* Если рассматривать случай потенциального течения, то предпоследние уравнения могут быть переписаны следующим образом:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)=\frac{\lambda}{\varepsilon}\,\frac{ds}{dx}; \quad \frac{d}{dy}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)=\frac{\lambda}{\varepsilon}\,\frac{ds}{dy}; \quad \frac{d}{dz}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)=\frac{\lambda}{\varepsilon}\,\frac{ds}{dz}.$$

Отсюда, полагая $\lambda=1$, а ε — величиной постоянной, находим:

$$s=\varepsilon\,\frac{d\varphi}{dt}.$$

и относя это условие собственно к роду движения, из уравнения (24), оставаясь верными общей теории, получим

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = g\frac{d\varphi}{dz}. \tag{33}$$

{В дополнение к уравнениям (25) и (33) надобно принять уравнение

$$s = \varepsilon \cdot \frac{d\varphi}{dt},$$

или, что все равно, на основании уравнения (11) прибавить

$$p = p' - \rho' \cdot \frac{d\varphi}{dt}.$$

Куда поставя D вместо ρ', плотность несжимаемой жидкости, а вместо p' поставя Dgz, приходим к уравнению

$$\frac{p}{D} = gz - \frac{d\varphi}{dt}. \tag{28}$$

Три уравнения (25), (33) и (28) представляют собою теорию волнения несжимаемых жидкостей, как она до сих пор рассматривалась в строгом предположении несжимаемости, и как она следует в виде частного случая из общей теории в предположении собственно нечувствительного сжатия.

Вместо того, чтоб итти прямым путем, которым я здесь прихожу к уравнениям (25), (33) и (28), сочинитель заменяет уравнение (25) таким

$$\frac{d^2p}{dx^2} + \frac{d^2p}{dy^2} + \frac{d^2p}{dz^2} = 0,$$

присоединяя сюда уравнение (28), которое должно служить потом для определения φ. Далее обращает он внимание на то, что выбор функции p ограничен как последним уравнением, так и в уравнениях (3), где предполагается p данной функцией для всех x, y при начале движения, если я хорошо отгадываю его мысль, которая впрочем тут не совсем ясно выражена *. Наконец, решение будет окончено, когда придем к уравнению

$$z' = \psi(x, y, t), \tag{29}$$

* При решении уравнения Лапласа, которому удовлетворяет давление P, нужно считать эту величину заданной на координатной плоскости для любого момента времени.

начиная с z данной функции от x, y для $t=0$ и для свободной поверхности, для которой p дано в продолжении всего движения. Итак, ограничиваясь одною свободной поверхностию и дифференцируя уравнение (29), получим

$$\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)=\left(\frac{dz'}{dt}\right)+\left(\frac{dz'}{dx}\right)\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)+\left(\frac{dz'}{dy}\right)\left(\frac{d\varphi}{dy}\right), \tag{31}$$

где пренебрегая двумя последними членами за малостию, можем почитать

$$\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)=\left(\frac{dz'}{dt}\right),$$

которое уравнение в соединении с уравнением (28) дает для p' постоянного

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=g\frac{d\varphi}{dz}.$$

Для переменного p' должно бы написать, как делает сочинитель,

$$\frac{dp'}{D\,dt}=g\,\frac{d\varphi}{dz}-\frac{d^2\varphi}{dt^2},$$

где переменная часть в p' может быть впрочем пополнена в интегрировании прежних уравнений (25), (23) и (28). Итак, вывод, сделанный сочинителем, предполагает в уравнении (29) свободную поверхность с сохранением своих материальных частичек в продолжении всего движения. Между тем, такое ограничение для движения можно рассматривать, наоборот, следствием из уравнений (25), (23) и (28).

Впрочем Г. сочинитель в интегрировании общих дифференциальных уравнений собственно следует указанному мной способу для перехода от теории звука к теории волн на поверхности жидкостей *.

Способ интегрирования, которым пользуется сочинитель, составлен по образцам, какие мы находим в творениях Фурье и Пуассона.

Уравнение (14), которого интегрирование, с удовлетворением особенных условий, должно заключать в себе полную теорию звука

* Здесь Н. И. Лобачевский, очевидно, имеет в виду сделанное им устное указание А. Ф. Попову.

и волн, когда сюда ставим

$$s = \varphi e^{-gez},$$

принимает вид

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + g\frac{d\varphi}{dz} = \frac{\lambda}{\varepsilon}\left\{\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right\} + \frac{\lambda h}{\varepsilon}\left\{\frac{d\frac{d^2\varphi}{dx^2}}{dt} + \frac{d\frac{d^2\varphi}{dy^2}}{dt} + \frac{d\frac{d^2\varphi}{dz^2}}{dt}\right\} \quad (37)$$

и может быть удовлетворено предположением

$$\varphi = \sum T \cdot e^{\mu(z-\gamma)\sqrt{-1}}\cos a(x-\alpha)\cdot\cos b(y-\beta), \qquad (38)$$

где a, b, α, β, γ, μ — произвольные постоянные, к различному значению которых относится знак суммы. Множитель T должен служить интегралом уравнению

$$\frac{d^2T}{dt^2} + \frac{\lambda}{\varepsilon}(a^2+b^2+\mu^2)\left(h\frac{dT}{dt}+T\right) + g\mu\sqrt{-1}\cdot T = 0$$

и следовательно

$$T = Ae^{\xi' t} + Be^{\xi'' t}$$

с A, B — произвольными постоянными, с ξ', ξ'' — корнями уравнения

$$\xi^2 + \frac{\lambda}{\varepsilon}(a^2+b^2+\mu^2)h\xi + \frac{\lambda}{\varepsilon}(a^2+b^2+\mu^2) + g\mu\sqrt{-1} = 0. \qquad (39)$$

Корням этого уравнения можно всегда дать такой вид:

$$\xi' = -p + n - q\sqrt{-1},\ \xi'' = -p - n + q\sqrt{-1}.$$

С этим представлением интеграла в общем виде надобно достигнуть еще той цели, чтобы в интеграле заключались данные функции при начале движения.

Для волн на поверхности текучей жидкости, при том в беспредельной массе, достаточно принимать

$$\varphi = \sum e^{-\mu(z+z')}\cos a(x-\alpha)\cos b(y-\beta)\{A\cos(t\sqrt{g\sqrt{a^2+b^2}}) + B\sin(t\sqrt{g\sqrt{a^2+b^2}})\}, \qquad (44)$$

где a, b, α, β, A, B, μ, z' — произвольные постоянные. Последнее постоянное z' должно сохранять сумме $z+z'$ положительное значение; иначе, как доказывает последствие, функция φ получает неопределенное значение для весьма малого z *.

---

* Последнее предложение следует понимать в том смысле, что ряд (44) расходится, когда сумма $z+z'$ имеет отрицательное значение. В этом случае при произвольном положительном μ члены ряда могут стать сколь угодно большими.

Интересно отметить, что во времена Лобачевского сумму расходящегося ряда называли неопределенной.

Вообще в теории волн как воздухообразных, так и текучих жидкостей, можно довольствоваться выражением интеграла в таком виде:

$$\varphi = \sum \cos a(x-\alpha)\cos b(y-\beta)\, e^{-pt}\{(Ae^{nt}+Be^{-nt})\cos qt \cos \mu(z-\gamma) + (Ae^{nt}-Be^{-nt})\sin qt \sin \mu(z-\gamma)\} \text{ [3]}, \quad (42)$$

где a, b, A, B, α, β, γ, μ — произвольные постоянные, p, q, n — числа, которых значения даны выше; а знак суммы относится только к положительным a, b, μ.

5 | Если интеграл (42) для $t=0$ должен обращаться в данную функцию от x, y, z, то

$$A+B=\frac{1}{2}F(\alpha, \beta, \gamma)\,^*,$$

где F — знак функции, а знак суммы в уравнении (42) представляет уже кратный интеграл для α, β, γ и кратную сумму для a, b, μ с постоянным множителем. Крайние значения α, β, γ при интегрировании те самые, между какими крайними значениями x, y, z заключается масса.

Далее сочинитель предполагает $A=B$ с тою целию, чтобы для $t=0$ член в φ с синусом от $\mu(z-\gamma)$ уничтожался. Таким образом, в интеграле остается одна произвольная функция. В этом ограничении не нахожу никакой надобности, потому что в интеграле для полноты можно ввести две произвольные функции, означив вторую $f(x, y, z)$ от x, y, z и полагая

$$A-B=-\frac{q}{\mu}e^{\frac{\mu}{q}n\gamma}\int[f(\alpha, \beta, \gamma)+pF(\alpha, \beta, \gamma)]\,e^{-\frac{\mu}{q}n\gamma}\,d\alpha\, d\beta\, d\gamma\,\Delta a\,\Delta b\,\Delta\mu.$$

Здесь начало интеграла в отношении к γ произвольно; но чтоб выражение (42) удовлетворяло уравнению (37), надобно располагать этой границей и самой функцией $f(x, y, z)$ так, чтобы $A-B$ сохраняло свое значение для крайних границ γ, где уже как частный случай заключается условие $f(x, y, z)+pF(x, y, z)=0$, которое принимает сочинитель [ур. (52)].

В случае беспредельной массы надобно ставить $da\,db\,d\mu$ вместо $\Delta a\,\Delta b\,\Delta\mu$, знак суммы заменять тройным интегралом с границами нуль и $+\infty$.

---

* В оригинале эта формула по недосмотру имеет вид:

$$A+B=d\alpha\, d\beta\, d\gamma\,\Delta a\,\Delta b\,\Delta\mu\, F(\alpha, \beta, \gamma).$$

В самом тексте диссертации она напечатана правильно (см. стр. 404 наст. тома).

В теории для волнения всех жидкостей сочинитель справедливо довольствуется первыми степенями от ε и $\frac{h}{\varepsilon}$, принимая

$$p=\frac{h\lambda}{2\varepsilon}(a^2+b^2+\mu^2),$$

$$n=-\frac{g\mu\sqrt{\frac{\varepsilon}{\lambda}}}{2\sqrt{a^2+b^2+\mu^2}},$$

$$q=-\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}\sqrt{a^2+b^2+\mu^2}.$$

|При изменениях в самой причине волнения сочинитель пользуется законом наложения малых движений.

В движении жидкости прикосновенной к стенам сосуда предположение сделано то, без которого обойтись нельзя, что частички не оставляют прикосновения *.

Теперь следует переход к волнению текучих жидкостей, которые рассматриваются собственно сжимаемыми, как и должно понимать в них сообщенное движение. В этой теории сочинитель из общего уравнения (37) откидывает член с h и принимает $\lambda=1$. Уравнение делается

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right)+g\,\frac{d\varphi}{dz}, \tag{74}$$

где сжатие

$$s=\varepsilon\left(\frac{d\varphi}{dt}\right),$$

скорости по направлению коордонат

$$u=\frac{d\varphi}{dx},\quad v=\frac{d\varphi}{dy},\quad w=\frac{d\varphi}{dz}.$$

К тому уравнение (28) для свободной поверхности, где $p=0$ и $z=z'$,

$$z'=\frac{1}{g}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right). \tag{76}$$

Уравнению (74) удовлетворяет

$$\varphi=\sum\{A\cos t\sqrt{N}+B\sin t\sqrt{N}\}\,e^{-\mu z}\cos a(x-\alpha)\cos b(y-\beta), \tag{77}$$

где a, b, α, β, μ — произвольные постоянные, A, B — произвольные функции от α, β, и где

$$N\varepsilon=a^2+b^2-\mu^2+g\varepsilon\mu.$$

* То-есть частицы жидкости прилегают к стенкам.

Из значения для w находим координату z, разумея под z_0 ее начальное значение для $t=0$,

$$z=z_0-\sum\{A\sin t\sqrt{N}-B\cos t\sqrt{N}\}\frac{\mu}{\sqrt{N}}e^{-\mu z}\cos a(x-\alpha)\cos b(y-\beta)-$$
$$-\sum\frac{\mu B}{\sqrt{N}}e^{-\mu z}\cos a(x-\alpha)\cos b(y-\beta).$$

30 |Для частички, приведенной на свободную поверхность, в этом уравнении под знаком суммы, почитая приближенно $z'=0$, получим

$$z'=z_0-\sum\{A\sin t\sqrt{N}-B\cos t\sqrt{N}\}\frac{\mu}{\sqrt{N}}\cos a(x-\alpha)\cos b(y-\beta)-$$
$$-\sum\frac{\mu B}{\sqrt{N}}\cos a(x-\alpha)\cos b(y-\beta).$$

Между тем уравнение (76) дает z' для точек на свободной поверхности

$$z'=\frac{1}{g}\sum\{B\cos t\sqrt{N}-A\sin t\sqrt{N}\}\sqrt{N}\cos a(x-\alpha)\cos b(y-\beta). \quad (80)$$

Разность двух значений z' должна быть нечувствительной, а потому

$$z_0=\sum\frac{\mu B}{\sqrt{N}}\cos a(x-\alpha)\cos b(y-\beta).$$

Если оба значения z' принимаем для одной материальной точки, то последнее уравнение сделается уравнением для начальной поверхности, которое пусть будет

$$z=f(x,\ y)$$

и вместе

$$f(x,\ y)=\sum\frac{\mu B}{\sqrt{N}}\cos a(x-\alpha)\cos b(y-\beta). \quad (81)$$

Сличение прочих членов в двух значениях для z' дает

$$\mu=\sqrt{a^2+b^2},\quad \sqrt{N}=\sqrt{g}\sqrt[4]{a^2+b^2}.$$

После чего

$$\varphi=\sum\{A\cos t\sqrt{N}+B\sin t\sqrt{N}\}e^{-z\sqrt{a^2+b^2}}\cos a(x-\alpha)\cos b(y-\beta). \quad (l)$$

Выражение (81) требует принимать

$$B=\frac{gf(\alpha,\ \beta)}{\sqrt{N}}\Delta a\,\Delta b\,d\alpha\,d\beta$$

и разуметь знак суммы двойным знаком интеграла в отношении к α, β и двойным знаком суммы в отношении к a, b.

Сочинитель замечает, что интеграл (l) удовлетворяет уравнениям (25) и (33), как выражение, куда ε не входит, тогда как
11 жидкость предполагалась вначале сжимаемой. | Я с своей стороны могу прибавить, что этот интеграл должен таким образом принадлежать предположению жидкости, как доказал я выше для самых уравнений (25) и (33).

Выражение (l) с двойным интегралом вместо двойной суммы в отношении к a и b для беспредельной жидкости будет

$$\varphi = \frac{g}{\pi^2} \int\int\int\int \{f(\alpha, \beta) + A \cos t\sqrt{N}\} \frac{\sin t\sqrt{N}}{\sqrt{N}} \times$$

$$\times e^{-\varepsilon\sqrt{a^2+b^2}} \cos a(x-\alpha) \cos b(y-\beta) \underset{0}{\overset{\infty}{da}}\, \underset{0}{\overset{\infty}{db}}\, \underset{-}{\overset{+}{d\alpha}}\, \underset{-}{\overset{+}{d\beta}}. \quad (84)$$

Если в начале движения поверхность изменяется без удара на нее, то $A = 0$ и выражение (84) будет то же, какое дал Пуассон в Mémoire de l'Institut, T. I *.

Если к тому начальная скорость дана

$$w_0 = \psi(x\ y).$$

то уравнение

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = gw$$

для $t = 0$ требует принимать

$$A = -\frac{g\,\psi(\alpha, \beta)}{N}.$$

В этом виде, с данными скоростями, определение начального состояния представляет совершенно ясное понятие, тогда как Коши в его записке sur la propagation des ondes * говорит об ударе ⊘ (percussion), не соединяя при этом никакой определенной мысли.

От новых ударов на жидкость волнение может быть присоединяемо к прежнему, и таким образом в их непрерывном последовании представлять движение с переменным давлением. Сочинитель достигнул той же цели, рассматривая переменное давление как побудительную силу к движению, именно присоединяя $\frac{dp'}{D\,dt}$ к $g\frac{d\varphi}{dz}$ в уравнении (33). Таким образом, уравнение (97) дает значение

* См. сноску * на стр. 382 (третий мемуар Пуассона).

* См. ту же сноску.

⊘ Термин «удар» нужно понимать в смысле импульса сил давлений.

функции φ из трех членов, из которых первый происходит от изменения в поверхности, второй — от удара на поверхность, третий — от непрерывно переменного давления. Сочинитель рассматривает еще случай, когда волнение происходит от плывучего тела с равномерным движением.

В движении воздухообразной жидкости сочинитель, отбрасывая в уравнении (87) член с множителем g, пишет

12 |

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=n^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right)+k\left(\frac{d\,\frac{d^2\varphi}{dx^2}}{dt}+\frac{d\,\frac{d^2\varphi}{dy^2}}{dt}+\frac{d\,\frac{d^2\varphi}{dz^2}}{dt}\right), \quad (100)$$

разумея

$$n^2=\frac{\lambda}{\varepsilon}, \quad k=\frac{h\lambda}{\varepsilon},$$

не принимая, следовательно, в рассуждение тяжести, но обращая внимание на сопротивление в сообщенном движении.

Интеграл уравнения (100), когда пренебрегаем k^2, берет такой вид

$$\varphi=\sum e^{-\frac{1}{2}kc^2t}(A'\cos nct+B'\sin nct)\,Q,$$

где

$$Q=\cos a(x-\alpha)\cos b(y-\beta)\cos\mu(z-\gamma).$$

Для беспредельной массы

$$\varphi=\frac{1}{\pi^3}\iiiiiint f(\alpha,\beta,\gamma)\,e^{-\frac{1}{2}kc^2t}\left(\cos nct+\frac{1}{2}kc^2\sin nct\right)Q\,\overset{\infty}{\underset{0}{da}}\,\overset{\infty}{\underset{0}{db}}\,\overset{\infty}{\underset{0}{d\mu}}\,\overset{+}{\underset{-}{d\alpha}}\,\overset{+}{\underset{-}{d\beta}}\,\overset{+}{\underset{-}{d\gamma}}+$$

$$+\frac{1}{\pi^3}\iiiiiint \psi(\alpha,\beta,\gamma)\,e^{-\frac{1}{2}kc^2t}\,\frac{\sin nct}{nc}\,Q\,\overset{\infty}{\underset{0}{da}}\,\overset{\infty}{\underset{0}{db}}\,\overset{\infty}{\underset{0}{d\mu}}\,\overset{+}{\underset{-}{d\alpha}}\,\overset{+}{\underset{-}{d\beta}}\,\overset{+}{\underset{-}{d\gamma}} \quad (112)$$

и где

$$c^2=a^2+b^2+\mu^2;$$

функции $f(x, y, z)$, $\psi(x, y, z)$ представляют начальные сжатие и скорость.

Другой вид (114) тому же интегралу дают полярные координаты u, θ, ω вместо a, b, μ. Интегрирование в отношении к θ, ω может быть произведено непосредственно. Таким образом выходит выражение (117) для φ с четверным интегралом. Значение функции φ для первых мгновений движения дается тройным интегралом (126) и по прошествии значительного времени двойным интегралом (125), где с $k=0$ приходим к формуле Пуассона.

Сочинитель в конце своего рассуждения дает решения некоторых вопросов, которыми до него еще никто не занимался. Рассматривает, в закрытом параллелепипеде, происхождение звука мгновенно произведенного или продолженного, с отражением от стен.
13 Принимая в | рассуждение действиé тяжести, говорит вообще о волнении в жидкости, текучей и воздухообразной, которая опирается на горизонтальную плоскость. В решении всех этих любопытных и трудных в анализе вопросов он умел пользоваться образцовыми способами знамеиитых математиков, применять их к настоящему случаю и распространять в новом или более обширном виде. К чести сочинителя могу сказать вообще, что в этом соединеиии двух теорий, о волнении текучих и воздухообразных жидкостей, вижу большую услугу для науки.

Заслуженный Профессор Лобачевский.

11 Апреля 1845.

ПРИМЕЧАНИЯ

[1] ε — величина, обратная квадрату скорости звука [см. формулу (7) диссертации Попова[1])]. Величина λ при любой зависимости вида $\frac{P}{\rho^n}=c$, где c — постоянная, равна единице.

В самом деле, по формулам (10) и (11)[2]), имеем

$$p=p'\left(1-\frac{\lambda}{\varepsilon}\frac{\rho' s}{p'}\right),$$

$$\rho=\rho'(1-s),$$

откуда следует

$$\frac{p}{\rho^n}=\frac{p'}{\rho'^n}\frac{1-\frac{\lambda}{\varepsilon}\frac{\rho' s}{p'}}{(1-s)^n}$$

или, при достаточно малом s,

$$\frac{\lambda}{\varepsilon}\frac{\rho'}{p'}=n.$$

Принимая во внимание выражение квадрата скорости звука

$$a^2=\frac{np'}{\rho'},$$

легко находим $\lambda=1$.

[2] Уравнения (a) имеют в диссертации вид

$$\rho\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)=\frac{d\omega}{dx}+\beta\left(\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}\right),$$

$$\rho\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)=\frac{d\omega}{dy}+\beta\left(\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{d^2v}{dz^2}\right),$$

$$\rho\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)=\frac{d\omega}{dz}+\beta\left(\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{d^2w}{dy^2}+\frac{d^2w}{dz^2}\right),$$

где X, Y, Z — проекции массовой силы на оси x, y, z; β — коэффициент вязкости, $\omega=p+h\left(\frac{dp}{dt}+u\frac{dp}{dx}+v\frac{dp}{dy}+w\frac{dp}{dz}\right)$.

---

1) Стр. 402 наст. тома.

2) Стр. 400.

Эти уравнения получены Навье и Пуассоном на основании различных соображений о взаимодействии между молекулами.

В современных руководствах по гидромеханике дается вывод, свободный от подобного рода предположений [1]).

Выражение h легко может быть найдено, если принять во внимание равенство

$$\omega = p + \frac{\nu}{3} \operatorname{div} \overline{v}.$$

Пользуясь уравнением неразрывности, последнее можно представить в виде

$$\omega = p + \frac{\mu}{3\rho} \frac{d\rho}{dt}$$

или

$$\omega = p + \frac{\mu}{3\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} u + \frac{\partial p}{\partial y} v + \frac{\partial p}{\partial z} w \right);$$

отсюда

$$h = \frac{\mu}{3\rho} \frac{d\rho}{dp}.$$

Очевидно, величину h можно считать постоянной только при малых скоростях движения жидкости.

Величина h обращается в нуль в двух случаях:

1) при $\mu = 0$, т. е. для жидкости, не обладающей вязкостью,

2) при $\frac{d\rho}{dp} = 0$, т. е. для несжимаемой жидкости.

[3] В данном случае правая часть формулы (42) представляет собой интеграл Фурье. Как показывается в теории интегралов Фурье, любая функция переменного x, имеющая период $2\pi\lambda$ и удовлетворяющая условиям Дирихле, может быть представлена следующим образом:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi\lambda} \int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(t)\, dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(t) \cos \frac{n(x-t)}{\lambda} dt.$$

Вводя обозначения $\frac{n}{\lambda} = a$, $\frac{1}{\lambda} = \Delta a$, это равенство можно переписать в следующей форме:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{n\pi}{a}}^{\frac{n\pi}{a}} f(t)\, \Delta a\, dt + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta a \int_{-\frac{n\pi}{a}}^{\frac{n\pi}{a}} f(t) \cos a(x-t)\, dt.$$

---

[1]) См., например, Н. Е. Кочин, И. А. Кибель и Н. В. Розе — Теоретическая гидромеханика, ч. II, Гостехиздат, 1948, стр. 285.

Отсюда, переходя формально к пределу при $\Delta a \to 0$, получим:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty da \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos a(x-t)\, dt.$$

Последняя формула легко обобщается на случай функций трех переменных следующим образом:

$$f(x, y, z) =$$
$$= \frac{1}{\pi^3} \int\int\int\int\int\int f(\alpha, \beta, \gamma) \cos a(x-\alpha) \cos b(y-\beta) \cos c(z-\gamma) \times$$
$$\times\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, da\, db\, dc.$$

Приведенное рассуждение, принадлежащее в основном Фурье, с современной точки зрения не представляет доказательства[1]. В последнем интеграле a, b, c меняются от нуля до ∞. Пределы интегрирования по α, β, γ совпадают с пределами изменения переменных x, y, z в области, в которой $f(\alpha, \beta, \gamma) \neq 0$.

В диссертации Попова и отзыве Лобачевского пределы интегрирования поставлены снизу и сверху дифференциалов.

Приведем в качестве примера формулу (84):

$$\varphi = \frac{g}{\pi^2} \int\int\int\int \{f(\alpha, \beta) + A \cos t\sqrt{N}\} \frac{\sin t\sqrt{N}}{\sqrt{N}} e^{-z\sqrt{a^2+b^2}} \times$$
$$\times \cos a(x-\alpha) \cos b(y-\beta) \underset{0}{\overset{\infty}{da}}\; \underset{0}{\overset{\infty}{db}}\; \underset{-}{\overset{+}{d\alpha}}\; \underset{-}{\overset{+}{d\beta}}.$$

Здесь знаки минус и плюс указывают на то, что интегрирование по α и β производится между крайними значениями x, y, принадлежащими области, в которой подинтегральное выражение отлично от нуля.

---

[1]) См. Е. Титчмарш — Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат, М. — Л., 1948.

ВВЕДЕНИЕ К ДИССЕРТАЦИИ[1])

А. Ф. Попов

Способы настоящего Анализа позволяют предпринять интегрирование дифференциальных уравнений Гидродинамики только в двух общих предположениях: 1) если движение жидкости представляет поток постоянного вида, и 2) если скорости частичек в жидкой массе вообще незначительны. В первом предположении уничтожаются члены, которые представляют частные дифференциалы для функций движения в отношении ко времени, потому что две частички постоянного потока, проходя чрез одну точку в пространстве, описывают ту же кривую линию. Напротив, в последнем предположении частные дифференциалы в отношении времени остаются, тогда как члены, для главной части движения в потоке, уничтожаются.

Такое уничтожение, в последнем случае, позволяет привести дифференциальные уравнения Гидродинамики к линейному виду. С этой простотой в уравнениях, доказывают равномерное распространение звука в воздухе, также законы распространения волн на поверхности воды. Однако же, решение обеих задач может подлежать еще сомнению, или, по крайней мере, почитаться неполным; потому что начинают обыкновенно с уравнений, составленных Д'Аламбертом, где члены, с чувствительным влиянием на образование и распространение волн, опущены.

В предлежащем рассуждении мы начинаем с уравнений Гидродинамики в том общем виде, в каком их предложили Навье и Пуассон, приводим их к линейному виду, сохраняя возможную общность при выборе вспомогательных условий; указываем члены, опущенные другими авторами; наконец, интегрируем составленные линейные уравнения в тех случаях, которые непосредственно применяются к Теории волн. Изложение, по сущности самого предмета, нельзя было сделать чисто аналитическим и независимым от физических положений; а потому, пользуясь ученым языком, я почел необходимым объяснить

---

[1]) Этот текст предшествует диссертации А. Ф. Попова без всякого названия (см. статью «Историко-библиографические сведения», стр. 414 наст. тома.)

с некоторою подробностию не только положения, но и принятые названия в Теории волн.

С того времени, как это сочинение поступило на рассмотрение Физико-Математического отделения, Г. Заслуженный Профессор Лобачевский, мой наставник в высшем Анализе, указал мне, в своих ученых замечаниях и советах, некоторые новые точки взгляда на мою задачу. Постараюсь оправдать и заслужить внимание, которым Его Превосходительство почтил мое сочинение.

КРАТКОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ СОДЕРЖАНИЯ ДИССЕРТАЦИИ А. Ф. ПОПОВА

Г. Г. Тумашев

Диссертация состоит из небольшой вводной части и двух глав, первая из которых содержит 6 «статей» (параграфов), а вторая — 16. В первой главе изложен метод приведения уравнения волнового движения жидкости к линейному виду, а во второй — интегрирование этих уравнений.

В настоящей статье все формулы и обозначения даны в том виде, в каком они приведены в работе А. Ф. Попова и в отзыве Н. И. Лобачевского. Сохранена также нумерация формул.

Во вводной части диссертации приведены полные уравнения гидродинамики в виде

$$\left.\begin{aligned} \rho\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)&=\frac{d\omega}{dx}+\beta\left(\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}\right),\\ \rho\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)&=\frac{d\omega}{dy}+\beta\left(\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{d^2v}{dz^2}\right),\\ \rho\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)&=\frac{d\omega}{dz}+\beta\left(\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{d^2w}{dy^2}+\frac{d^2w}{dz^2}\right), \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2}&=\frac{du}{dt}+u\frac{du}{dx}+v\frac{du}{dy}+w\frac{du}{dz},\\ \frac{d^2y}{dt^2}&=\frac{dv}{dt}+u\frac{dv}{dx}+v\frac{dv}{dy}+w\frac{dv}{dz},\\ \frac{d^2z}{dt^2}&=\frac{dw}{dt}+u\frac{dw}{dx}+v\frac{dw}{dy}+w\frac{dw}{dz}, \end{aligned}\right\} \tag{b}$$

$$\frac{dx}{dt}=u,\quad \frac{dy}{dt}=v,\quad \frac{dz}{dt}=w; \tag{c}$$

$$\omega=p+h\left(\frac{dp}{dt}+u\frac{dp}{dx}+v\frac{dp}{dy}+w\frac{dp}{dz}\right); \tag{d}$$

$$\frac{d\rho}{dt}+\frac{d\,\rho u}{dx}+\frac{d\,\rho v}{dy}+\frac{d\,\rho w}{dz}=0. \tag{e}$$

u, v, w — проекции скорости на оси координат x, y, z,

p, ρ — соответственно давление и плотность,

h, β — постоянные [1]).

В статье 1 дается общая характеристика волновых движений. Указывается, что движение частиц жидкости, приведенной в «волнение», заключается в малых колебаниях около положения равновесия; волновое движение газообразных тел состоит из последовательного расширения и сжатия слоев.

В статье 2 производится упрощение уравнений (a) и (b). Пренебрегая членами, содержащими квадраты и произведения проекций скоростей, а также их производные, и полагая $\beta = 0$, автор приводит эти уравнения к виду

$$\left.\begin{aligned} \rho\left(X - \frac{du}{dt}\right) &= \frac{d\omega}{dx}, \\ \rho\left(Y - \frac{dv}{dt}\right) &= \frac{d\omega}{dy}, \\ \rho\left(Z - \frac{dw}{dt}\right) &= \frac{d\omega}{dz}; \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

$$\omega = p + h\frac{dp}{dt}; \qquad (4)$$

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w; \qquad (5)$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{d\rho u}{dx} + \frac{d\rho v}{dy} + \frac{d\rho w}{dz} = 0. \qquad (6)$$

Уравнения (3) совпадают с уравнениями Эйлера при $h = 0$, что и предполагается в дальнейшем.

В статье 3 вводится предположение о том, что плотность во время движения изменяется незначительно и определяется по формуле

$$\rho = \rho'(1 - s), \qquad (10)$$

где s — функция от x, y, z, t остается малою, каково бы ни было значение переменных; ρ' — плотность в состоянии равновесия.

Далее выводится формула (11), выражающая зависимость давления от функции s:

$$p = p' - \frac{\lambda}{\varepsilon}\rho' s, \qquad (11)$$

где λ — некоторая постоянная.

---

[1]) См. примечание [2] на стр. 395.

Величина ε (сжатие) определяется как производная от плотности по давлению для состояния равновесия:

$$d\rho' = \varepsilon\, dp'. \tag{7}$$

Таким образом, ε — величина, обратная квадрату скорости звука.

Рассматривая состояние покоя, уравнения (3) можно заменить другими:

$$\frac{dp'}{dz} = \rho' g, \quad \frac{dp'}{dx} = 0, \quad \frac{dp'}{dy} = 0.$$

Эти уравнения в соединении с уравнением (7) дают

$$\frac{d\rho'}{\rho'} = \varepsilon g\, dz,$$

откуда после интегрирования получается

$$p' = \frac{D}{\varepsilon} e^{\varepsilon g z} + H, \tag{9}$$

где D — плотность жидкости при $z = 0$.

Вставляя в уравнения (3), (4) значения p, ρ из соотношений (10), (11) и пренебрегая вторыми степенями и произведениями малых величин, получаем следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\lambda}{\varepsilon}\left(\frac{ds}{dx} + h\frac{d\frac{ds}{dx}}{dt}\right), \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{\lambda}{\varepsilon}\left(\frac{ds}{dy} + h\frac{d\frac{ds}{dy}}{dt}\right), \\ \frac{dw}{dt} &= \frac{\lambda}{\varepsilon}\left(\frac{ds}{dz} + h\frac{d\frac{ds}{dz}}{dt}\right) + (\lambda - 1) gs + h\lambda g\frac{ds}{dt}, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} + \varepsilon g w. \tag{13}$$

Дифференцирование этих уравнений по x, y, z, t дает

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{\lambda}{\varepsilon}\left(\frac{d^2s}{dx^2} + \frac{d^2s}{dy^2} + \frac{d^2s}{dz^2}\right) + \frac{h\lambda}{\varepsilon}\left(\frac{d\frac{d^2s}{dx^2}}{dt} + \frac{d\frac{d^2s}{dy^2}}{dt} + \frac{d\frac{d^2s}{dz^2}}{dt}\right) +$$

$$+ 2\lambda g\left(\frac{ds}{dz} + h\frac{d\frac{ds}{dz}}{dt}\right) + \varepsilon g^2\lambda\left(s + h\frac{ds}{dt}\right) - g\frac{ds}{dz} - \varepsilon g^2 s. \tag{14}$$

В статье 4, приравнивая величину h нулю, из уравнения (14) выведено уравнение

$$\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{\lambda}{\varepsilon}\left(\frac{d^2s}{dx^2}+\frac{d^2s}{dy^2}+\frac{d^2s}{dz^2}\right)+(2\lambda-1)g\frac{ds}{dz}+\varepsilon g^2(\lambda-1)s. \tag{15}$$

Если при том же предположении пренебречь силой тяжести, то уравнения (12) и (14) заменятся уравнениями

$$\left.\begin{aligned}\frac{du}{dt}&=\frac{\lambda}{\varepsilon}\frac{ds}{dx},\\ \frac{dv}{dt}&=\frac{\lambda}{\varepsilon}\frac{ds}{dy},\\ \frac{dw}{dt}&=\frac{\lambda}{\varepsilon}\frac{ds}{dz},\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

$$\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{\lambda}{\varepsilon}\left(\frac{d^2s}{dx^2}+\frac{d^2s}{dy^2}+\frac{d^2s}{dz^2}\right). \tag{17}$$

Полагая

$$s=\frac{\varepsilon}{\lambda}\cdot\frac{d\varphi}{dt}, \tag{21}$$

где φ — потенциал скорости, уравнение (17) можно записать в виде

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=\frac{\lambda}{\varepsilon}\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right). \tag{22}$$

Для капельной жидкости, вместо уравнений (12) и (13), получается

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right)+g\frac{d\varphi}{dz}. \tag{24}$$

В статье 5 показано, что для несжимаемой жидкости уравнение (22) переходит в уравнение Лапласа

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}=0, \tag{25}$$

которое совместно с интегралом Лагранжа

$$\frac{p}{D}=gz-\frac{d\varphi}{dt} \tag{28}$$

определяет функцию φ.

Из уравнений (25) и (28) вытекает, что p — функция гармоническая.

Далее, если принять во внимание постоянство давления на свободной поверхности, получается условие

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=g\frac{d\varphi}{dz}. \tag{33}$$

В статье 6, завершающей первую главу диссертации, дан небольшой обзор развития теории волновых движений.

В статье 7 с помощью подстановки

$$s = \varphi e^{-g\varepsilon z} \tag{36}$$

уравнение (14) приводится к виду

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + g\frac{d\varphi}{dz} = \frac{\lambda}{\varepsilon}\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right) + \frac{h\lambda}{\varepsilon}\left(\frac{d\frac{d^2\varphi}{dx^2}}{dt} + \frac{d\frac{d^2\varphi}{dy^2}}{dt} + \frac{d\frac{d^2\varphi}{dz^2}}{dt}\right). \tag{37}$$

Решение ищется в виде

$$\varphi = \sum T e^{\mu(z-\gamma)\sqrt{-1}} \cos a(x-\alpha)\cos b(y-\beta), \tag{38}$$

где a, b, μ, α, β, γ — произвольные постоянные.

В статье 8 получено значение φ:

$$\varphi = 2\sum e^{-pt}(Ae^{nt} + Be^{-nt})\cos qt \cos a(x-\alpha)\cos b(y-\beta)\cos\mu(z-\gamma) + \\ + 2\sum e^{-pt}(Ae^{nt} - Be^{-nt})\sin qt \cos a(x-\alpha)\cos b(y-\beta)\sin\mu(z-\gamma), \tag{42}$$

где p, n, q определяются из соотношений

$$\frac{h\lambda}{2\varepsilon}(a^2+b^2+\mu^2) = p,$$

$$\frac{h\lambda}{2\varepsilon}\sqrt{(a^2+b^2+\mu^2)^2 - \frac{4\varepsilon}{\lambda h^2}(a^2+b^2+\mu^2) - \frac{4\varepsilon^2}{\lambda^2 h^2}g\mu\sqrt{-1}} = n - q\sqrt{-1}. \tag{40}$$

В статье 9 показано, что если значение φ при $t=0$ дано формулой

$$\varphi_0 = \sum F(\alpha,\ \beta,\ \gamma)\ \cos a(x-\alpha)\cos b(y-\beta)\cos\mu(z-\gamma), \tag{48}$$

то

$$A + B = \frac{1}{2}F(\alpha,\ \beta,\ \gamma). \tag{49}$$

В формуле (48) каждый член, стоящий под знаком суммы, предполагается умноженным на дифференциалы $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ и на конечные разности Δa, Δb, $\Delta\mu$. Интегрирование по α, β, γ производится между пределами изменения x, y, z, а суммирование по a, b, μ от $-\infty$ до $+\infty$.

Далее показано, что общий интеграл уравнения (37) будет

$$\varphi = 2\sum Ae^{-pt}(e^{nt} + e^{-nt})\cos qt \cos a(x-\alpha)\cos b(y-\beta)\cos\mu(z-\gamma) + \\ + 2\sum Ae^{-pt}(e^{nt} - e^{-nt})\sin qt \cos a(x-\alpha)\cos b(y-\beta)\sin\mu(z-\gamma). \tag{53}$$

Величины p, q, n определяются по формулам (40) и выбирается то решение уравнения (37), которое обращается в нуль при $t = \infty$.

В статье 10 даны приближенные выражения p, q, n, которые автор получает, пренебрегая в равенствах (40) членами степени выше первой относительно ε и $\frac{h}{\varepsilon}$. Эти выражения приведены в отзыве Н. И. Лобачевского.

В следующих статьях 11 и 12 получена формула для потенциала скорости в предположении, что причина, вызывающая волновое движение, непрерывно изменяется:

$$\varphi = 2\sum Q\left(A_0\psi(t) + \int\limits_0^{t'} \psi(t-\theta)\frac{dA}{d\theta}\,d\theta\right), \tag{58}$$

где

$$Q = \cos a(x-\alpha)\cos b(y-\beta)$$

$$\psi(t) = e^{-pt}(e^{nt}+e^{-nt})\cos qt.$$

В статье 13 рассматривается вопрос о граничных условиях. Ставится требование, чтобы на поверхности твердого тела $z = z(x, y)$ выполнялось условие

$$u\frac{dz}{dx} + v\frac{dz}{dy} - w = 0. \tag{67}$$

Подобным же образом условие на свободной поверхности $\psi(x, y, z, t) = 0$ записывается в виде

$$\frac{d\psi}{dt} + u\frac{d\psi}{dx} + v\frac{d\psi}{dy} + w\frac{d\psi}{dz} = 0. \tag{69}$$

В статье 14 разложение правой части формулы (9) в ряд дает:

$$p' = H + \frac{D}{\varepsilon} + Dgz + \frac{1}{2}D\varepsilon g^2z^2 + \ldots;$$

с другой стороны, согласно формуле (11)

$$p = p' - \frac{\lambda}{\varepsilon}\rho' s.$$

Принимая во внимание постоянство давления на свободной поверхности, из двух последних формул находим:

$$z' = \frac{\lambda s'}{g\varepsilon}. \tag{71}$$

Отсюда, считая заданным уравнение свободной поверхности в начальный момент

$$z_0' = f(x, y), \tag{72}$$

легко получаем

$$f(x, y) = \frac{\lambda s_0}{g\varepsilon}. \tag{73}$$

При рассмотрении случая волн значительной длины, уравнение для определения потенциала скорости принимается в виде

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right) + g\frac{d\varphi}{dz}, \tag{74}$$

и показывается, что решение имеет вид

$$\varphi = \sum (A \cos t \sqrt{N} + B \sin t \sqrt{N}) e^{-\mu z} \cos a (x - \alpha) \cos b (y - \beta), \quad (77)$$

где N, a, b, μ, α, β — постоянные, связанные соотношением

$$N\varepsilon = a^2 + b^2 - \mu^2 + g\varepsilon\mu; \quad (78)$$

A, B — произвольные функции постоянных α, β.

Возвышение частиц над невозмущенным уровнем определяется по формуле

$$z = z_0 + \int_0^t \frac{d\varphi}{dz} dt;$$

подставив сюда вместо φ выражение (77), находим:

$$z' = z_0 - \sum (A \sin t \sqrt{N} - B \cos t \sqrt{N}) \frac{\mu}{\sqrt{N}} \cos a (x - \alpha) \cos b (y - \beta) -$$
$$- \sum \frac{\mu B}{\sqrt{N}} \cos a (x - \alpha) \cos b (y - \beta); \quad (79)$$

с другой стороны, согласно уравнению (76)

$$z' = \frac{1}{g} \sum (B \cos t \sqrt{N} - A \sin t \sqrt{N}) \sqrt{N} \cos a (x - \alpha) \cos b (y - \beta). \quad (80)$$

Сравнение уравнений (79) и (80) дает

$$z_0' = f(x, y) = \sum \frac{\mu B}{\sqrt{N}} \cos a (x - \alpha) \cos b (y - \beta). \quad (81)$$

Принимая во внимание (78), находим

$$\varphi = \sum (A \cos t \sqrt{N} + B \sin t \sqrt{N}) e^{-z\sqrt{a^2+b^2}} \cos a (x - \alpha) \cos b (y - \beta).$$

Если $f(x, y)$ представить по формуле Фурье:

$$f(x, y) = \sum f(\alpha, \beta) \cos a (x - \alpha) \cos b (y - \beta) \Delta a \Delta b \, d\alpha \, d\beta,$$

то предыдущую формулу можно переписать в виде

$$\varphi = \sum \left(A \cos t \sqrt{N} + g f(\alpha, \beta) \frac{\sin t \sqrt{N}}{\sqrt{N}} \right) \times$$
$$\times e^{-z\sqrt{a^2+b^2}} \cos a (x - \alpha) \cos b (y - \beta) \Delta a \Delta b \, d\alpha \, d\beta. \quad (84)$$

Полученная функция удовлетворяет уравнениям (25) и (33). Таким образом, как справедливо указывает Н. И. Лобачевский, полученное решение соответствует случаю движения несжимаемой жидкости.

Отбрасывая в формуле (84) величину A, автор получает формулу, найденную ранее Пуассоном (Memoire de l'Acad., т. I, 1816). Этим предполагается отсутствие импульса давления в начальный момент.

В статье 15 рассматривается случай, когда на поверхность действует последовательность импульсов давлений и выводится формула

$$\varphi = -\frac{g}{\pi^2}\iiiint \sum A_i \frac{\cos(t-t_i)\sqrt{N}}{N} \times$$
$$\times e^{-z\sqrt{a^2+b^2}} \cos a(x-\alpha)\cos b(y-\beta)\, \overset{\infty}{\underset{0}{da}}\, \overset{\infty}{\underset{0}{db}}\, \overset{+}{\underset{-}{d\alpha}}\, \overset{+}{\underset{-}{d\beta}}; \quad (93)$$

обозначения над и под дифференциалами показывают, что интегрирование производится по α, β между пределами изменения x, y, а по a, b от $-\infty$ до $+\infty$. A_i — импульс давления для момента времени t_i.

В статье 16 выведена формула, на которую ссылается Н. И. Лобачевский:

$$\varphi = -\frac{g}{\pi^2}\iiiint F(\alpha,\ \beta)\frac{\cos ct}{c^2}\, Q\, \overset{\infty}{\underset{0}{da}}\, \overset{\infty}{\underset{0}{db}}\, \overset{+}{\underset{-}{d\alpha}}\, \overset{+}{\underset{-}{d\beta}} +$$
$$+\frac{1}{D\pi^2}\iiiint \psi(\alpha,\ \beta,\ 0)\ \frac{\sin ct}{c}\, Q\, \overset{\infty}{\underset{0}{da}}\, \overset{\infty}{\underset{0}{db}}\, \overset{+}{\underset{-}{d\alpha}}\, \overset{+}{\underset{-}{d\beta}} -$$
$$-\frac{1}{D\pi^2}\int_0^t dt\iiiint \psi(\alpha,\ \beta,\ t)\cos c(t-t')\, Q\, \overset{\infty}{\underset{0}{da}}\, \overset{\infty}{\underset{0}{db}}\, \overset{+}{\underset{-}{d\alpha}}\, \overset{+}{\underset{-}{d\beta}}, \quad (97)$$

где для сокращения введено обозначение

$$Q = e^{-z\sqrt{a^2+b^2}} \cos a(x-\alpha)\cos b(y-\beta).$$

Формула (97) дает выражение потенциала скорости в виде суммы трех членов. Первый член определяет влияние формы свободной поверхности в начальный момент; второй и третий члены выражают потенциал скорости в зависимости от импульса и переменного давления на эту поверхность.

При выводе формулы исходными являются уравнения (25) и (34), которые теперь обозначаются автором через (a) и (b):

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}=0, \quad \text{(a)}$$

$$\frac{1}{D}\,\frac{dp'}{dt}=g\frac{d\varphi}{dz}-\frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad \text{(b)}$$

Возвышение частицы свободной поверхности над невозмущенным уровнем определяется по формуле

$$z'=\frac{p'}{gD}+\frac{1}{g}\,\frac{d\varphi}{dt}. \quad \text{(c)}$$

Отсюда, полагая $p' = \psi(x, y, t)$, $\frac{d\varphi}{dt} = 0$, при $t = 0$, находим:

$$p_0' = \psi(x, y, 0) = gDz_0'. \tag{e}$$

Уравнению (a) удовлетворяет функция

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{1}{\pi^2}\int\int\int\int \varphi(\alpha, \beta, t) \times$$

$$\times e^{-z\sqrt{a^2+b^2}} \cos a(x-\alpha)\cos b(y-\beta)\, \overset{\infty}{\underset{0}{da}}\, \overset{\infty}{\underset{0}{db}}\, \overset{+}{\underset{-}{d\alpha}}\, \overset{+}{\underset{-}{d\beta}}. \tag{96}$$

Для определения произвольной функции $\varphi(\alpha, \beta, t)$ предыдущее выражение вставляется в уравнение (b), причем предполагается приближенно $z' = 0$. Величина p' заменяется выражением

$$\frac{1}{\pi^2}\int\int\int\int \psi(\alpha, \beta, t)\cos a(x-\alpha)\cos b(y-\beta)\, \overset{\infty}{\underset{0}{da}}\, \overset{\infty}{\underset{0}{db}}\, \overset{+}{\underset{-}{d\alpha}}\, \overset{+}{\underset{-}{d\beta}}.$$

Уравнение для определения $\varphi(\alpha, \beta, t)$ имеет вид:

$$\frac{d^2\varphi(\alpha, \beta, t)}{dt^2} + g\sqrt{a^2+b^2}\,\varphi(\alpha, \beta, t) + \frac{d\psi(\alpha, \beta, t)}{dt} = 0. \tag{f}$$

Решением этого уравнения будет

$$\varphi(\alpha, \beta, t) = \cos ct\left\{A + \frac{1}{c}\int \sin ct\,\frac{d\psi(\alpha, \beta, t)}{D\,dt}\,dt\right\} +$$

$$+ \sin ct\left\{B - \frac{1}{c}\int \cos ct\,\frac{d\psi(\alpha, \beta, t)}{D\,dt}\,dt\right\},$$

где

$$c = \sqrt{g}\sqrt[4]{a^2+b^2}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (b) и сравнивая полученное уравнение с уравнением (f), находим:

$$g\frac{d\varphi(\alpha, \beta, t)}{dz} + c^2\varphi(\alpha, \beta, t) = 0.$$

Следовательно,

$$\varphi(\alpha, \beta, 0) = -g\frac{F(\alpha, \beta)}{c^2}, \tag{h}$$

где $F(\alpha, \beta)$ — вертикальная составляющая скорости. Теперь, если вставим выражение $\varphi(\alpha, \beta, t)$ в уравнение (96) и значение $\varphi(\alpha, \beta, 0)$ из уравнения (h), то получим после простых преобразований формулу (97).

В статье 17 рассматривается частный случай, когда давление перемещается поступательно в направлении оси x с постоянной скоростью k.

Выражение потенциала скорости для этого случая имеет вид:

$$\varphi' = -\frac{1}{D\pi^2}\iiiint \psi(\alpha, \beta)\, e^{-\varepsilon\sqrt{a^2+b^2}} \frac{ak \sin a(\alpha - x + kt)}{a^2k^2 - c^2} \cos b(y-\beta)\, \overset{\infty}{\underset{0}{da}}\, \overset{\infty}{\underset{0}{db}}\, \overset{+}{\underset{-}{d\alpha}}\, \overset{+}{\underset{-}{d\beta}} -$$

$$-\frac{1}{D\pi^2}\iiiint \psi(\alpha, \beta)\, e^{-\varepsilon\sqrt{a^2+b^2}} \frac{ak \cos ct \sin a(x-\alpha)}{a^2k^2 - c^2} \cos b(y-\beta)\, \overset{\infty}{\underset{0}{da}}\, \overset{\infty}{\underset{0}{db}}\, \overset{+}{\underset{-}{d\alpha}}\, \overset{+}{\underset{-}{d\beta}} +$$

$$+\frac{1}{D\pi^2}\iiiint \psi(\alpha, \beta)\, e^{-\varepsilon\sqrt{a^2+b^2}} \frac{c \sin ct \cos a(x-\alpha)}{a^2k^2 - c^2} \cos b(y-\beta)\, \overset{\infty}{\underset{0}{da}}\, \overset{\infty}{\underset{0}{db}}\, \overset{+}{\underset{-}{d\alpha}}\, \overset{+}{\underset{-}{d\beta}}. \tag{98}$$

В статье 18 получено решение уравнения (37) для случая безграничной среды; отбрасывая в формуле (37) член $g\frac{d\varphi}{dz}$, зависящий от тяжести, и полагая

$$\frac{\lambda}{\varepsilon} = n^2, \quad \frac{h\lambda}{\varepsilon} = k,$$

приводим (37) к виду

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = n^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right) + k\left(\frac{d\frac{d^2\varphi}{dx^2}}{dt} + \frac{d\frac{d^2\varphi}{dy^2}}{dt} + \frac{d\frac{d^2\varphi}{dz^2}}{dt}\right). \tag{100}$$

Его решение:

$$\varphi = \frac{1}{\pi^3}\iiiiiint f(\alpha, \beta, \gamma)\, e^{-\frac{kc^2}{2}t}\left(\cos nct + \frac{kc^2}{2}\sin nct\right) Q\, \overset{\infty}{\underset{0}{da}}\, \overset{\infty}{\underset{0}{db}}\, \overset{\infty}{\underset{0}{d\mu}}\, \overset{+}{\underset{-}{d\alpha}}\, \overset{+}{\underset{-}{d\beta}}\, \overset{+}{\underset{-}{d\gamma}} +$$

$$+\frac{1}{\pi^3}\iiiiiint \psi(\alpha, \beta, \gamma)\, e^{-\frac{kc^2}{2}t} \frac{\sin nct}{nc} Q\, \overset{\infty}{\underset{0}{da}}\, \overset{\infty}{\underset{0}{db}}\, \overset{\infty}{\underset{0}{d\mu}}\, \overset{+}{\underset{-}{d\alpha}}\, \overset{+}{\underset{-}{d\beta}}\, \overset{+}{\underset{-}{d\gamma}}, \tag{112}$$

где

$$Q = \cos a(x-\alpha)\cos b(y-\beta)\cos\mu(z-\gamma),$$

$$c^2 = a^2 + b^2 + \mu^2,$$

$f(x, y, z)$ — значение плотности в начальный момент движения,

$$\psi(x, y, z) = \frac{du_0}{dx} + \frac{dv_0}{dy} + \frac{dw_0}{dz}.$$

В статье 19 вводятся вместо x, y, z сферические координаты u, θ, ω и формула (112) записывается в виде

$$\varphi = \frac{1}{8\pi^3}\int\int\int\int\int\int f(\alpha, \beta, \gamma)\, e^{-\frac{ku^2}{2}t}\left(\cos nut + \frac{ku^2}{2}\sin nut\right)\cos uR \times$$

$$\times u^2 \sin\theta \, \overset{\infty}{\underset{0}{du}}\, \overset{2\pi}{\underset{0}{d\omega}}\, \overset{\pi}{\underset{0}{d\theta}}\, \overset{+}{\underset{-}{d\alpha}}\, \overset{+}{\underset{-}{d\beta}}\, \overset{+}{\underset{-}{d\gamma}} +$$

$$+ \frac{1}{8\pi^3}\int\int\int\int\int\int \psi(\alpha, \beta, \gamma)\, e^{-\frac{ku^2}{2}t}\frac{\sin nut}{n}\cos uR \times$$

$$\times u \sin\theta \, \overset{\infty}{\underset{0}{du}}\, \overset{2\pi}{\underset{0}{d\omega}}\, \overset{\pi}{\underset{0}{d\theta}}\, \overset{+}{\underset{-}{d\alpha}}\, \overset{+}{\underset{-}{d\beta}}\, \overset{+}{\underset{-}{d\gamma}}, \qquad (114)$$

где для краткости обозначено:

$$R = (x-\alpha)\sin\theta\cos\omega + (y-\beta)\sin\theta\sin\omega + (z-\gamma)\cos\theta.$$

Вводя далее обозначение

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = \rho^2 \qquad (115)$$

и пользуясь известным интегралом

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \cos uR\, \sin\theta\, d\theta\, d\omega = \frac{4\pi \sin u\rho}{u\rho}, \qquad (116)$$

правую часть формулы (114) можно представить следующим образом:

$$\varphi = \frac{1}{2\pi^2}\int\int\int\int f(\alpha, \beta, \gamma)\, e^{-\frac{ku^2}{2}t}\left(\cos nut + \frac{ku^2}{2}\sin nut\right)\frac{\sin u\rho}{\rho}u\, du\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma +$$

$$+ \frac{1}{2\pi^2}\int\int\int\int \psi(\alpha, \beta, \gamma)\, e^{-\frac{ku^2}{2}t}\frac{\sin nut}{n}\frac{\sin u\rho}{\rho}\, du\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma. \qquad (117)$$

Для больших значений t правая часть формулы может быть заменена двойным интегралом

$$\varphi' = \frac{t}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} L \sin p\, dp\, dq + \frac{k}{8\pi n^2}\frac{d}{dt}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} t^2\left(\frac{dL}{dt}\right)\sin p\, dp\, dq, \qquad (125)$$

где

$$L = \psi(x + nt\cos p,\quad y + nt\sin p\cos q,\quad z + nt\sin p\sin q);$$

p, q — сферические координаты.

Для малых значений t выражение потенциала скорости будет

$$\varphi' = \frac{e^{-\frac{n^2t}{2k}}}{4n\pi\sqrt{2\pi kt}}\int\int\int \frac{\psi(\alpha, \beta, \gamma)}{\rho}\, e^{-\frac{\rho^2}{2kt}}\left(e^{-\frac{\rho n}{k}} - e^{-\frac{\rho n}{k}}\right) d\alpha\, d\beta\, d\gamma. \qquad (126)$$

В последней части диссертации (статьи 20—23) получено решение ряда частных задач. В статье 21 рассматривается волновое движение

в слое, ограниченном двумя горизонтальными плоскостями; как предельный случай, отсюда получается волновое движение в бесконечном полупространстве, ограниченном горизонтальной плоскостью. В статье 22 рассматривается волновое движение жидкости, имеющей свободную поверхность и ограниченной горизонтальной плоскостью.

Как видно из приведенного краткого изложения, А. Ф. Попов в своей диссертации значительно обобщил имевшиеся результаты в теории волновых движений. Он вывел более общие, чем у Коши и Пуассона, уравнения волнового движения, в которых частично учитывается и вязкость жидкости. Отсюда, как частные случаи, получаются уравнения волновых движений на поверхности капельной жидкости и уравнения распространения звука, рассматривавшиеся до А. Ф. Попова раздельно.

Идея совместного рассматривания этих двух явлений, как это видно из замечания в отзыве, подсказана Попову Лобачевским.

При интегрировании уравнений волнового движения А. Ф. Попов в основном следует методу Пуассона.

В последних разделах диссертации рассмотрены частные случаи волновых движений, которые ранее не изучались.

ИСТОРИКО-БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ О ДИССЕРТАЦИИ ПОПОВА И РАЗБОРЕ ЕЕ ЛОБАЧЕВСКИМ

А. Д. Дубяго

6 июня 1845 г. в Казанском университете происходил публичный диспут на соискание степени доктора математики и астрономии. Диссертантом был Александр Федорович Попов (1815—1879), окончивший в 1835 г. Казанский университет со степенью кандидата математических наук, учитель математики Казанской первой гимназии, к тому времени уже имевший и следующую степень магистра. Оппонентами ему выступали ординарные профессора Н. И. Лобачевский и П. И. Котельников. Докторская диссертация А. Ф. Попова [как и кандидатская, защищенная в 1842 г., причем оппонентами были те же Н. И. Лобачевский и П. И. Котельников, а также и Н. Н. Зинин [1])] посвящена была гидродинамике и имела заглавие: «Об интегрировании дифференциальных уравнений гидродинамики, приведенных к линейному виду».

Казанская газета сообщает [2]), что это событие рассматривалось, как торжество, давно уже не повторявшееся в университете. Специальный характер темы диссертации был причиной «незначительного стечения посторонних посетителей, тем не менее развитие выбранных докторантом положений, доведенных в этом ученом споре до ясного понятия всех присутствующих, делало его чрезвычайно занимательным».

В «Деле об утверждении магистра Александра Попова доктором математики и астрономии» и в протоколах Совета Казанского универ-

---

1) Знаменитый химик Н. Н. Зинин (1812—1880) получил в Казанском университете блестящее образование в области математики, астрономии и механики. При окончании университета в 1833 г. он был удостоен степени кандидата и золотой медали за сочинение «Теория пертурбаций», отзыв на которое дал Н. И. Лобачевский (это сочинение и отзыв в настоящее время, повидимому, утрачены). В 1834—1835 гг. Зинин преподавал аналитическую механику, гидростатику и гидродинамику, после чего посвятил себя химии.

2) Казанские губернские ведомости, часть неофициальная [11 июня 1845], № 24, столб. 239—240. Заметка воспроизведена Л. Б. Модзалевским в сборнике «Материалы для биографии Н. И. Лобачевского», изд. АН СССР, М. — Л., 1948, документ № 518, стр. 504—505.

ситета за 1845 г., хранящихся в Центральном государственном архиве Татарской АССР, имеются весьма интересные и, в большей части, до сих пор неопубликованные документы, из которых выясняется роль Н. И. Лобачевского при защите этой диссертации.

Из подробного «Журнала испытания магистра Александра Попова на степень доктора математики», состоящего из отдельных «статей», каждая из которых подписана всеми присутствовавшими членами философского факультета, мы узнаем, что в заседании второго отделения философского факультета 12 октября 1844 г. слушано было прошение магистра Александра Попова о допущении его к испытанию на степень доктора математики, причем он представил свою диссертацию. После ее просмотра, 16, 17 и 28 февраля, 1 и 26 марта 1845 г. были последовательно проведены устные и письменные испытания по чистой математике, устные и письменные испытания по прикладной математике (т. е. по механике) и устные испытания по астрономии и геодезии. Ответы Попова (письменные ответы частично хранятся в деле) «с изложением истории и литературы предмета» по каждому вопросу были «совершенно (или вполне) удовлетворительны», кроме ответов по астрономии и геодезии, которые были найдены только «удовлетворительными». По окончании последнего экзамена второе отделение философского факультета 26 марта 1845 г. определило: допустить Попова к публичному защищению диссертации.

12 июня 1845 г. декан П. И. Котельников писал Совету о состоявшейся защите и от имени второго отделения философского факультета просил Совет ходатайствовать об утверждении Попова в степени доктора математики и астрономии [1]). 26 июня проректор К. К. Фойгт сообщил Совету, что управляющий Казанским учебным округом (Н. И. Лобачевский) разрешил отправить в цензурный комитет 6 экземпляров диссертации Попова, отпечатанной в типографии Казанского университета, и по одному экземпляру в русские университеты и научные учреждения; еще несколько экземпляров было передано Казанскому университету, а остальные выданы Попову. Этим устанавливается дата выхода в свет диссертации А. Ф. Попова; как мы увидим, отзыв Н. И. Лобачевского был напечатан одновременно, или почти одновременно.

Диссертация А. Ф. Попова напечатана отдельной книжкой в формате 4°; на титульном листе напечатано [2]): «Об интегрировании дифференциальных уравнений гидродинамики, приведенных к линейному виду. Рассуждение магистра Александра Попова на степень доктора

---

[1]) Центральный гос. архив Татарской АССР, ф. 977, Совет, № 8916, л. 16.

[2]) Фотография титульного листа диссертации воспроизведена в наст. томе перед стр. 381.

математики и астрономии. Казань, 1845 года. В Университетской типографии». На обороте титульного листа имеется указание: «Печатано с дозволения университетского начальства». В книжке после титульного листа идут две ненумерованные страницы, составляющие нечто вроде введения к диссертации [1]), и 59 страниц текста, за которыми следуют две (опять не нумерованные) страницы: Положения [Тезисы]. В том же формате 4° напечатан и составляет как бы продолжение диссертации Попова отзыв Лобачевского под названием: «Подробный разбор рассуждения, представленного магистром Поповым под названием „Об интегрировании [2]) уравнений гидродинамики, приведенных к линейному виду“ на степень доктора математики и астрономии». Отзыв Лобачевского содержит 13 отдельно нумерованных страниц и подписан: *Заслуженный Профессор Лобачевский.* 11 апреля 1845.

Вот что писал далее Лобачевский 25 августа 1845 г. за № 3624 Совету университета:

> По представлению Совета Казанского Университета 3 минувшего Июля, и согласно разрешению Господина Управляющего Министерством Народного Просвещения, Товарища Министра 3 текущего Августа № 7546, я утверждаю Старшего Учителя первой Казанской Гимназии Магистра Александра *Попова* в звании Доктора Математики и Астрономии.
>
> Уведомляю о том Совет Университета, в ответ на означенное представление, для надлежащих по сему распоряжений.
>
> В моем представлении Г. Министру Народного Просвещения объяснил я свое мнение, что нахожу приличным по примеру, как это сделано с диссертациею Г. Попова, присоединять всякий раз печатный подробный разбор.
>
> Г. Управляющий Министерством в отношении к этому последнему обстоятельству предоставил поступить по моему усмотрению. Между тем я желаю знать предварительно мнение Совета, чтобы принять за постоянное правило: к Докторским диссертациям прилагать печатный подробный разбор.
>
> Управляющий Казанским Учебным Округом
>
> Ректор Университета — *Лобачевский.*
>
> Правитель канцелярии *И. Цепелев* [3]).

22 сентября 1845 г. Совет Казанского университета заслушал это предложение Н. И. Лобачевского, который, хотя и оставался ректором,

---

[1]) Это введение помещено в качестве приложения 1 на стр. 398 наст. тома.

[2]) Слово «дифференциальных» в заглавии отзыва, вероятно по недосмотру, отсутствует.

[3]) См. сноску [1]) на стр. 413, л. 25. Фотоснимок этого документа помещен после стр. 416 наст. тома.

но уже редко участвовал в заседаниях Совета. Черновая запись постановления Совета университета, за исключением ее начала, написана рукой председательствовавшего проректора К. К. Фойгта. По вопросу о печатании рецензий на диссертации Фойгт сначала записал одно мнение, затем его зачеркнул и тут же заменил другим. Вычеркнутый текст, в котором, в свою очередь, есть небольшие помарки и поправки, с трудом можно прочесть; он гласит:

2. Г-ну Управляющему Каз. Учебным Округом донести, что Совет У-та [начиная отсюда зачеркнуто] вполне разделяет мнение Его Превосходительства [1]) насчет приложения к диссертациям на высшие ученые степени и притом [неразб. — наибольше?] Доктора или Магистра, подробных разборов, представленных г. профессорами по принадлежности. Такие разборы, с одной стороны, должны служить открытым засвидетельствованием [и] доказательством всей [той — зачеркнуто] строгости приговоров, которые Университет произносит над подобными трудами, а с другой стороны, охранными, так сказать, грамотами, под защитою которых молодой ученый вступает на литературное поприще [2]).

Как сказано, сразу вслед за этим Фойгтом написано совершенно другое мнение и в таком виде запись была перенесена в книгу протоколов Совета:

§ 3. от 25 августа 1845 г. за № 3624 об утверждении старшего учителя первой Казанской гимназии магистра Александра *Попова* в звании Доктора математики и Астрономии. — Определено: 1. Предписать начальнику типографии напечатать г. Попову диплом на степень Доктора Математики и Астрономии и представить с отпуском в Совет; по напечатании диплом, утвердя подписом и приложением печати, выдать г. Попову, взыскав с него следующие деньги, а 2-е отделение философского факультета о сем уведомить для сведения. 2. Г. Управляющему Казанским учебным округом донести, что Совет университета на счет печатания подробных разборов к диссертациям Докторов полагает, что такое печатание, подвергая профессора суду публики против его воли и тем требуя от него большей [3]) строгости, иногда обременительной для Докторантов, не должно быть поставляемо в настоящую обязанность, но представлено собственному усмотрению и желанию профессоров, представивших эти разборы [4]).

---

[1]) То-есть Лобачевского.

[2]) Центр. гос. архив Татарской АССР, ф. 977, Совет, № 8916, л. 26.

[3]) Так в черновике Фойгта. В протоколе — «большой».

[4]) Центр. гос. архив Татарской АССР, фонд 977, Совет, № 8982, л. 96.

Кем были высказаны эти противоречащие друг другу мнения по пункту 2, что побудило Совет отступить от первого из них и остановиться на втором, мы вряд ли узнаем, и все-таки крайне странно постановление, с которым, в конце концов, согласились многочисленные присутствовавшие члены Совета и все без оговорок подписали протокол. Среди них были ученые, широко известные своими научными трудами и открытиями, но ни один из них не пожелал прибавить к протоколу особого мнения по столь принципиальному вопросу. Итак, Совет решил и записал, что если отзывы профессоров будут печататься, то им будет труднее проявлять снисходительность к докторантам!

Не такого мнения ожидал Лобачевский от Казанского университета, и он с горьким разочарованием и сурово отвечает Совету (27 октября 1845 г. № 4583):

> На представление Совета Казанского университета, 17 текущего октября, с мнением на счет печатания подробных *разборов к диссертациям Докторов*, даю знать, что суду публики подвергается сочинитель против своей воли за всякое вообще изданное им сочинение. Итак, если бы приводимая Советом причина была достаточной в этом случае, то она служила бы заявлением от профессоров их намерения вообще не печатать своих сочинений. Впрочем, не вводя теперь еще никакого постоянного, на такой случай, правила вперед, предлагаю Совету Университета, представляя диссертации на звание Доктора, всякий раз излагать подробно причины, которые побуждают удерживаться печатанием полного разбора диссертаций.
>
> Управляющий Казанским Учебным Округом
> Ректор Университета — *Лобачевский*.
> Правитель канцелярии *И. Цепелев* [1]).

Со страниц архивного дела встает перед нами благородный облик Лобачевского в его неустанной заботе о развитии русской науки. Он справедливо считает необходимым условием ее процветания высокий уровень подготовки молодых ученых и требует в те глухие годы всей возможной гласности в самом трудном и ответственном деле — присуждении степени доктора наук. Не только диссертации, но и разборы их профессорами должны печататься и широко обсуждаться — так полагает Лобачевский, и сам подает первый пример. Испытав в своей жизни вместо справедливого суда критики бессмысленные издевательства людей, не понимавших его великих открытий, Лобачевский не

[1]) Центр. гос. архив ТАССР, фонд 977, Совет, № 8916, л. 28. Фотоснимок этого документа помещен здесь вслед за первым документом, о котором говорилось на стр. 414.

МИНИСТЕРСТВО
Народнаго Просвѣщенія.
КАЗАНСКІЙ
УЧЕБНЫЙ ОКРУГЪ.

Отвѣтъ на № 971.

Въ Казани.
25. Августа 1845 года
№ 3694
ОТЪ ПОПЕЧИТЕЛЯ.

Слушано 22 Сентября 1845

Совѣту Казанскаго Университета.

По представленію Совѣта Казанскаго Университета 3 минувшаго Іюля, и согласно разрѣшенія Господина Управляющаго Министерствомъ Народнаго Просвѣщенія, Товарища Министра 3 текущаго Августа № 7546, я утвердилъ Старшаго Учителя первой Казанской Гимназіи Магистра Александра Попова въ званіи Доктора Математики и Астрономіи.

Увѣдомляя о томъ Совѣтъ Университета, въ отвѣтъ на означенное представленіе, для надлежащихъ по сему распоряженій.

Въ моемъ представленіи Г. Министру Народнаго Просвѣщенія

Первая записка Н. И. Лобачевского Совету Казанского университета — предложение принять за постоянное правило: «К докторским диссертациям прилагать печатный подробный разбор»

К стр. 417.

объяснилъ я свое мнѣніе, что нахожу приличнымъ по примѣру, какъ это сдѣлано съ диссертаціею Г. Попова, присоединять всякій разъ печатный подробный разборъ.

Г. Управляющій Министерствомъ въ отношеніи къ этому послѣднему обстоятельству предоставилъ поступить по моему усмотрѣнію. Между тѣмъ я желаю знать предварительно мнѣніе Совѣта, чтобы принять за постоянное правило: къ Докторскимъ диссертаціямъ прилагать печатный подробный разборъ.

Управляющій Казанскимъ учебнымъ округомъ,
Ректоръ Университета Лобачевскій

Правитель Канцеляріи И. [illegible]

Окончание первой записки Лобачевского Совету университета.

Министерство
Народнаго Просвѣщенія.
Казанскій
Учебный Округъ.

Отвѣтъ на №408.

Въ Казани.

27. Октября 1845 года

№ 4513.

Отъ Попечителя

Въ

Отправлено 3 Ноября

Совѣту Казанскаго Университета

На представленіе Совѣта Казанскаго Университета, 17 текущаго Октября, съ мнѣніемъ на счетъ печатанія подробныхъ разборовъ на диссертаціи Докторовъ, даю знать, что суду публики подвергается сочинитель противъ своей воли за всякое вообще изданное имъ сочиненіе. Итакъ, если бы приводимая Совѣтомъ причина была достаточной въ этомъ случаѣ, то она служила бы заявленіемъ отъ Профессоровъ ихъ намѣренія вообще не печатать своихъ сочиненій

Ст 3

Вторая записка Н. И. Лобачевского Совету Казанского университета — возражение на решение Совета по предложению Лобачевского прилагать к докторским диссертациям печатный подробный разбор

Впрочемъ, не вводя теперь еще никакого постояннаго, на такой случай, правила впредь, предлагаю Совѣту Университета, представляя диссертацію на званіе Доктора, всякій разъ излагать подробно причины, которыя побуждаютъ удерживаться печатаніемъ полнаго разбора диссертаціи.

Управляющій Казанскимъ Учебнымъ Округомъ,
Ректоръ Университета Лобачевскій

За Правителя Канцеляріи [illegible]

Окончание второй записки Лобачевского Совету университета.

смутился и твердо продолжал итти по своему пути. Вот почему он осудил малодушие Совета университета, не сумевшего удержаться на столь высокой точке зрения.

Рассылка Советом диссертации А. Ф. Попова по университетам и научным учреждениям России, повидимому, затянулась до окончания приведенной нами переписки и была осуществлена только в конце 1845 г. Некоторые экземпляры диссертации не содержат при себе отзыва Н. И. Лобачевского. Чем это было вызвано, выяснить трудно.

7 июля 1846 г. кончалось пятилетие, на которое был избран Н. И. Лобачевский на должность профессора чистой математики, сверх уже истекшего в 1841 г. 25-летнего срока службы. Л. Б. Модзалевский впервые установил, что Лобачевский, в связи с этим, добровольно уступил кафедру своему ученику А. Ф. Попову. Являясь в то время управляющим Казанским учебным округом, Лобачевский написал 3 июля 1846 г. представление министру народного просвещения С. С. Уварову об оставлении проф. И. М. Симонова (в отношении которого возникал подобный же вопрос) «еще пять лет на службе в звании заслуженного профессора».

> «Что же касается до меня, — пишет Лобачевский, — то со всей признательностию к заключению университетского Совета об оставлении меня на службе в должности преподавателя, честь имею представить на благоусмотрение В-го В-ва, что кафедру чистой математики более с пользою, вероятно, может занять учитель 1-ой Казанской гимназии Попов, получивший степень доктора в прошедшем году и для которого такое повышение не только будет совершенно заслуженное, но даже должное, с той целию, чтобы поощрить далее к занятиям при несомненных его хороших способностях. В силах еще первой молодости, неотвлекаемый, подобно мне, другого рода занятиями по службе и обязанностями семейственными, он не замедлит показать себя достойным профессором и встать в кругу самых известных европейских ученых.
>
> При таких обстоятельствах желание с моей стороны оставаться в должности профессора не могло бы почитаться справедливым; а потому прошу покорнейше В. В., уволив меня от ученой службы, наградить производством пенсии...» [1]).

Вступив в 1846 г. экстраординарным профессором на кафедру чистой математики, А. Ф. Попов был избран 7 сентября 1849 г. ординарным профессором по той же кафедре и занимал ее до 8 августа 1866 г., когда был вынужден оставить службу по болезни.

---

[1]) Воспроизведено Л. Б. Модзалевским в его сборнике (см. стр. 412 наст. тома), документ № 532, стр. 513—514. См. также предисловие Модзалевского (там же, стр. 17).

Ученая деятельность Попова была обширна и разнообразна. Многие его работы были посвящены, как и обе его диссертации, гидродинамике, в особенности теории волн и связанным с ней вопросам теории упругости и теории звука.

Однако преемник Лобачевского, А. Ф. Попов, не оценил значения того переворота в геометрии, который совершил его учитель. В интересных и важных для историка воспоминаниях о Лобачевском, изданных в 1857 г., Попов кратко и сдержанно упоминает об этом: «. . . чтения для избранной аудитории, в которых Лобачевский развивал свои *Новые начала геометрии*, должно назвать по справедливости глубокомысленными». В другом месте Попов указывает: «В числе восемнадцати или двадцати рассуждений, книг и брошюр Лобачевского одни относятся к теории чисел, другие к теории интегралов и важнейшие к строгой теории параллельных линий . . .» [1]).

[1]) А. Ф. Попов — Воспоминания о службе и трудах профессора Казанского университета Лобачевского. Ученые записки, издаваемые императорским Казанским университетом за 1857 г., кн. IV, стр. 153—159; воспроизведено Л. Б. Модзалевским в его сборнике, стр. 585—589.

ПОЛНОЕ ЗАТМЕНИЕ СОЛНЦА В ПЕНЗЕ

26 ИЮНЯ 1842 ГОДА

1842

ВВОДНАЯ СТАТЬЯ И КОММЕНТАРИИ
А. Д. ДУБЯГО

ПОЛНОЕ ЗАТМЕНИЕ СОЛНЦА В ПЕНЗЕ 26 ИЮНЯ 1842 ГОДА

ОТЧЕТ Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО О НАБЛЮДЕНИЯХ СОЛНЕЧНОГО ЗАТМЕНИЯ В 1842 ГОДУ

Из всех известных нам сочинений Н. И. Лобачевского к области астрономии относится только отчет о наблюдении полного солнечного затмения 26 июня (старого стиля) 1842 г. в Пензе, если не считать его юношеских наблюдений кометы 1811 I [1]). Между тем, на продолжении своей многолетней научной и учебной деятельности Лобачевский немало занимался астрономией, как в этом можно убедиться по очень интересной статье Н. И. Идельсона «Лобачевский — астроном» [2]). К сожалению, утрачено сочинение магистра Лобачевского «Об эллиптическом движении небесных тел», и сохранился лишь лестный отзыв о нем профессора математики Бартельса. По собственному свидетельству Лобачевского, он много занимался наблюдениями в 1819 году, когда профессор астрономии Казанского университета И. М. Симонов уехал с экспедицией Беллинсгаузена и Лазарева в Антарктику, а Лобачевский его замещал. Одним из следов преподавания им астрономии осталось предвычисление студентами Юферовым, Токаревым и Пикторовым кольцеобразного затмения 26 августа (старого стиля) 1820 г. в Казани, где оно было частным с фазой немного более $\frac{2}{3}$ [3]). В своем отчете о затмении 1842 г. Лобачевский пишет, что он наблюдал комету Энке в 1832 г. и комету Галлея в 1835 г. В 1833 г. Лобачевский написал отзыв на сочинение «Теория пертурбаций» кончавшего курс студента, в будущем знаменитого химика Н. Н. Зинина; последний за это сочинение получил золотую медаль.

Повидимому, до сих пор никто не пытался осветить все содержание отчета Лобачевского о затмении 1842 г., хотя оно очень интересно. Это сочинение отличается от прочих трудов Лобачевского разнообразием затронутых в нем тем: описывается поездка в Пензу и наблю-

---

[1]) См. стр. 488 наст. тома (приложение 2).

[2]) Н. И. Идельсон. Лобачевский — астроном. «Историко-математические исследования», вып. II, Гостехиздат, 1949, стр. 137—167. Также: «Вопросы истории отечественной науки», изд. АН СССР, 1949, стр. 142—164.

[3]) «Казанские Известия», № 62, 4 августа 1820 г., стр. 268.

дения затмения, неоднократно упоминаются спутники и коллеги Лобачевского, перечисляется масса фактов по истории науки и разбираются мнения ученых по многим проблемам физики и астрономии. Отчет Лобачевского о затмении относится к далекому от нас этапу развития науки, и для его полного понимания необходим подробный комментарий, который приводится здесь и в примечаниях к отчету.

Укажем, прежде всего, какие материалы были использованы для этой цели.

После изысканий Л. Б. Модзалевского стали доступными широкому кругу читателей многочисленные и важные документы о жизни и деятельности Н. И. Лобачевского; здесь мы отметим те из них, которые непосредственно связаны с его поездкой в Пензу для наблюдения солнечного затмения 1842 г.: они в некоторых случаях добавляют существенные детали к повествованию самого Лобачевского, но новых сведений научного характера мы почти не находим[1]).

Мы не знаем никаких подробностей о наблюдательной деятельности Лобачевского, кроме того, что он сам нам сообщает в немногих фразах; сохранившиеся его листы с черновыми теоретическими выкладками лишь в небольшой части относятся к астрономии; наконец, нет самых важных документов, относящихся к его отчету о затмении.

Чтобы стало ясно, почему до нас дошло так мало сведений, надо вспомнить, что страшный пожар 24 августа 1842 г., уничтоживший бóльшую часть Казани, захватил и астрономическую обсерваторию университета. От огня частично пострадали инструменты и, повидимому, сгорел архив обсерватории, так как в нем не осталось никаких научных материалов ранее 1842 г. Эта судьба, очевидно, постигла и записи астрономических наблюдений Лобачевского. Сгорели многие книги и бумаги, которыми пользовался Лобачевский при составлении отчета о затмении, происшедшем за два месяца до казанской катастрофы. Даже первый вариант отчета Лобачевского о затмении 1842 г. стал жертвой пламени. Поэтому теперь остается очень мало надежды на отыскание таких интересных документов, как, например, письмо В. Я. Струве к И. М. Симонову с предложением наблюдать затмение в Пензе и с программой наблюдений; также нет никаких следов инструкции для наблюдений, которую написал Симонов, уезжая незадолго до затмения за границу, своему заместителю, астроному-наблюдателю М. В. Ляпунову. Поиски в других Казанских архивах, предпринятые в надежде, что удастся найти новые сведения об экспедиции Лобачевского и его коллег в Пензу, дали до сих пор немного

[1]) Материалы для биографии Н. И. Лобачевского. Собрал и редактировал Л. Б. Модзалевский, Изд. АН СССР, 1948 (далее цитируется: Модзалевский). Документы №№ 473, 476, 478, 481, 483, 493, 494, 498.

результатов. Среди сохранившихся в Казани архивных материалов интересны записи книг, выдававшихся библиотекой университета его профессорам и преподавателям, расположенные по учебным годам[1]. Эти записи, в частности, могли бы быть ценны потому, что Лобачевский, как правило, не указывает в отчете использованную им обширную литературу. В записях нехватает 1843/44 года, но это не имеет значения, ибо к лету 1843 г. рукопись Лобачевского заведомо была окончена. Надо сказать, однако, что Лобачевский в связи с составлением отчета, повидимому, вовсе не брал книг из библиотеки. Немногочисленные книги, взятые им после поездки в Пензу, относятся к другим темам. Конечно, он мог читать журналы в самой библиотеке, а часть нужных ему книг находилась на руках у других лиц, или, может быть, в астрономической обсерватории. Кое в чем помог при комментировании отчета Лобачевского просмотр записей книг и, частично, самих книг, взятых Э. А. Кнорром и М. В. Ляпуновым (спутниками Лобачевского по поездке в Пензу на затмение), а также И. М. Симоновым.

Чтобы отчет Лобачевского предстал в правильной перспективе, мы предпошлем некоторые исторические замечания о солнечных затмениях и, в частности, о полном затмении 1842 г.

Причины солнечных и лунных затмений были понятны еще древним грекам. Однако только в 1604 г. Кеплер показал, что солнечные затмения могут быть и полными и кольцеобразными, то-есть, что видимый поперечник Луны во время затмения может быть и больше, и меньше, чем видимый поперечник Солнца, вследствие того, что расстояния этих небесных тел от Земли изменяются в некоторых пределах. Как раз по вопросу о расстояниях светил от Земли в системе мира Птоломея господствовала путаница. Тогда же Кеплер описал корону, появляющуюся вокруг Солнца, во время полных затмений, о чем имелось свидетельство еще у Плутарха. Кеплер приписывал корону либо сиянию эфира вокруг Солнца, либо атмосфере Луны (которая во время затмения располагается для нас перед Солнцем).

Полные солнечные затмения, из-за сравнительной узости полосы полной фазы на земной поверхности, видимы в данной местности через большие промежутки времени, измеряемые столетиями. Точное их предсказание для определенного географического места было в те далекие времена затруднено несовершенным знанием видимых движений Солнца и Луны. Еще в XVIII веке солнечные затмения подчас наблюдались случайными и неподготовленными наблюдателями, кото-

---

[1]) На существование таких записей нам указал Г. А. Скопин.

рые за короткое время полной фазы, пораженные картиной торжественного и грозного явления природы, не успевали сделать объективных и сколько-нибудь ценных наблюдений. Почти полный список исторических наблюдений над солнечной короной приведен Лобачевским в его отчете, но Лобачевский только глухо намекает на наиболее поразительные примеры тех иллюзий, жертвами которых стали наблюдатели. Так, во время затмения 1778 г., наблюдавшегося с корабля в открытом море, Уллоа видел, что корона вращалась наподобие фейерверочного колеса, и отметил дыру в Луне, близ ее края, сквозь которую просвечивало Солнце. Аналогичные «наблюдения» повторялись и позже, во время других затмений (в том числе и в 1842 г.); некоторые астрономы даже решались их серьезно обсуждать.

Полное затмение 26 июня (8 июля) 1842 года должно было быть видимо в Европе после многолетнего перерыва, за время которого астрономия и физика сделали большие успехи; не удивительно, что ученые готовились к наблюдениям заранее и впервые снаряжали особые экспедиции в полосу полной фазы. Условия для наблюдений ожидались хорошие: лунная тень пробегала через всю Европу от Испании до Урала и продолжала путь по Сибири; длительность полной фазы была значительной.

Директор Пулковской обсерватории академик В. Я. Струве возглавил организацию наблюдений в России. По его плану было проведено четыре экспедиции для наблюдения полного затмения — в Дубно, Чернигов, Липецк и Пензу. В этих первых широко организованных наблюдениях солнечных затмений в России приняли участие не только астрономы-профессионалы, но и ученые других специальностей (как Лобачевский и Кнорр) и простые любители астрономии. Наблюдениям в Дубно, как об этом сообщает Славинский[1]), и в Пензе, как видно из отчета Лобачевского, помешала пасмурная погода. Ясное небо благоприятствовало наблюдениям в Липецке, куда выехали О. В. Струве и Шидловский. Статья О. В. Струве о наблюдении затмения очень интересна[2]). В Чернигове наблюдал затмение киевский профессор астрономии В. Ф. Федоров; там небо было покрыто тонкой пеленой облаков[3]).

---

1) Astronomische Nachrichten, B. 20, 1843, стр. 73—76.

2) O. Struve — Beobachtung der totalen Sonnenfinsternis am 7. Juli 1842 in Lipezk, там же, стр. 227—234. (По астрономическому счету времени сутки до 1925 г. начинались в полдень, а затмение наблюдалось в Европе в утренние часы, поэтому оно отнесено к 7 июля нового стиля.)

3) В. Федоров — О солнечном затмении, бывшем 26 июня 1842 года в Чернигове, Журнал Министерства народного просвещения, часть 35, отд. 2, 1842, стр. 154—164. Также Astronomische Nachrichten, B. 20, 1843, стр. 235—240.

Кроме этих четырех экспедиций, организованных Пулковской обсерваторией, в России наблюдали затмение и не астрономы-профессионалы [1]).

Результаты важнейших сделанных за границей наблюдений над короной и протуберанцами приводятся в отчете Н. И. Лобачевского и в прекрасно написанной статье профессора астрономии Петербургского университета (позже академика) А. Н. Савича [2]).

Затмение 1842 г. не внесло ясности в вопрос о природе солнечной короны. Для простого глаза и в трубу (в отличие от фотографий) корона имеет довольно размытый вид и не представляет каких-либо вполне резких и четких деталей. Поэтому, наблюдая визуально, нельзя воспользоваться движением Луны относительно Солнца во время затмения, чтобы уверенно заметить, по отношению к какому из этих светил корона остается неподвижной и, таким образом, решить, связана ли она с Солнцем или с Луной. Некоторые ученые считали даже, что корона происходит вследствие диффракции солнечных лучей у краев Луны. Во время затмения 1851 г. была получена первая фотография (дагерротип) солнечной короны, но только после затмения 1860 г. и после изобретения спектрального анализа окончательно рухнул старый взгляд на Солнце, как на тело, в основном твердое — как и планеты, — но лишь окруженное оболочкой сияющих облаков, и вместе с тем было неопровержимо доказано, что корона и протуберанцы принадлежат Солнцу.

Мы переходим теперь к обзору содержания отчета Н. И. Лобачевского о затмении 1842 г. Отчет начинается с указания на задачи, стоящие перед астрономами и физиками при наблюдении полного затмения Солнца. Далее Лобачевский излагает обстоятельства, сопровождавшие организацию экспедиции Казанского университета в Пензу, и перечисляет лиц, участвовавших в ней.

Спутниками Лобачевского по экспедиции были астроном-наблюдатель Казанской обсерватории Михаил Васильевич Ляпунов и профессор физики Казанского университета Эрнест Августович Кнорр.

---

[1]) Д-р Штубендорф в селе Корякове (ныне Павлодарской области Казахской ССР, долгота 77°15′, широта 52°24′; см. Astronomische Nachrichten, B. 20, 1843, стр. 179—184), врач Куровицкий в Семипалатинске (см. там же, стр. 355—358), военный врач Стопов в Баян Ауле (Павлодарской области, долгота 75°45′, широта 50°39′; см. там же, стр. 357—350). Во всех этих местах затмение наблюдалось около полудня.

[2]) А. Савич — Известия о любопытных явлениях, замеченных в разных местах Европы во время полного солнечного затмения 1842 года. Журнал министерства народного просвещения, часть 40, отд. 2, 1843, стр. 1—16.

Оба они были незаурядные люди, и у обоих научная деятельность кончилась не особенно удачно (как это часто бывало в ту эпоху).

М. В. Ляпунов (отец знаменитого математика и механика А. М. Ляпунова и его братьев — академика Б. М. Ляпунова и композитора С. М. Ляпунова) был учеником И. М. Симонова и Н. И. Лобачевского. Истинным призванием М. В. Ляпунова были астрономические наблюдения. Но не успела вполне развернуться его научная деятельность, как в 1855 г., в возрасте 34 лет, Ляпунов оказался перед необходимостью оставить ее навсегда и уйти из Казанского университета из-за недоразумений, связанных с преподаванием астрономии. Ляпунов умер, когда ему было всего 48 лет. Во время поездки в Пензу он только недавно покинул студенческую скамью; тем не менее он проявил себя хорошим организатором.

Э. А. Кнорр по возрасту занимал среднее место между Лобачевским и Ляпуновым и уже девять лет был профессором физики, поступив в Казанский университет по рекомендации столь крупного ученого, как А. Гумбольт. Интересы Кнорра были разнообразны: он положил много забот для правильной постановки метеорологических наблюдений в Казани и в Поволжьи, производил магнитные наблюдения, а в области собственно физики занимался изучением явлений света. После путешествия для наблюдения затмения в 1842 году он недолго проработал в Казани и в 1846 г. (в том же году, когда Лобачевский ушел с поста ректора) переехал в Киев и занял такую же кафедру — физики и физической географии (метеорологии), — что и в Казани. Отслужив 25 лет и получив право на пенсию, Кнорр покинул в 1858 г. Киевский университет и Россию, а вместе с тем и оставил научную деятельность. Кнорр не создал себе крупного имени как ученый и теперь почти забыт.

Добавим, что Кнорр много путешествовал. Он изучал восток России, уезжая далеко от Казани, ездил за границу (и это было одним из самых успешных путешествий казанских профессоров в XIX веке); переехав в Киев, он вторично отправился наблюдать полное солнечное затмение 16/28 июля 1851 г., потерпев, впрочем, полнейшую неудачу. Лобачевский в своем отчете неоднократно и не случайно упоминает о себе совместно с Кнорром и наряду со своими приводит и его мнения — вряд ли можно сомневаться, что между ними были хорошие отношения. Более того, пересмотрев опубликованные, но, очевидно, забытые статьи того времени, приходится убедиться, что именно Кнорр переслал Гауссу в конце 1840 г., или в самом начале 1841 г., одно из сочинений Лобачевского по неевклидовой геометрии; тот же Кнорр, вероятно, передал издательству Финке в Берлине «Геометрические исследования по теории параллельных линий» Лоба-

чевского. Впрочем, сам Кнорр так и не понял значения неевклидовой геометрии Лобачевского.

Мы приводим ниже [1]) еще некоторые подробности об Э. А. Кнорре, чтобы оживить забытый облик спутника Лобачевского по поездке в Пензу на солнечное затмение 1842 года.

Описав кратко приезд в Пензу и перечислив взятые в экспедицию инструменты, Лобачевский останавливается на предполагавшихся фотометрических измерениях постепенного потемнения во время затмения, а также сообщает о наблюдениях Ляпунова, сделанных для определения географической широты и долготы временной обсерватории в Пензе. По этим результатам приходится заключить, что долгота Пензы была получена ненадежно.

Инструментальное оборудование Казанской обсерватории в 1842 г. уже нельзя было назвать бедным (как во время Литтрова), но в нем было слабое место — имелось только два хронометра карманного типа. В поездку был взят один из них, и он останавливался как по дороге в Пензу, так и обратно. Поэтому нельзя было определить долготу Пензы перевозкой хронометра из Казани, как это обычно делали в то время.

В следующем разделе отчета, после краткого сообщения о пребывании в Пензе до затмения и приготовлений к наблюдениям, приводятся результаты наблюдений Ляпунова над моментами начала и конца полной фазы затмения.

Далее идет выразительное и художественное описание картины самого затмения и сопровождавших его обстоятельств. Затем Лобачевский подробнее останавливается на виденной им и Кнорром солнечной короне (в отчете нет никаких упоминаний, видел ли корону Ляпунов) на заре у горизонта и делает некоторые замечания о темноте во время полного затмения и о видимости звезд. После этого сообщается о наблюдениях Кнорра над поляризацией короны и неба и ставится основной вопрос всего отчета: «Но как истолковать происхождение светлого кольца вокруг Солнца? Составляется ли венец этот собственно вокруг Солнца, или вокруг Луны, или гораздо ближе к нам, в нашей атмосфере?» [2]). Лобачевский отмечает, что первый опыт его отчета сгорел 24 августа 1842 г., но что он может зато воспользоваться дошедшими до него сведениями о наблюдениях затмения, и заключает: «Я намерен здесь рассмотреть все предположения, какие можно бы сделать о происхождении венца вокруг Луны во время затмения» [3]).

---

[1]) В примечании [5] на стр. 457 наст. тома.

[2]) Стр. 439 наст. тома.

[3]) Там же.

Сперва Лобачевский подробно обсуждает предположение, что венец (корона) принадлежит самому Солнцу (как это и есть в действительности). Правильное мнение о существовании атмосферы у Солнца сочетается в тексте с теорией Солнца Гершеля, по которой Солнце — твердое и темное тело, наподобие планет, окруженное светящейся оболочкой облаков. Здесь Лобачевский только разделяет общепринятое в то время представление о Солнце.

Араго, имевший большое влияние на современную ему науку, незадолго до смерти (1853 г.) писал в «Популярной астрономии»: «... если спросят: могут ли на Солнце существовать обитатели, организованные подобно жителям Земли, то я немедля дам утвердительный ответ. Существование на Солнце темного центрального ядра, окруженного непрозрачною атмосферою, за которою находится светоносная атмосфера, отнюдь не противоречит подобному предположению»[1].

Этот отрывок наглядно показывает, в каком состоянии находились знания о Солнце до изобретения спектрального анализа и до установления в физике неба важнейших следствий закона сохранения энергии.

По расчету Пулье, на мемуар которого Лобачевский ссылается немного далее, температура поверхности Солнца составляет 1761° C, что гораздо ниже ее действительного значения; если бы последнее было известно, теория Гершеля должна была бы сразу рухнуть. Температура Солнца может быть выведена многими способами, в том числе и на основании измерения значения солнечной постоянной (т. е. количества тепла, получаемого за минуту времени на один квадратный сантиметр поверхности, поставленной за пределами атмосферы перпендикулярно к солнечным лучам). Именно так поступил Пулье, причем его измерения дали уже довольно близкое к истине значение солнечной постоянной, но он пользовался неверным законом излучения. Выведенная по закону излучения Стефана температура Солнца равна приблизительно 5750° от абсолютного нуля, или около 5500° C. По другим способам температура Солнца выходит немного выше.

Изложив общие соображения об атмосферах небесных тел, Лобачевский переходит к оценке высоты земной атмосферы и температуры мирового пространства, делая различные предположения об убывании температуры с высотой над земной поверхностью и ссылаясь на измерения температуры во время полета Гей-Люссака и на работы Фурье и Пулье. После этого Лобачевский заключает, что наблюдавшиеся во

---

[1]) Араго — Общепонятная астрономия, перев. Хотинского, т. 2, 1861, стр. 139.

время затмения 1842 года протуберанцы не могут быть солнечными горами.

Лобачевский полагает, что корону нельзя считать за «вторую солнечную атмосферу, кроме той, которая нас освещает» [1]) (т. е. фотосфера Солнца). С одной стороны, атмосфера Солнца должна быть, при наблюденном протяжении короны, весьма сплюснута к полюсам Солнца (этот вывод не подтверждается расчетом, см. примечание [[35]] на стр. 467—468). С другой стороны, наблюдения затмения в разных местах дали много отличий в форме короны и в расположении ее лучей. В таком случае пришлось бы считать, что «тонкое вещество, раз отделившись от Солнца, движется с чрезвычайной скоростию, повинуясь отталкивающей силе. Это бы значило принимать Солнце за большую комету, окруженную весьма пространной атмосферой» [2]). Но и это предположение Лобачевский отвергает, сопоставляя наблюдения короны во время многих полных затмений Солнца.

Заметив, что «вокруг Луны атмосфера, если существует, должна быть ничтожная, которая не может быть причиною приметных явлений» [3]), Лобачевский исследует, возможно ли объяснить корону диффракцией света («погибанием лучей») близ лунной поверхности. Он приводит результаты опытов над диффракцией солнечного света в условиях искусственного солнечного затмения. При этом Лобачевский сперва исходит из «теории вытекания» (эмиссионной теории) света Ньютона и заключает, при помощи остроумных доводов (привлекая и наблюдения покрытий звезд Луной), что таким способом нельзя объяснить солнечную корону. Но к такому же заключению приводит его и рассуждение с точки зрения волновой теории Декарта, Гюйгенса и Эйлера, развитой Юнгом и Френелем.

Вслед за этим Лобачевский ставит высокие требования к волновой теории света и считает, что она им не удовлетворяет. Наряду с замечаниями о теории света Коши, здесь особенно следует выделить мысль об универсальности и взаимной связи сил притяжения и отталкивания; всестороннее развитие этой мысли находим в «Диалектике природы» Энгельса (см. примечание [[55]] на стр. 480). Лобачевский характеризует формальный характер волновой теории того времени в следующих словах: «Говорить о волнах, значит основывать все суждение на том, что в строгом смысле не существует, подобно тому как мы говорим о линиях и поверхностях, тогда как в природе находятся только тела. Теория волнений представляет верно некоторые законы в явлениях света, но не дает еще понятия, в чем существенность заключается» [4]).

---

[1]) Стр. 442 наст. тома.

[2]) Стр. 443 наст. тома.

[3]) Стр. 445 наст. тома.

[4]) Стр. 449 наст. тома.

Это отношение Лобачевского к волновой теории интересно для нас тем, что оно было высказано в такую эпоху, когда волновая теория света праздновала наибольшие успехи, а эмиссионная теория была оставлена всеми виднейшими физиками.

Лобачевский сообщает замечание Кнорра, «что нет еще достаточной причины вооружаться против теории Ньютона, так же как неблагоразумно было бы не пользоваться преимуществом другой системы»[1] (волновой теории), и показывает, как можно было бы построить объединение обеих теорий для объяснения всех явлений света. Акад. С. И. Вавилов подчеркивал, что такое понимание света — как истечения световых частиц, сопровождающегося волновыми процессами,— было иногда свойственно Ньютону.

С. И. Вавилов пишет: «К Ньютоновой попытке соединения теории истечения и волновой теории физика все же время от времени возвращается, забывая при этом о первоисточнике. В 1842 г. Н. И. Лобачевский попытался, например, так соединить эмиссионную и волновую теории...» (далее следует цитата из отчета Лобачевского, и никого другого С. И. Вавилов здесь не упоминает)[2].

Лобачевский затем приводит свое мнение, что ни изгибание света около Луны, ни диффракция не в состоянии произвести корону (это тем более верно, что вследствие больших размеров Луны никаких заметных диффракционных явлений при солнечных затмениях вообще не будет). Сообщив о наблюдениях над температурой воздуха во время затмения, он пишет, что на образование кольца вокруг Луны можно подозревать большое влияние воздуха. В пользу этого предположения приводятся разные доводы, в том числе из области фотометрии, но ни на одном из них Лобачевский не настаивает.

Выше уже было упомянуто, что истинная природа солнечной короны выяснилась много позже 1842 г.; это было достигнуто новыми методами фотографии и спектроскопии[3].

---

[1]) Стр. 449 наст. тома.

[2]) Акад. С. И. Вавилов — Исаак Ньютон, 2-е изд., изд. АН СССР, 1945, стр. 78—79.

[3]) В соответствии с современными взглядами, короной можно назвать самые внешние слои атмосферы Солнца. Условно ее можно разделить на две части — внутреннюю и внешнюю корону. Внутренняя корона, более яркая, окружает во время затмения Луну кольцом шириной в несколько минут дуги; в настоящее время возможны наблюдения внутренней короны и вне затмений Солнца. Внешняя корона значительно шире и слабее внутренней и на своей границе незаметно переходит в фон неба. Для нее характерно лучистое строение, и значительную долю света она получает за счет отражения света от пылевых частиц, движущихся в соседстве с Солнцем; именно поэтому спектр внешней короны является обычным спектром Солнца. После классических исследований А. П. Ганского стало несомненным, что корона не обладает шаровой формой; изменения формы

В заключение отчета о затмении Лобачевский приводит результаты магнитных наблюдений в Пензе по сравнению с Казанью, делает несколько замечаний о климате в связи с садоводством и, наконец, приводит мысль Кнорра об образовании рек, — мысль для того времени замечательную и предвосхищающую один из возможных способов образования речных долин по В. В. Докучаеву.

Этот обзор содержания сочинения Н. И. Лобачевского о затмении 1842 г. в некоторой мере показывает, какое богатство и разнообразие идей сумел развернуть Лобачевский по поводу виденного им величественного явления природы. Тщетно стали бы мы искать этому параллель в отчетах других наблюдателей, которые, за немногими исключениями, ограничивались отметкой моментов фаз затмения и голым описанием того, что они видели, или думали, что видели, подвергаясь подчас самым странным обманам зрения.

По некоторым намекам текста можно предполагать, что Лобачевский думал позже вернуться к затронутым им общим вопросам физики и астрономии и разработать их подробнее, ибо эти вопросы, повидимому, глубоко интересовали его в зрелом возрасте, когда он писал отчет о затмении. Многое выражено им весьма кратко. Чтобы дать возможность оценить с исторической точки зрения взгляды и суждения Лобачевского, высказанные только в этом сочинении, а иногда и просто понять их, в примечаниях к отчету даны довольно обстоятельные пояснения (относящиеся, преимущественно, к истории науки), приведены цитаты из многих авторов, упоминаемых Лобачевским, собраны подробные литературные указания. В виде приложения дан (с некоторыми примечаниями) текст заметки о затмении, появившейся 10 июля 1842 г. в № 28 «Прибавлений к Пензенским губернским ведомостям» и почти несомненно написанной самим Лобачевским[1]).

короны связаны с одиннадцатилетним циклом изменения солнечной деятельности.

Многие проблемы, связанные с солнечной короной, и до сих пор представляют значительные трудности. Так, например, общая масса вещества короны в тысячи раз меньше массы земной атмосферы; тем не менее, корона простирается на несколько радиусов Солнца. После того как в 1939—1941 гг. был расшифрован спектр короны, оказалось, что яркие линии коронального спектра соответствуют запрещенным переходам с одного энергетического уровня на другой у высокоионизированных атомов железа, никеля и т. д. Температура короны должна быть весьма высока, порядка миллиона градусов. По мнению И. С. Шкловского, в короне нет так называемого лучистого равновесия и в ней существуют большие отклонения от термодинамического равновесия. И. С. Шкловский полагает, что высокая температура короны может быть объяснена джоулевым теплом, выделяющимся благодаря наличию слабых электрических полей.

1) См. стр. 485 наст. тома, приложение 1.

Предпринятое Н. И. Лобачевским, Э. А. Кнорром и М. В. Ляпуновым первое путешествие ученых Казанского университета для наблюдения полного затмения Солнца положило начало традиции, которая далее не прерывалась до нашего времени. Экспедиции казанских астрономов — при участии иногда и физиков (проф. Д. А. Гольдгаммер), и математиков (проф. А. Ф. Попов) — на полные солнечные затмения 1851, 1887, 1896, 1914, 1936, 1941 и 1945 гг. дали много интересного и ценного для науки. Неразрывная нить связывает Н. И. Лобачевского с настоящим и будущим советской астрономии.

ПОЛНОЕ ЗАТМѢНІЕ СОЛНЦА

ВЪ ПЕНЗѢ 26 ІЮНЯ 1842 ГОДА.

(Отчетъ Орд. Проф. Лобачевскаго.)

Полное солнечное затмѣніе по справедливости назваться можетъ явленіемъ примѣчательнымъ и рѣдкимъ. Если кому довелось разъ видѣть его въ своей жизни, то конечно въ другой уже не случится, развѣ захотѣлъ бы переѣхать для того весьма большое разстояніе. Это мнѣніе не должно казаться преувеличеннымъ, если прибавимъ къ тому необходимость условія, чтобы небо для мѣста наблюденія было безоблачнымъ. Вотъ почему полное солнечное затмѣніе почитается не во всѣхъ подробностяхъ еще до сихъ поръ изслѣдованнымъ. Въ особенности физикъ желаетъ слышать удовлетворительные отвѣты на многіе вопросы: охлажденіе въ воздухѣ, теплота солнечныхъ лучей, постепенность омраченія, свѣтъ прямой, отраженной, погибь лучей вокругъ лунной поверхности. Астрономъ дорожитъ своими наблюденіями въ этомъ случаѣ, какъ встрѣчею двухъ главныхъ для насъ свѣтилъ на небѣ, которыхъ пути до тѣхъ поръ изслѣдовалъ

Первая страница оригинального издания сочинения «Полное затмение солнца в Пензе 26 июня 1842 года» (51-я стр. III книжки «Ученых записок Казанского университета» за 1842 г.).

К стр. 433.

ПОЛНОЕ ЗАТМЕНИЕ СОЛНЦА В ПЕНЗЕ 26 ИЮНЯ 1842 ГОДА

1842 III 51 ‖ * Полное солнечное затмение по справедливости назваться может явлением примечательным и редким. Если кому довелось раз видеть его в своей жизни, то конечно в другой уже не случится, разве захотел бы переехать для того весьма большое расстояние. Это мнение не должно казаться преувеличенным, если прибавим к тому необходимость условия, чтобы небо для места наблюдения было безоблачным. Вот почему полное солнечное затмение почитается не во всех подробностях еще до сих пор исследованным. В особенности физик желает слышать удовлетворительные ответы на многие вопросы: охлаждение в воздухе, теплота солнечных лучей, постепенность омрачения, свет прямой, отраженный, погибь ⋆ лучей вокруг лунной поверхности. Астроном дорожит своими наблюдениями в этом случае, как встречею двух главных для нас
52 светил на небе, которых пути до тех пор исследовал | он отдельно [1]. Наконец любопытно для каждого видеть, как отсутствием света внезапно среди дня бывает поражено в чувствах своих все то, что живет одушевленное в природе. Г. Штруве [2]⊘ представлял Академии наук отправить для наблюдений в Дубно, Чернигов, Курск и Пензу♀. В последний из этих городов, тоже на центральной черте затмения, предлагал он ехать Г. Симонову, с инструментами Казанской обсерватории [3]. Готовясь тогда к отъезду за границу, Г. Симонов принужден был передать поручение Г. Астро-

* После названия сочинения в оригинале напечатано: (*Отчет Орд. Проф. Лобачевского.*). См. фотоснимок, помещенный перед этой страницей.

⋆ Изгибание.

⊘ Лобачевский в отчете о затмении писал фамилию директора Пулковской обсерватории В. Я. Струве в согласии с ее произношением по-немецки — *Штруве*; однако в предписании Ляпунову 21 мая 1842 г. он пишет «Струве» (см. Модзалевский, стр. 439).

♀ Фраза остается незаконченной.

ному наблюдателю Ляпунову [4], к которому присоединились Г. Профессор физики Кнорр [5] и я, желая воспользоваться таким случаем для наблюдений физических и чтоб удовлетворить собственное любопытство [6]. Г. Ляпунов отправился ранее нас в Пензу 10, я с Проф. Кнорром 20 Июня. Инструменты положены были для безопасности в отдельном устроенном нарочно возке: труба прохождений, ахроматическая большая труба, две малых ахроматических труб, секстант с искуественным горизонтом, хронометр Бреге, магнитный инклинаторий и деклинаторий Гамбе, качательный магнитный снаряд, нагревательный снаряд Пулье, психрометр Аугуста, барометр, небесный глобус и хронометр Бреге с меткой (à pointage) [7].

Нам желательно было с Г. Кнорром наблюдать постепенность темноты и соединенного с ней охлаждения, как в атмосфере, так и в самых солнечных лучах *. Определять эту постепенность чрезвы-
64 чайно затруднительно. | Все до сих пор известные способы фотометрических измерений весьма недостаточны, в особенности тем, что не могут служить для наблюдений над явлениями мгновенными. Г. Штруве предлагал замечать, как будут показываться звезды различной величины. Сообразаясь с его желанием, взяли мы с собой небесный глобус, чтобы заранее познакомиться с местами на небе, где во время затмения должно было ждать появления планет и звезд. Отказаться совсем от этого рода наблюдений мы не хотели, хотя не надеялись, чтобы невольным образом развлеченное внимание могло дозволить нам улавливать с верностию те мгновения, когда звезды там и сям на небе покажутся. Появление звезд не только зависит от их величины, но даже от их возвышения над горизонтом, и наконец от света постороннего, который во время затмения бывает разлит весьма неровно в атмосфере. Мы с Г. Кнорром придумывали новые фотометрические способы, но, к сожалению, не могли достигнуть вполне желаемой цели. Сначала надеялись, что можно будет хорошо судить об освещении по ясности в кругах, начерченных на белой бумаге и разделенных черными вырезками различной меры [8]. Опыт показал, что ясность в разделении кругов далеко не отвечает той постепенности, в какой свет уменьшается.

---

* То-есть понижение температуры в тени и на солнце.

Я предложил еще составить снаряд из полупрозрачных пластинок, которых бы число, как скоро произведет уже совершенную темноту, могло служить мерой освещения. В этом способе также заключался свой недостаток: свет, поляризуясь в первых пластинках, приобре-
54 тал способ|ность проходить легче сквозь остальные. К тому же трудно сделать такой снаряд вместе ручным, складным и непроницаемым для постороннего света. Наконец в том и другом способе, ко всем сказанным уже недостаткам еще присоединяется главный тот, что глаз наш, сначала ничего не примечая в темноте, скоро потом в состоянии бывает уже видеть и самый слабый свет [9].

Г. Ляпунов, прибыв 15 Июня в Пензу, выбрал удобное место для временной обсерватории, где и занимался предварительными наблюдениями для верной установки своих инструментов, а потом определением географического положения. Пасмурная погода дозволила ему не прежде 21 испытать ход хронометра и поставить приблизительно трубу прохождений. С 21 по 28 продолжал он наблюдения соответственных высот и над прохождением звезд чрез полуденник. После чего с верностию можно было полагаться на хронометр, который однако ж к сожалению показывал истинное время только для Пензы, потому что раз остановился на пути туда, в другой на возвратном до Казани [10]. Широта места вычислена 53°10′30″,5 из наблюдений с 27 Июня до 4 Июля, по способу Г. Бесселя, над звездами первого вертикального круга [11]. Из прохождений луны чрез полуденник найдена долгота Пензы от Берлина 2ч6′50″; из затмений спутников Юпитера, первого — 2ч6′20″, второго — 2ч6′30″; последнее наблюдение сомнительно. Довольствуясь первым и прибавляя поправку 14″,5, находим долготу
55 самого города Пензы от | Берлина 2ч6′34″,7; от Казани к западу 16′18″,6 во времени; 4°5′ в градусах экватора [12].

По приезде вечером 23 Июня, на другой день утром поспешили мы с Г. Кнорром отправиться в Императорский сад, расположенный под самым городом. Здесь взгляд на временную астрономическую обсерваторию приятно нас поразил и выбором открытого возвышенного места и постройкой удобной, достаточной, под защитой от солнечных лучей и непогоды. Обязаны свидетельствовать нашу благодарность за ревностное содействие Г. Директору сада Магзигу, так же как и за внимание Г. Гражданского Губернатора

Панчулидзева, по приказанию которого градская полиция охраняла целость инструментов и ненарушимое спокойствие наблюдателей в их занятиях. Обсерватория была даже местом жительства для Г. Ляпунова; а нас пригласил Г. Магзиг в свой дом, которым предложением по доброте хозяина мы воспользовались [13].

В приготовлениях и совещаниях скоро протекли два дня, хотя с нетерпением ожидали мы видеть солнечное затмение. Наконец утром 26 Июня проснулись мы весьма рано, но с грустию при виде покрытого неба, пасмурной и дождливой погоды. Несмотря на то собрались в обсерваторию, поставили зрительные трубы и сидели ничего не делая. Уже прошло несколько минут после назначенного времени для начала, как сквозь туман облаков нако-
16 нец | ущерб солнца показался. Г. Ляпунов измерял секстантом расстояния между остреями серпа до начала и после затмения полного; замечал также прохождение на микрометре двух краев. Не льзя много полагаться на те и другие наблюдения как по трудности наблюдений этого рода, так и потому, что туман мешал ясности. Микрометрические измерения дают начало затмения в среднем Пензинском времени $9^{ч}9'24'',3$; измерения секстантом — $9^{ч}10'47'',7$. Начало и конец частного затмения не были совсем видны; начало полного затмения по хронометру $9^{ч}2'15'',4$; конец полного затмения — $9^{ч}15'14''$ *; а с присоединением поправки среднее время для Пензы будет при начале $9^{ч}9'22'',4$; при конце $9^{ч}12'21''$; следовательно, полное затмение продолжалось $2'58'',6$; средина затмения в $9^{ч}10'51'',7$ [14].

Астрономические наблюдения делал Г. Ляпунов, которому помощником был студент Магзиг. Мы с Г. Кнорром оставили для себя другого рода занятие: наше внимание обращено было на самое явление, по истине великолепное, хотя многое скрыто было для наших глаз под завесой облаков. На месте дневного светила, когда последний его луч исчез, явился темный круг; как бы само солнце, но теперь уже черное стояло на небе. В трепетном ожидании чего-то неизвестного, с торопливым желанием все видеть, с опасением чего-нибудь не заметить, стояли мы, зрители, среди призраков во мраке, с обращенным взором к потухшему солнцу, как

* Очевидная ошибка в одном из двух последних моментов. См. об этом в примечании [14].

57 обворо|женные, постигнутые страхом и беспокойством, вдохновенные чувством возвышенным и торжественным. С этим душевным волнением так трудно было внимательно наблюдать и замеченное сохранить в памяти, что, возвратившись домой, мы находили нужным в разговоре нашем друг друга поверять, так-ли и то-ли мы все* видели. Полное затмение поражает сильно всех животных. Птиц оно тревожит в особенности: из лесу поднялись с криком стаи галок и грачей, взвились на воздух и потом опять спустились на деревья. Перед нами невдалеке паслось стадо, пригнатое сюда к этому времени по приказанию Г. Магзига. За криком птиц вскоре послышалось мычанье коров и блеяние овец, которые все пустились бежать по дороге домой. На Пензинской торговой площади, где продолжалась ярмарка, собралось много народа. Там случилось в это время быть одному из моих знакомых, Г. Каховскому [15]. Он рассказывал, что солнечное затмение в начале заставило народ толковать и беспокоиться; но когда солнце совсем закрылось, то послышались голоса, вероятно городских жителей: ах, что-то делается дома; ах, пойти-было домой! С мыслей о преставлении света люди пали на колена, с воплем и молитвой ожидали над собой страшного суда. Но первый проскользнувший луч солнца прогнал и мрак в природе и страх в сердце людей. Г. Каховский любовался, как черная тень пробежала по равнине, по горам, и скрылась потом за лесом. Переход от темноты к свету казался
58 разительнее, чем от света к темноте. В помрачении | сохранялась какая-то постепенность до последнего мгновения, тогда как первый вырвавшийся луч из за луны вдруг переменил ночь на день; черная завеса вдруг упала. Когда затмение оканчивалось, Г. Губернатор, который был все время с нами близь обсерватории, подозвал к себе крестьян. На вопрос, что думали, они отвечали: ничего не думали, но мы перепугались.

В продолжении полного затмения темный круг луны был окружен светлым широким венцом. По словам Г. Кнорра, со вступлением полного затмения светлый венец несколько медлил показываться. Сначала был он растянут в две стороны горизонтально,

---

* В оригинале стоит *всѣ*. По мнению Л. Б. Модзалевского здесь нужно читать — *всё*, а не *все* (Модзалевский, стр. 465).

может быть случайным сгущением облаков, хотя случайность эта теряет что-нибудь из своей вероятности, как скоро направление было не другое, но именно горизонтальное [16]. Потом светлое пятно делалось почти треугольным, уменьшалось, округлилось, опять увеличилось и было под конец по крайней мере вдвое шире против солнца. С моим товарищем согласны мы в том, что свет на кольце казался менее близь лунного края, потом сгущался и затем постепенно слабел и терялся на небе. Ничего не могли мы заметить особенного местами [17]. Свет на венце был сплошным и с пепельным оттенком во всех направлениях, как бы свет дневной, проникнутый сквозь отверстия на своде, в пространство наполненное дымом. Между тем заря, занявшись от горизонта, разливала
39 по всему небу хотя чистый, но желтоватый свет, который | отражался слабо вокруг нас на всех предметах. Трудно судить, как велика была темнота; но мы друг друга видели хорошо. Студент Магзиг не мог читать книгу. Саженях в 50 от нас, в стаде заметил я светлую шерсть, но не в состоянии был различить, на какой скотине. Г. Кнорр признал пастуха только по движению и по очертанию. Тень от предметов нигде на земле не падала. Свет следовательно со всех сторон приходил равно сильный, от кольца вокруг луны, от зари по горизонту, от всех частей неба. Г. учитель Пензенской гимназии Трофимов заметил звезду в самом зените. В это время должна была действительно тут проходить Вега. На возвратном пути в Казань сказывали нам многие, что звезды видели, даже в городе Буинске, где затмение не было полное, но серп оставался едва заметным [18].

Г. Кнорр, испытывая в поляризоскоп, нашел, что свет кольца вокруг луны не был поляризованный [19], тогда как поляризование во всей остальной части неба казалось весьма сильное. Этот желтоватый поляризованный свет * был отраженный свет на верхние слои воздуха земной поверхности, освещенной вне лунной тени. В справедливости такого толкования не льзя сомневаться, когда свет от обитаемой нами планеты, пройдя все расстояние до своего спутника, падая на темную его половину, потом отражаясь отсюда, приходит снова к нам и дает луне пепельный цвет, видимый близь

* Свет кольца зари.

тонкого серпа в первой четверти. Надобно заметить, что свет от
60 земли много те|ряется, потухает в атмосфере, прежде нежели проникает в пустое пространство; за всем тем мы светим на нашу спутницу, может быть, еще более, нежели она светит на нас в ясные лунные ночи. И так понятно, что во время затмения полным отражением лучей на верхних слоях воздуха приходит к нам довольно свету, чтобы составить эту зарю, которую мы видели разлитой по всему небу. Но как истолковать происхождение светлого кольца вокруг солнца? Составляется ли венец этот собственно вокруг солнца, или вокруг луны, или гораздо ближе к нам, в нашей атмосфере? Вот вопросы, решение которых представляет уже большие затруднения. В заседании Парижской академии наук, где присутствовал тогда наш Профессор астрономии Г. Симонов, Г. Араго рассказ свой о затмении нынешнего года, которое наблюдал он сам в Перпиньяне, заключил откровенным сознанием, что светлый венец и все видимые в нем явления для него совершенно непонятны [20].

* Теперь я принимаюсь уже в другой раз за свой отчет о поездке в Пензу. Первый мой опыт сделался добычею пламени в несчастный день для Казани 24 Августа [21]. По крайней мере вторичный труд мой вознаграждается тем, что могу пользоваться сведениями, которые между тем до меня дошли в описании всех наблюдений над полным солнечным затмением нынешнего года. Я намерен здесь рассмотреть все предположения, какие можно бы сделать о происхождении венца вокруг луны во время затмения.

61 | Еще Буге заметил, что солнце в середине светлее, чем на краях, тогда как напротив здесь должен бы свет быть сильнее, на круглой поверхности, сжатой для нашего глаза. По своим измерениям нашел он от края на расстоянии в одну четверть солнечного полупоперечника свет слабее, нежели к середине, в содержании чисел 35 и 48 [22]. Лаплас заключил отсюда, что солнце должно быть окружено атмосферой, которая свет поглощает, и так много, что без этой атмосферы солнце на нас светило бы сильнее в 12 раз [23]. Мы с Г. Кнорром, наблюдая ход солнечного затмения, не могли удержаться, чтобы друг другу не заметить, сколько резким казался

* Здесь абзац сделан редакцией; в тексте Лобачевского его нет.

край луны, тогда как солнечный ограничивается чертой весьма нежной, хотя при всем том явственной и правильно закругленной. Это различие в двух пограничных чертах особенно противупола-галось в остреях серпа. И так надобно думать, что свет выходит не из одной поверхности, но рождается вместе на какой-то глубине. Впрочем, нет еще необходимости, чтоб этот свет брал свое начало от солнечного ядра, потом большею частию потухал, проникая сквозь атмосферу. Довольно, что атмосфера вокруг солнца существует, что свет происходит в ней к ее пределам, как явление теплотвора в грубом его переходе из средины, где внутренним равновесием он удерживался, к пустому пространству, которое не противупоставляет уже никакого сопротивления. Эта мысль подтверждает и то мнение Г. Гершеля, что солнце само должно быть
62 темным, что светит только вокруг него тонкая | оболочка, что по временам и местами эта оболочка, разрежаясь, бывает усеяна черными пятнами. Это значит отверстиями, сквозь которые мы видим темное солнечное ядро [24].

Атмосферы надобно почитать собственным произведением мировых тел. Если б они сгущались из той средины, в которой наша солнечная система двигается, тогда бы плотность их была в содержании * к массе тел, чего не находим однако ж по сравнению земли с луною [25]. Надобно полагать также, что атмосферы составляются из жидкостей воздухообразных *. Мы знаем, что жидкости текучие не могут существовать без наружного давления, следовательно должны быть покрываемы по крайней мере тем паром, который от них самих отделяется. Правда, что вокруг луны заметной атмосферы нет, но может быть на ней разлиты такие жидкости, которые дают только чрезвычайно тонкие пары. Вокруг солнца, при той сильной теплоте, которая в нем сохраняется, без сомнения атмосфера должна быть воздухообразная, подобно как и вокруг обитаемой нами земли. Г. Араго даже доказал, что свет от солнца именно с теми свойствами, какие могут принадлежать свету воздухообразных жидких тел [26]. Трудно судить о пределах солнечной атмосферы, когда ничего верного не можем даже сказать, как далеко простирается воздух над поверхностию земли. Если при-

* Т. е. в отношении

* Жидкости воздухообразные — газы.

нимаем в основание, что граница там устанавливается, где тяжесть
63 уравновешивается с упругостию *, то находим, | что высота нашей атмосферы должна бы в пять раз быть более земного полупоперечника, следовательно восходит до 32 060 верст [27]. Это чрезвычайно большая высота не подтверждается появлением зари, которая состоит в освещении верхних слоев нашей атмосферы. Легко понять, что упругость воздуха должна вместе уменьшаться с температурой, а следовательно гораздо ближе над поверхностию земли уравновешиваться с тяжестию. Гей-Люссак в своем аеростатическом путешествии нашел, что температура в воздухе уменьшается одним градусом сотенного термометра на 175 метров или 82 сажени. Если так охлаждение продолжается в воздухе до самых его пределов, то высота атмосферы будет выходить не более сотой части земного полупоперечника, около 57 верст, а температура должна бы понижаться до 350 сотенных градусов [28]. Таким образом уже высота делается слишком малой, а температура слишком низкой. Другое предположение, что температура в атмосфере так же уменьшается, как при нагревании твердых тел, в геометрической прогрессии, ведет к заключению, что воздух простирается на 30 часть земного полупоперечника, или на 190 верст, а температура доходит до 200 градусов ниже нуля, — выводы более других вероятные [29]. Г. Пульє недавно предложил теорию, которая во многих отношениях оправдывается различными наблюдениями и согласно с которой температура на пределах нашего воздушного неба должна быть не выше — 144° С [30]. Фуррье *, неизвестно впрочем в следствие
64 какого рода вычислений, утверждал, что тем|пература пустого пространства, где двигается наша солнечная система, должна быть не выше — 50° [31]. Если теперь эти понятия применяем к солнечной атмосфере, то со всей вероятностию должны думать, что вокруг солнца воздухообразная жидкость простирается далеко выше всех неровностей твердого ядра; что пограничные слои к пустому пространству, в переходе к весьма низкой температуре, производят явление света, который начинается на значительной глубине

---

* Несомненная ошибка: должно быть «с центробежной силой». См. примечание [27].

* Так в оригинальном издании. Правильно — *Фурье* (J. B. Fourier).

в солнечной атмосфере. Если бы теперь какие нибудь твердые части выдавались вон из этой атмосферы, то по свойству таких тел, остынув в чрезвычайно холодной средине, они казались бы нам постоянными черными пятнами, которых однако ж на солнце, кроме подвижных, совсем не примечаем [32]. Если Гг. Тулузские астрономы и Г. Шумахер видели во время последнего полного затмения светлые, розового цвета возвышения на лунном крае, то после всего сказанного здесь, трудно согласиться, чтоб эти возвышения могли быть солнечные горы [33].

Светлый венец вокруг солнца не льзя почитать за вторую солнечную атмосферу, кроме той, которая нас освещает; по крайней мере, если под атмосферой хотим разуметь всегда жидкую средину вокруг ядра в одинаковом с ним обращательном движении [34]. В таком случае атмосфера должна представляться сжатой от полюсов обращения к своему экватору. Хотя солнечное кольцо, как
65 нам казалось, занимало на небе до 2 градусов в шири|не своей, и хотя атмосфера при такой обширности может еще держаться в равновесии, но сжатие должно бы происходить весьма сильное [35]. Между тем оно никем не было замечено, ни в последнем, ни в прежних солнечных затмениях. Расширение, которое мы видели в начале, именно потому, что направление было горизонтальное, скорее надобно приписать нашей земной атмосфере или случайному расположению в облаках [36]. Наконец объяснить надобно те особые принадлежности*, которые никак не льзя допускать в составе воздушной атмосферы, потому что производить их обращательное только движение не может. Рассказ о наблюдениях в этом отношении весьма разнообразен. В Нарбоне* видели на юговосточной части лунного круга, в пространстве 45 градусов, сноп лучей неправильно раскинутых. От крайних лучей свет был слабее внутри снопа, от снопа в обе стороны ровный, но на конце северозападном выходил конусом, сгущаясь в острее. Г. Профессор Симонов в заседании Парижской академии наук слышал, как Г. Араго описывал явление совсем иначе по своему наблюдению. В Перпиньяне видел он вокруг солнца светлый венец из лучей прямых и потом загну-

---

* Смысл таков: наблюденные особенности.

* Так в оригинале. Правильно: «*Нарбонне*».

тых подобно плицам в колесе Пенселе * [37]; лучи выходили под различными углами к солнцу, даже в линиях касательных, и вообще давали венцу вид многоконечной звезды. В Монпелье также заметили, что край югозападный и северовосточный светил * сильнее; что на первом в начале показалась багряная черта, потом на
66 северозападном такого же цвета возвышение в 45″; | наконец еще два на востоке с раздвоенной вершиной. Астроном здесь находил большое сходство лучистого венца с распущенными по ветру волосами ⊘. Мы видели в Пензе, как я сказал уже выше, свет около солнца в начале растянутый, потом треугольный, наконец ровный сплошной, или с некоторым разнообразием, от неодинаковой густоты вероятно в облаках, но без особенных принадлежностей самому венцу ♀. Г. Ляпунов заметил в начале полного затмения на югозападном краю луны небольшое, может быть до $1^1/_2$ минуты, возвышение красного цвета, потом недалеко к северу показалось еще раздвоенное возвышение [38]. Вот это разнообразие, замеченное с различных мест наблюдения, мудрено толковать, допуская, что венец производит каким нибудь образом само солнце вокруг себя. Если бы требовалось объяснить только лучистый неровный состав венца, тогда бы можно было прибегнуть к предположению, что тонкое вещество, раз отделившись от солнца, двигается с чрезвычайною скоростию, повинуясь отталкивающей силе. Это бы значило принимать солнце за большую комету, окруженную весьма пространной атмосферой. Далеко растянутый хвост комет на стороне, противоположной от солнца, заставляет думать, что здесь отделяется вещество, которое солнцем отталкивается. Это действие солнечных лучей или самого ядра в солнце весьма хорошо можно видеть, как мне случилось и самому наблюдать в 1832 году, на комете Энке, которой атмосфера представляет еллипсоид, вытя-
67 нутый прочь от солнца. Подобным образом и в самом | солнце могут заключаться частички, которые, сделавшись свободными на поверхности ядра, разлетаются в разные стороны, по различным

* Так в оригинале. Правильно: *Понселе.*

* Правильнее было бы: «что края юго-западный и северо-восточный светили».

⊘ См. примечание [20].

♀ Смысл конца этой фразы таков: «...но без особенностей, принадлежащих самому венцу». Лобачевский хочет этим отметить, что у солнечного венца не наблюдалось каких-либо определенных очертаний в целом или в отдельных частях.

направлениям, различно сгущенные, с быстротой, где круговое движение солнца не может уже быть чувствительным. Это предположение не льзя допустить однако ж со всей вероятностию, по причинам, о которых упомянул я выше [39]. Действительно, в таком случае должно бы, кажется, ожидать гораздо более согласия в наблюдениях. Мы знаем, что светлые атмосферы вокруг комет от времени все более и более уменьшаются. Знаменитая комета Галлея, которая в прежних своих появлениях поражала всех ужасом, расстилая свой хвост до трети неба, пришла к нам в 1835 * году, окруженная светом очень скудным [40]. Напротив, светлый венец вокруг солнца бывает различной величины, не представляя приметного постоянного уменьшения. В 1567 году полное солнечное затмение приняли за кольцообразное: следовательно, кольцо вокруг луны показалось остатком в солнечном круге. В начале 1605 года видели полное затмение в продолжение нескольких мгновений, и темный круг луны казался окруженный светом, который распространялся на большую часть неба. Плантад и Кляпье рассказывают, что они видели, в 1706 году, полное солнечное затмение: вокруг луны было белого цвета кольцо шириной около трех минут, следовательно не более двенадцатой части лунного поперечника. Галлей описывает полное затмение 1715 года: за несколько секунд до наступления
60 полного затмения луна показалась окруженной | бледным светом, может быть шириною в десятую * или двенадцатую часть своего поперечника. Это же затмение наблюдал Французский академик Лувиль в Лондоне. Кольцо вокруг луны казалось ему серебристого цвету, гуще к внутреннему краю, слабее к окружности, которая за всем тем однако ж ограничивалась чертой определенной. В этом кольце свет промежутками ⊘ был различной густоты. Лувиль утверждал, что кольцо было однцентрным с луною; напротив, Маральди нашел при затмении 1724 года, что кольцо в начале было шире к западу, в конце к востоку. В 1778 году Испанский адмирал Уллоа наблюдал полное затмение, о котором пишет: кольцо вокруг луны показалось чрез 5 или 6 секунд после начала полного затме-

---

* В оригинале ошибочно напечатано: 1838.

* В оригинале ошибочно напечатано: *девятую*. У Галлея — *десятую*; в «Журнале Министерства Народного Просвещения» (см. стр. 494 наст. тома) напечатано верно.

⊘ Очевидно, — промежутками по направлению лучей.

ния, пропало в такое же время до конца, составляло около шестой части лунного поперечника, внутри было красноватого, далее желтоватого, наконец к окружности совершенно белого цвета. По местам из кольца выходили лучи, длиною в лунный поперечник. Бовдичь и Ферре* 1806 года видели полное солнечное затмение в Америке. Венец был одноцентрным с луною, 3 минуты в ширину, перловой белизны; из краев выходили лучи, простираясь градуса на два [41]. — Те же явления повторялись, следовательно, всякий раз, но в различном только размере. Если мы видели в Пензе венец гораздо шире, то нет сомнения, что причиной тому было пасмурное небо.

Кеплер, рассуждая о затмении 1598 года, светлое кольцо думал
69 объяснить или воспламенением эфира вокруг солнца, | или преломлением лучей в лунной атмосфере [42]. Первое объяснение не заключает в себе ничего, кроме понятий неопределенных и предположений без основания. Второе допускать не льзя потому, что вокруг луны атмосфера, если существует, должна быть ничтожная, которая не может быть причиною приметных явлений. В последствии опыты Фложерга, Делиля и Майера, кажется, наклонили астрономов более к тому мнению, что кольцо происходит от погибания лучей близ лунной поверхности [43]. Фложерг, подражая затмению, подвешивал темный шар против солнца, и брошенную тень принимал на полотно. Когда видимый поперечник шара составлял 1964″,6, то в средине тени появлялась светлая точка, которая, с приближением полотна, расширялась, и наконец, когда видимый поперечник шара доходил уже до 4°46′54″, распространялась на всю тень слабым полусветом. Поперечник солнца был вымерен при опытах в 1927″,76, почти равный с поперечником шара в то время, когда свет внутри тени соединяется в одну точку. Подобное бывает и в солнечном затмении; откуда Фложерг заключил, что кольцо происходит от лучей, которые, погнувшись у лунной поверхности, проникают в средину тени. Опыты Делиля были в том же роде, но явление думал он приписать разносу лучей (irradiation), тогда как оно собственно заключается в погибании света (inflexion). Повторяя опыты Фложерга, хотя не делая

* Так в оригинале. Правильно: *Феррер* (Ferrer).

самых измерений, мы с Г. Профессором Кнорром нашли то же. Впрочем, погибание лучей в середину тени физикам известно
70 хорошо; но те|перь остается сделать из этого применение к кольцу в затмении. По теории вытекания (émission) надобно предполагать действие темных тел на свет только в неприметном расстоянии, а следовательно луч, погибаясь у поверхности темного тела, должен за тем уже продолжать свой путь по прямой линии. Теперь прямая, от наблюдателя до внешнего края на светлом кольце, проходит мимо луны на расстоянии по меньшей мере в одну двенадцатую долю лунного поперечника — расстояние слишком большое, чтобы здесь могло происходить какое нибудь действие на свет. Эта теория вытекания, придуманная Невтоном *, предполагает еще в светлых частичках попеременную наклонность отражаться или проникать [44]. По такому свойству своему луч может сначала принимать кривизну темного тела, потом, изгибаясь в противную сторону, приходить уже к нашему глазу; но в таком случае последнее направление будет по прямой, которая падает на темное тело. От этого край, из за которого свет приходит, будет нам казаться прозрачным или выщербленным в том месте, где светлое тело начинает скрываться за темным, как это действительно всегда так и бывает. Вот почему покрытие звезды луною замедляется до $3\frac{1}{2}$ секунд времени, в продолжении которого звезда как бы продолжает уже свое движение по лунному кругу, или другими словами, луна в этом месте бывает как бы вырезанной. Это замедление должно бы составлять около 50″ в дуге по наблюдениям Сежура, Мешеня и Лекселя (Histoire de l'Astronomie, par Delambre) *,
71 тогда как Лемёнье ⊘ | назначает не более 13″ [45]. Сжатие в видимой величине планеты Венеры, когда проходит она по солнцу, оказывается еще менее, около 6 секунд [46], вероятно потому, что крайние погнутые лучи к средине тени по слабости своей делаются нечувствительны для глаза при солнечном сиянии. Этой же причине надобно приписать и все разнообразие в замедлении звезд,

---

* Фамилия Ньютона в других местах текста «Ученых записок» пишется: *Нютон*; здесь — исключение.

* Delambre — Histoire de l'Astronomie au dixhuitième siècle, 1827 (стр. 718, 721—722).

⊘ Обычное написание: *Лемонье* (Le Monnier).

смотря по тому, какой величины самая звезда и какая часть луны бывает освещена. И так от погибания лучей луна во время затмения должна быть окружена светом, который, собственно, представляет не расширение солнечного круга, но сжатие лунного, и который ни в каком случае не может составлять более $\frac{1}{40}$ лунного поперечника, тогда как его находят от $\frac{1}{12}$ до $\frac{1}{10}$; а мы в Пензе видели сквозь облака приметный свет по крайней мере на 2 градуса по небу [47]. Скажем и то, что погибание лучей должно бы давать свет сильнее к наружному краю. Хотя некоторое послабление * заметил я близ самой луны, но вообще явление происходило совсем в другом роде.

Переходим теперь к другой теории, Декарта, сильно поддерживаемой Гугенсом и потом Эйлером, известной под названием системы волнений (ondulations), которой физики принуждены были во всех отношениях дать преимущество, особенно когда Г. Юнг прибавил к тому перекрестывание лучей (interference) [48]. Пользуясь этой теорией и с помощию своих новых предположений, Френель вычислял гиперболическую линию в уклонении света,
73 подтвердил эту кривизну дей|ствительным измерением, наконец хотел уже здесь видеть несомнительное опровержение системы Нютона [49]. Не прямое движение света, после того как он прошел мимо темного края, приличнее называть *разбрасыванием* (diffraction), следуя системе волнений, нежели *погибанием* (inflexion), которое должно быть постоянным при всяком размере непрозрачного тела, завися, по теории Нютона, от действия только в неприметном расстоянии. Система волнений, с предположением к тому Френеля, достаточно нам объясняет, каким образом возле пограничной черты на тени, в обе стороны, ложится кайма Гримальди, где красный цвет уклоняется всегда менее, следовательно менее покрывается другими, отчего бывает господствующим, когда тень происходит от сложного солнечного света [50]. Нет сомнения, что багряная черта, которую видели в Монпелье по краю луны, была явлением в этом роде. Г. Ляпунов в Пензе заметил эту черту даже сквозь облаков. Покуда не наступало полное затмение, мы с Г. Кнорром

---

* В «Ученых записках» стоит не *послабление*, а *погибание*. В «Журнале министерства народного просвещения» (см. стр. 492 наст. тома) напечатано — и, несомненно, правильно — *послабление*.

долго любовались яркой красной чертой на солнце возле лунного края; слабый отблеск видел я также на темной половине к верху [51]. Мне кажется более основательным приписывать тому же разбрасыванию лучей от лунных гор и происхождение тех возвышенностей, которые были замечены как бы выдвинутыми из-за луны. Об них упоминает и Г. Ляпунов, назначая величину до $1\frac{1}{2}$ минуты, слишком уже большую для гор на самом солнце, чтоб это последнее мнение могло казаться сколько нибудь вероятным, тогда как
73 окрашенная кайма красным | цветом вне тени, брошенной незначительным возвышением луны, легко может достигать до такого расширения на расстоянии до нашей земли [52]. Что же касается до светлого кольца, то хотя кривизна лучей и подает с первого раза повод предполагать здесь именно такое направление, которое бы свет расширяло для наших глаз вокруг луны, но вникнув, каким образом это направление должно быть определено, находим, что кольцо так же мало может быть произведено разбрасыванием, как и погибанием лучей. Юнг доказал наблюдениями, что кайма пропадает внутри тени, как скоро другой край темного тела закрывается; следовательно, для каймы необходимо взаимное действие двух краев, которые Френель и принимает за место, где начинают образоваться новые волны. Эти последние волны почитает он единственной причиной, почему свет распространяется внутри тени, так что здесь в согласном перекрестывании свет усиливается, в противоположном — уничтожается. Если таким образом цветные полосы могут образоваться на всяком месте, внутри или вне тени, то направление света по теории должно быть всегда перпендикулярно к поверхности составной волны. Возьмем теперь в пример освещенное место в самой средние тени. Сюда волны приходят от всех краев одинаково; нормальная линия составной волны должна, следовательно, быть направлена к центру луны, но не выходить вон за темный круг. Из других мест внутри тени нормальные принимают различные направления, которые тем не менее
74 все без исключения выходить вон из | тени не могут, чтобы составить потом светлое кольцо вокруг луны [53].

Систему волнений не льзя справедливо называть теорией, а только выражением тех явлений, которые желают объяснить. Истинная теория должна заключаться в одном простом, единственном начале,

откуда движение берется, как необходимое следствие, со всем своим разнообразием. Еще Пуассон в письме к Френелю (Annales de Ch. et de Ph., 1823, p. 270*) заметил несообразности, как скоро хотим итти далее тех случаев к которым теория волнений приспособлена [54]. Говорить о волнах, значит основывать все суждение на том, что в строгом смысле не существует, подобно тому как мы говорим о линиях и поверхностях, тогда как в природе находятся только тела. Теория волнений представляет верно некоторые законы в явлениях света, но не дает еще понятия, в чем существенность заключается. То несомнительно, что пространство повсюду наполнено центрами, откуда вытекает или сила притягательная или сила отталкивающая; что центры таким образом между двух противоположных сил держатся в равновесии; что нарушение равновесия бывает или причиной изменения совершенного, или только колебаний внутри тел [55]. Г. Коши первый вздумал этим путем идти в изложении теории для света. Однако ж, предполагая качания для частичек эфира, не принимает в рассуждение того, как это движение должно начинаться; почему свет
75 пробегая всегда прямую линию, не примечается | более на пройденном пути, тогда как еще качания должны бы продолжаться? Г. Коши доказывает эллипсоидное движение частичек в их качании; затем в трех осях эллипсиса произвольно хочет допускать две оси для поляризации и третью ось для явлений теплоты [56].

Г. Профессор Кнорр однажды в разговоре со мной остроумно заметил, что нет еще достаточной причины вооружаться против теории Ньютона, так же как неблагоразумно было бы не пользоваться преимуществом другой системы. Можно верным остаться теории Ньютона, прибавя только, что поток эфира, встречая препятствие на пути, приходит в волнение, подобно тому как вода в реке встретив плотину, поднимается волной, разделяется на две струи, между которыми происходит пустота, наконец вода соединяется снова в общий поток; или подобно воздуху, который встречая препятствие, также волнуется, разделяется на два потока, с пустотой между ними; волнение здесь производит иногда звук

* Библиографические данные см. в примечании [54] на стр. 472.

и прежнее течение за пустотой восстановляется. Падение воды за плотиной и пустота, воздухом оставляемая за стеной, отвечают, следовательно, брошенной тени позади непрозрачных тел; стремление воды или воздуха с двух сторон сливаться вместе представляет нам уклонение света к средине тени. Таким образом две теории соединяются в одну для толкования всех явлений света [57]. Оставалось бы решить, какою силой в эфире надобно заменить тяжесть воды или упругость воздуха; при том выбрать эту силу
76 так, чтобы са|мая большая часть светлых частичек сохраняла прямолинейное движение — отличительная принадлежность света. Этот взгляд приобретает тем более вероятности на своей стороне, что представляет теорию света с теорией теплоты в той же тесной связи, в какой находятся самые явления; тогда как система волнений оставалась без всякого применения ко всему тому, что мы до сих пор из опытов уже хорошо знаем о нагревании тел.

Рассуждая во всей обширности, не стесняя себя никакими предположениями покуда без необходимости, надобно думать, что частички света в своем источнике получают как погонное, так и качательное движение. Первое можно почитать причиною как освещения, так и нагревания, разумея здесь динамическое действие соединенным с накоплением теплотвора от проникнутых частичек внутрь тела. Наконец в качательном движении можем отыскивать происхождение цветов и всех явлений поляризованного света [58]. Я не берусь еще на таких новых началах построить всю теорию, но последнее солнечное затмение, которого был я свидетелем, подало мне повод к этим замечаниям, тем более что почел своей обязанностию сказать что-нибудь о светлом кольце вокруг луны. Мое мнение таково, что ни погибание (inflexion), ни разбрасывание лучей (diffraction) не в состоянии производить подобное явление. Погибание лучей уменьшает во время затмения видимый поперечник луны, следовательно солнце должно выставляться кольцом,
77 но кольцом тонким, не шире | нескольких секунд, как должно заключать по замедлению в покрытии звезд, где величину погибания наблюдают вполне. Разбрасывание лучей, напротив, нисколько не участвует в образовании кольца, и даже не бывает чувствительно в средине тени, где бы должно обнаруживаться красным

цветом, как таким, который в кайме Гримальди другими не покрывается. Повторив опыт Фложерга *, могу сказать только, что хотя видел я свет вокруг темного края, но свет в том же роде, как видим его близ непрозрачных тел, куда бы к освещенной части неба ни обращались. На расстоянии, где темный шар одинаковой величины с солнцем, красный свет появляется в середине, потом с уменьшением расстояния хотя расширяется по всему темному кругу, но вон не выходит и кольца не составляет.

На образование кольца вокруг луны можно подозревать большое влияние воздуха. Чтобы судить об этом влиянии, позволил я себе в начале, с некоторой подробностию даже, говорить о границах и составе нашей атмосферы. Первое, что надобно заметить в этом отношении — понижение температуры во время затмения. Наблюдения делал Г. учитель математики в Пензинской гимназии Хватунов.

26 Июня 1842, утром,	$8^ч\ 0'$ . . .	$+15°,2$	
	8 15 . . .	14, 4	
	8 30 . . .	14, 7	
	8 45 . . .	14, 5	
78	9 0 . . .	14, 0	
	9 11 . . .	13, 4	начало полн. затмен.
	9 30 . . .	13, 9	

Показания термометра в градусах Реомюра. Ветер был юго-западный, весьма тихий; барометр стоял на 727, 9 миллиметрах и приметно не менялся. И так, самое большое падение термометра составляло 1°,8, несмотря на то, что за продолжительным дождем с утра небо начинало проясниваться, отчего воздух должен бы нагреваться скоро [59]. Если теперь от лунной тени произошла в температуре столь значительная разность у земной поверхности, то без сомнения на границах самой атмосферы должна быть эта разность чрезвычайно резкая, особенно в том месте, где тень разграничивалась со светом. После чего делается вероятным, что солнечные лучи, менее других погнутые близ луны, следовательно самые обильные светом, должны преломляться в отененном воз-

* Относительно каймы Гримальди см. [50]; об опытах Фложерга см. [43].

духе так, что большая часть из них могла приходить к нашему глазу в том самом направлении, какое требуется для произведения кольца вне темного лунного круга. От охлаждения должно происходить движение в воздухе: стремление со всех сторон в тень, и течение к низу внутри тени. Это движение, соединенное с движением самой тени, вероятно причиной и неравного преломления, которое в светлом венце производит искривленные полосы. Может быть присоединяется к тому различное состояние воздуха на границах атмосферы, представляя переход к жидкому капельному,
79 |даже к твердому телу, при чрезвычайном холоде в прикосновенном пустом пространстве. Итак, не мудрено, что здесь бывают внезапные превращения, которые по временам и местами дают солнечным лучам особенное направление, отчего происходит явление, какое находим в описании Уллоа [60].

Может быть светлое кольцо вокруг луны составляет явление более сложное, нежели как я здесь его представил, и как вообще все явления света физики до сих пор разумеют [61]. Возьмем в пример освещенные тела, которых отраженный свет обыкновенно принимают, с одной стороны, слабее в содержании к квадрату расстояния, с другой усиленным в том же содержании сжатием видимой величины. Между тем, если напряжение света должно быть независимым от расстояния, то трудно понять, каким образом наша мрачная земля на весьма большом расстоянии делается светлым пятном, подобно прочим планетам и луне. Мы видим, что облако вдали гораздо более светится, нежели тот туман, которого вид оно должно принять, когда мы к нему приблизимся. Представим себе светлые тела, размещенные с промежутками на такой глубине, что свет от них кажется непрерывным. Теперь в конусе видимой величины за каждым телом должны скрываться другие, которых свет уже до нашего глаза не доходит, и число которых будет тем более, чем ближе находимся к куче тел. Отсюда необходимо
80 происходит уменьшение в свете, ко|торое совсем не предполагают, доказывая равную силу в освещении на различных расстояниях. По примеру таким обрзвом скученных тел можем заключать о всяком теле, которое должно разуметь собранием атомов, размещенных на расстояниях. Без сомнения, не в этом одном состоит усиление света на большом удалении. Трудно согласиться, чтоб от этой одной

причины наша темная земля могла принадлежать на небе к числу светлых планет. Мысль, что на планетах плоскости в различных направлениях отражают свет, эта мысль не может быть допущена даже для металлических * зеркал, в противность основного понятия, как мы внутренний состав тел должны себе представлять. За тем какие зеркальные грани свет может встречать на тумане в облаках или на тонких парах кометного хвоста, чтоб отразившись приходит[ь] еще приметным для нашего зрения? Предположение, что свет, коснувшись твердого тела, заставляет каждую точку делаться новым центром волнения, это предположение Френеля хотя произвольное, подтверждается тем не менее на самом деле [62]. Не льзя сомневаться, чтобы свет в прикосновении не возрождался снова, чтоб это возрождение не было тем сильнее, чем более сопротивления для света, чем разительнее, следовательно, переход из одной средины в другую. Когда теперь идем от этих положений, то делается вероятным, что в прикосновении света поверхность нашей атмосферы сама начинает светить, и что в кольце вокруг луны мы видим также собственный свет от верхних воздуш-
81 ных | слоев, подобно тому как эта тонкая оболочка нашей земли должна гореть ярким светом для жителей на прочих планетах и на луне [63].

Вот все, что мог я сказать за моих товарищей и за себя, как очевидцев полного солнечного затмения в Пензе. Г. Ляпунов свои наблюдения изложил особо [64]. Пользуясь нашим пребыванием в этом городе, мы сделали также несколько магнитных наблюдений.

Для магнитного наклонения был употреблен снаряд и стрелка работы Гамбея в Париже. Два ряда наблюдений сделаны, как обыкновенно, с перекладыванием и перемагничиванием стрелки. Первый ряд дает 65°33′,25; второй 65°34′,19. Однако ж мы заметили, что стрелка Гамбея в одном конце принимала более магнетизма. Наблюдения с другой стрелкой, приготовленной в механическом заведении нашего университета, дали магнитное наклонение 66°19′,9. Прежде того 21 Октября 1836 года Г. Профессор Кнорр определил в Пензе наклонение 66°19′,1.

---

* В «Журнале министерства народного просвещения» (и у Модзалевского) вместо *металлических* напечатано *математических*. Это — безусловное искажение текста Лобачевского.

Магнитное отклонение в Пензе Г. Ляпунов находит как среднее из своих наблюдений для северного конца 1°25′4″,7 к востоку.

Горизонтальное напряжение магнетизма можно заключить из сравнения наблюдений, сделанных тем же снарядом в Казани и в Пензе, при равных дугах качания [65].

63 | 1836 июня 29. В Казани, время 10 качаний при 0° R 50″, 35
1836 октября 22. В Пензе . . . . 48″,187
1842 июля 18. В Казани . . . . 50″,391
1842 июня 25. В Пензе . . . . 48″,156*

В отношении к физической географии город Пенза заслуживает внимание своим гористым положением и потому климатом более суровым, нежели как бы должно было ожидать, судя по географической широте. Эта возвышенность, открытая на пространную степь к востоку, бывает причиною грубых перемен в температуре и составляет отличительную принадлежность стран в соседстве с северной Азией. Особенно весной, после теплой погоды в апреле, когда плодовые деревья начинают уже цвести, северозападный порывистый ветер приносит холодный дождь и даже снег. В Казани 1842 мая 31 снег покрыл совершенно землю; в это же время термометр в Пензе спускался до нуля, снежинки летали по воздуху, хотя таяли, падая на землю [66]. Далее к Саратову, на равнинах по берегам Волги, с уничтожением гор, климат делается столько теплым, что растет уже виноград. Пенза хорошо выбрана местом для садоводства, которому принуждены здесь учиться как искусству, тогда как в южной России на согретой почве, под благоприятным небом, не нуждаются и пренебрегают пособием для природы, без того богатой растительною силой. Напротив, подобное небрежение к северу бывает причиною неудач, в которых по незнанию дела часто хотят обвинять несправедливо самое садоводство [67].

---

* В «Журнале министерства народного просвещения» эти числа заменены следующими: 50″,36; 48″,087; 50″,391; 48″,165. Причины такого расхождения не удалось установить. В статье Н. И. Иванова «Ученые собрания профессоров Казанского университета» (см. стр. 497 наст. тома) приводятся некоторые числовые результаты из сообщения Лобачевского о затмении, в частности, вместо двух последних чисел дается 68″,391 в Пензе (явная ошибка) и 48″,156 в Казани.

63 | Гористое положение Пензенской губернии не представляет никакой правильности в своем образовании, тогда как от Симбирска до Казани господствует одна только возвышенность правого берега Волги, от которой в Симбирской губернии начинается уже степной вид полей. Г. Кнорр полагает, что вода на земной поверхности сначала долго пребывала запертая в случайных углублениях; потом, проложив себе дорогу, произвела реки, где течением углубилось дно и придало возвышенность берегам, которые может быть совсем и не должно почитать за ветви горных хребтов. Такое мнение совершенно подтверждается при первом взгляде на холмистую поверхность Пензенской губернии. Падение реки Свияги произвело в высоком Волжском береге разрыв, где в промежутках еще видны остатки. На одном из таких возвышений уцеленного берега построен город Свияжск [68].

ПРИМЕЧАНИЯ

[1] Перед наблюдателями полного солнечного затмения 26 июня (8 июля нов. ст.) 1842 г., которое ожидалось в Европе после длительного перерыва, впервые встала важная цель — разрешить при помощи физических наблюдений вопросы, связанные с природой Солнца и с явлениями, происходящими при затмениях на поверхности Земли и в ее атмосфере. Лобачевский особо обращает внимание на эту, самую актуальную в ту эпоху, сторону наблюдения затмения, вместе с тем, выделяя феномены, предположительно вытекающие из теории света, как погибь (изгибание, диффракция) лучей Солнца.

Астроном в старом смысле слова, в отличие от физика, должен был решать только задачи, относящиеся к положениям светил на небе; он использовал затмение для определения относительных координат Солнца и Луны при особо благоприятных условиях.

При наблюдении солнечного затмения различают четыре так называемых контакта. Первый контакт соответствует началу частного затмения (внешнее касание круглых дисков Солнца и Луны); второй и третий контакты — началу и концу полной фазы (внутренние касания Солнца с Луной); четвертый, или последний контакт — концу затмения (внешнее касание дисков). В случае полного затмения диск Луны, конечно, должен иметь больший диаметр, чем солнечный диск. Если же Солнце во время затмения имеет больший видимый диаметр, чем Луна, то второй и третий контакты будут внутренними касаниями Луны с Солнцем, соответствующими началу и концу кольцеобразного затмения (так как в промежутке между этими контактами темный диск Луны будет окружен светлой каемкой Солнца).

Из наблюдений моментов контактов можно получить относительное положение центров Солнца и Луны на небесной сфере, что важно для проверки таблиц их движения. При этом должно быть известно положение наблюдателя в пространстве, для чего, в свою очередь, требуется точное знание его географических координат на земной поверхности.

[2] В. Я. Струве (1793—1864) — крупнейший русский астроном, академик, основатель и первый директор Главной обсерватории в Пулкове.

[3] И. М. Симонов (1794—1855) — профессор астрономии и директор астрономической обсерватории Казанского университета, участник знаменитой экспедиции Беллинсгаузена и Лазарева в Антарктику в 1819—1821 гг.

У первого профессора астрономии в Казани И. А. Литтрова вместо обсерватории имелось только небольшое и неудобное для наблюдений помещение и очень мало инструментов. Современное здание университетской обсерватории было выстроено в 1834—1836 гг. при самом непосредственном участии И. М. Симонова и Н. И. Лобачевского, бывшего председателем строительного комитета. Обсерватория была открыта в 1838 г., причем для нее был приобретен ряд первоклассных по тому времени инструментов (9-дюймовый рефрактор, большой пассажный инструмент, несколько позже — меридианный круг, многие другие инструменты)[1]. Вскоре после поездки Лобачевского и Ляпунова на затмение здание обсерватории сгорело при страшном пожаре Казани 24 августа 1842 г. (Симонов в это время был за границей).

[4] М. В. Ляпунов (1820—1868) — с 1840 г. астроном-наблюдатель, с 1850 г. — директор Казанской университетской обсерватории, в 1855 г. ушел из Казанского университета. См. о нем во вводной статье[2].

[5] Э. А. Кнорр (1805—1879) — профессор физики и физической географии (метеорологии) Казанского университета с 1832 по 1846 г. С 1846 по 1858 г. занимал ту же должность в Киевском университете, после чего ушел в отставку. См. о нем во вводной статье[3].

Мнение Энгеля, что Лобачевский был с Кнорром в хороших отношениях, находит себе подтверждение в общем тоне высказываний Лобачевского о Кнорре в отчете о затмении, а предположение того же Энгеля, что Кнорр передал Гауссу в 1840 г. «Геометрические исследования» Лобачевского[4] может быть подкреплено очень вескими доводами.

---

[1]) См. И. М. Симонов — Описание астрономической обсерватории имп. Казанского университета, Журнал Министерства народного просвещения, часть VII, 1838, отд. II, стр. 1—22.

[2]) Стр. 426 наст. тома. См. также Н. П. Загоскин — Биографический словарь профессоров и преподавателей имп. Казанского университета (1804—1904), ч. 1, Казань, 1904, стр. 419—422.

[3]) Стр. 426 наст. тома. См. также: Н. П. Загоскин, цит. соч., стр. 355—357, В. С. Иконников — Биографический словарь профессоров и преподавателей имп. университета св. Владимира (1834—1884), Киев, 1884, стр. 262—264; Nikolaj Jwanowitsch Lobatschefskij. Zwei geometrische Abhandlungen aus dem Russischen übersetzt mit Anmerkungen und einer Biographie des Verfassers, von F. Engel, 1899, стр. 438—440.

[4]) См. т. I наст. издания, стр. 172. При всем том остается весьма вероятным предположение, что в издательство Финке Лобачевский направил «Геометрические исследования» при посредстве профессора И. А. Финке (см. там же, стр. 174). [*Примечание главного редактора.*]

В большой отчетной статье «Об ученых путешествиях профессоров, преподавателей и воспитанников Казанского университета с 1827 по 1843 год [1]) имеется подробный и очень любопытный отчет о поездке Кнорра за границу в 1840 г. Вскоре после начала своего путешествия Кнорр посетил Берлин. «Тут возобновлены им прежние связи с многими учеными, особенно с знаменитым бароном Александром Гумбольтом, Леопольдом Вухом, Поггендорфом, Дирксеном, Энке, Лихтенштейном и Мичерлихом» [2]). После Германии Кнорр посетил Австрию, Францию и Англию. Вот что сказано о последнем этапе его поездки: «Посему, проведя 14 дней в столице Великобритании, проф. Кнорр поехал, через Роттердам, в Геттинген, где возобновил прежнее знакомство с профессорами Гауссом и Вебером и вступил в новые связи с Гг. Листингом и Штерном. Заказав у механика Мейерштейна некоторые магнитные аппараты, изобретенные Гауссом и Вебером, проф. Кнорр отправился, через Берлин, С.-Петербург и Москву, в Казань, куда и прибыл в начале февраля 1841 г. Все действия проф. Кнорра в чужих краях для пользы науки, Университета и учебного округа, приобретают ему в высшей степени признательность его сочленов и ставят это путешествие наряду с теми, которые принесли Казанскому университету наиболее известности за границей» [3]).

Совершенно очевидно, что известное письмо Гаусса к Энке от 20 января/1 февраля 1841 г. [4]) написано под свежим впечатлением только что происшедшей встречи с Кнорром, который, как видно из приведенных цитат, был с ними обоими давно знаком. Естественно, что Гаусс при свидании с Кнорром должен был повести разговор о том, что̀ его всего более интересовало в Казани — именно, о Лобачевском. Интерес, возбужденный у Гаусса этим разговором, отражён и в письме к Энке. Очевидно, Кнорр, взяв рукопись «Геометрических исследований» для издания (и передав ее в первом этапе своей поездки издательству Финке в Берлине), имел при себе и оттиски какой-то другой геометрической работы Лобачевского. Эту работу (написанную по-русски) он и прислал Гауссу после свидания с ним. Столь же понятно, что и Гаусс, после долгого перерыва в знакомстве, не вспомнил точно фамилию Кнорра в письме к Энке. Наконец, весьма вероятно и то, что общее суждение о поездке Кнорра, высказанное в конце

[1]) «Журнал Министерства народного просвещения», часть 40, 1843, отд. 3. стр. 53—104; перепечатано в «Прибавлениях к Казанским губернским ведомостям», № 8, 21 февраля 1844 г., стр. 114—121 (и в других номерах); отчет о поездке Кнорра — на стр. 75—80 «Журнал министерства» и стр. 117—121 «Прибавлений».

[2]) Там же, стр. 77, соотв. 119.

[3]) Там же, стр. 80, соотв. 121.

[4]) Т. I наст. издания, стр. 173.

отчета (см. выше), принадлежит не кому иному, как ректору университета Лобачевскому; оно вполне подтверждает все сделанные здесь заключения.

[6] Л. Б. Модзалевский опубликовал ряд документов, касающихся Казанской экспедиции на затмение 1842 г.[1]). Мы отметим только, что в документе № 473 от 21 мая 1842 г.[2]). Лобачевский сообщает М. В. Ляпунову о письме директора Главной обсерватории Струве к Симонову, «которым он изъявляет желание, чтобы 26-го июня сего года было наблюдаемо в Пензе солнечное затмение». Лобачевский просит Ляпунова «составить примерное счисление, какие издержки потребуются для проезда в город Пензу».

К этому можно добавить, что на путевые расходы Лобачевского, Кнорра и Ляпунова было израсходовано 256 р. 46 к. серебром[3]).

В своем предписании 5 июня 1842 г.[4]) Лобачевский дает указания Ляпунову о сдаче им обсерватории (которой Ляпунов заведывал в виду отъезда Симонова за границу) профессору П. И. Котельникову, а также о наблюдении за перевозкой инструментов и об откомандировании с Ляпуновым одного из служителей обсерватории. К сожалению, как уже отмечено во вводной статье[5]), письмо В. Я. Струве и инструкция Симонова о наблюдении затмения не сохранились: их не удалось найти ни в Центральном гос. архиве ТАССР, ни в переписке Симонова, хранящейся в отделе рукописей и редких книг научной библиотеки Казанского университета. Нужно думать, что все эти документы сгорели при пожаре 24 августа 1842 года.

[7] Некоторые из перечисленных инструментов уже не существуют в их прежнем виде, но их описание имеется в каталоге инструментов Казанской университетской астрономической обсерватории; другие инструменты существуют и теперь[6]).

Труба прохождения (или, иначе, переносный пассажный инструмент Эртеля) была приобретена в 1840 г. Она имеет объектив в 43 *мм*, ломаную трубу и горизонтальный круг в 30 *см* диаметром, при котором четыре нониуса с точностью отсчетов до 10″. С этими инструментами М. В. Ляпунов производил наблюдения для определения гео-

---

[1]) Материалы для биографии Н. И. Лобачевского. Собрал и редактировал Л. Б. Модзалевский. Изд. АН СССР, М. — Л., 1948. (В дальнейшем цитируется: Модзалевский). Документы №№ 473, 476, 478, 481, 482, стр. 439—448

[2]) Модзалевский, стр. 439—440.

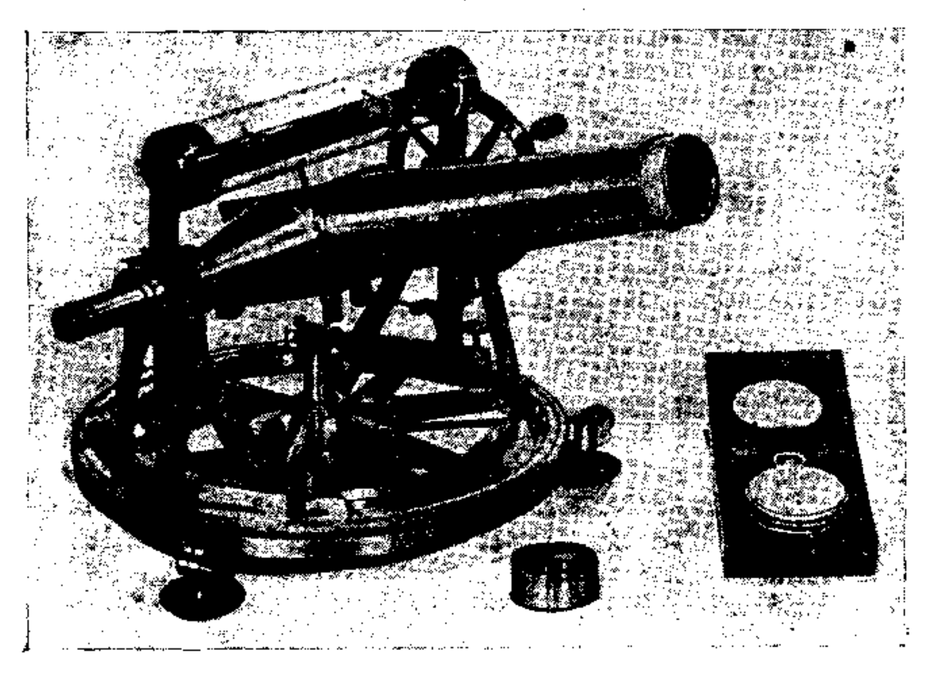
[3]) Протокол Совета Университета от 14 августа 1842 г., пункт 25д. Центр гос. архив Татарской АССР, фонд 977, № 8703.

[4]) Модзалевский, документ № 478, стр. 444.

[5]) Стр. 422 наст. тома.

[6]) См. фотографию на следующей странице.

графических координат пункта наблюдения в Пензе. Ахроматическая большая труба Фраунгофера, заказанная И. М. Симоновым в Венском политехническом институте в 1823 г. и полученная в 1828 г., имеет объектив в 97 *мм*; две малых трубы — Рамсдена и Тангета — еще до основания университета принадлежали казанской гимназии. Все эти трубы обладают хорошими оптическими качествами. Секстант, работы Траутона, XVIII века; хронометр Бреге № 3874, карманного типа, был куплен Симоновым в Париже в 1825 г. Инструменты для



Пассажный инструмент («труба прохождений») Эртеля и хронометр Бреге, взятые экспедицией Казанского университета в Пензу в 1842 г.

магнитных наблюдений были приобретены у Гамбея в 1835 г. и, насколько можно судить по их описанию, должны были давать точные результаты; в каждом из них имелось по два микроскопа для отсчетов. Прибор Пулье, психрометр и барометр, вероятно, были взяты из физического кабинета. Наконец, довольно громоздкий небесный глобус имел 50 *см* в диаметре и покоился на треноге. Хронометр Бреге с меткой — это, в сущности, счетчик секунд, действующий в течение 10 минут, который может быть в любой момент пущен в ход и остановлен. Его секундная стрелка снабжена подачей чернил и, при нажиме пружины, ставит в качестве отметки момента чернильную точку на эмалевом циферблате. Этот любопытный и недорогой прибор был приобретен незадолго перед поездкой на затмение.

[8] Из описания в тексте неясно, ка́к были разделены круги.

[9] Лобачевский отчетливо обрисовывает те трудности, с которыми сопряжены фотометрические измерения во время полного затмения. Непосредственно перед полной фазой затмения (и сразу же по ее окончании) освещенность земной поверхности меняется очень быстро в громадных пределах, так что Лобачевский совершенно правильно говорит о мгновенных явлениях. Впрочем, неблагоприятная погода помешала поставить намеченные физические наблюдения.

[10] Следовательно, нельзя было определить долготу Пензы относительно Казани способом перевозки хронометров. Однако, имея один хронометр (к тому же, карманного типа), трудно было рассчитывать на точность относительной долготы бо́льшую, чем 2—3 секунды времени, при сравнительно длительных переездах из Казани в Пензу и обратно на лошадях. Заметим, что в то время в Казанской обсерватории имелось только два не особенно хороших хронометра; может быть, второй хронометр Гаута был не в исправности и Ляпунов не мог взять его с собой.

[11] Наблюдения прохождений звезд через первый вертикал позволяют определить широту места; соответствующие способы наблюдений разработаны Бесселем[1]).

[12] Определение долготы, до применения для этой цели телеграфа и радио, обычно опиралось на перевозку хронометров. Так как в данном случае хронометр в дороге останавливался, М. В. Ляпунов не мог применить этот метод. Он использовал наблюдения Луны, координаты которой быстро меняются; поэтому по Луне можно в любой момент найти время по основному меридиану, а следовательно, и долготу. Однако наблюдения Луны около эпохи затмения (новолуния) должны производиться днем, что невыгодно отзывается на их точности. Затмения спутников Юпитера тоже не могут дать большой точности, так как при погружении спутника в тень Юпитера блеск спутника убывает постепенно и наблюденный момент затмения зависит от оптической силы трубы. Введенная поправка в $14^s,5$, может быть, учитывает это обстоятельство. В итоге, полученная долгота $2^h6^m34^s,6$ (из приведенных чисел следует $2^h6^m34^s,5$) опирается только на затмения первого спутника Юпитера. Сколько наблюдалось этих затмений, из отчета Лобачевского не видно; возможно, что лишь одно.

---

1) Bessel — Über den allgemeinen Gebrauch des Passagen-Instrumentes. Astronomische Nachrichten, B. 6, 1828, стр. 221—248. Beobachtungen mit einem tragbaren Passagen-Instrumente in München und Marienbad. Там же, B. 9, 1831, стр. 413—436. Эти труды Бесселя читал Ляпунов перед поездкой в Пензу, как видно из записей взятых им книг.

Поэтому долгота Пензы может быть ошибочна на 10^s и более, что создает значительную неуверенность в положении наблюдателя на земной поверхности и мешает использованию наблюденных моментов второго и третьего контактов затмения для их прямой цели — определения взаимного расположения дисков Солнца и Луны. Из приведенных в тексте результатов следует, что М. В. Ляпунов принимал восточную долготу Казани от Берлина равной $2^h22^m53^s,3$, что на $0^s,8$ меньше ныне принятого значения.

В настоящее время методика определения широт и долгот существенно изменилась; способы, упомянутые выше, можно найти в более старых руководствах по практической астрономии.

[13] Упоминаемый Н. И. Лобачевским сад принадлежал к училищу садоводства, директором которого был Э. И. Магзиг. А. А. Панчулидзев (1789—1867) был длительное время пензенским гражданским губернатором.

[14] Наблюдения с секстантом и кольцевым микрометром (у трубы Фраунгофера был такой микрометр), как справедливо отмечает Лобачевский, не могли дать большой точности. По существу дела, постепенное убывание расстояния между остриями солнечного серпа может дать момент его исчезновения, т. е. момент начала полного затмения. Такие наблюдения М. В. Ляпунова дают для начала полной фазы результаты, которые плохо сходятся между собой. Вероятно, убедившись в ненадежности наблюдений, Ляпунов не повторял их во всем объеме после конца полной фазы.

В виду плохого состояния неба нельзя было быть заранее уверенным, что удастся вообще увидеть полную фазу затмения и непосредственно отметить момент ее начала, почему Ляпунов и производил измерения серпа только до полной фазы.

Как правило, начало и конец полного затмения могут быть замечены по хронометру до немногих десятых долей секунды. В одном из неисправленных моментов по хронометру [1]) ошибка на 10^m (продолжительность полной фазы — $12^m58^s,6$). В каком моменте имеется ошибка, сказать нельзя, но это и не столь важно, так как исправленные моменты, очевидно, даны верно. Это подтверждается заметкой о затмении в «Прибавлениях к Пензенским губернским ведомостям», весьма вероятно принадлежащей Н. И. Лобачевскому [2]). Там моменты начала и конца полной фазы затмения, с приблизительно вычисленной поправкой хронометра, даны как $9^h9^m22^s$ и $9^h12^m22^s$ среднего пензенского времени, что сходится с текстом отчета Лобачевского.

---

1) В обоих текстах (см. стр. 494), а следовательно, и в подлинной рукописи.

2) См. приложение 1 на стр. 485 наст. тома.

[15] Ф. А. Каховский (1803—1875) — помещик. См. о нем: Модзалевский, стр. 739—740.

[16] Смысл конца этой, не вполне ясной фразы тот, что слои облаков часто кажутся нам параллельными горизонту из-за перспективы, то-есть, уже не случайно.

[17] В «Журнале министерства» в этой фразе выпущено последнее слово «местами», а между тем, только с ним она имеет смысл: в светлом кольце не было особенных мест, то-есть, определенных отдельных деталей. Это не удивительно при наблюдении сквозь облака. Труднее понять, почему Лобачевскому и Кнорру корона казалась слабее у лунного края. Другие наблюдатели затмения 1842 г. подобного явления не замечали.

[18] Относительно Веги — ошибка; недалеко от зенита была Капелла. Звезды видели и в Воронеже, где затмение не было полным.

[19] Наблюдения поляризации короны, произведенные во Франции во время затмения 1842 г., оказались не очень удачными; поэтому результат Кнорра представлял в то время определенный интерес [1]).

[20] Араго делал отчет о наблюдениях затмения во Франции на заседании Академии Наук 22 и 29 августа 1842 г. [2]). Он указал, что из-за противоречий в наблюдениях не может пока дать статью о затмении. Полный обзор наблюдений затмения 8 июля 1842 г. Араго дал гораздо позже отчета Лобачевского [3]). Следовательно, Лобачевский в отношении наблюдений затмения во Франции в значительной мере пользовался сообщениями Симонова (см. также примечание [37]).

[21] В этот день в 1842 г. грандиозный пожар уничтожил значительную часть Казани; в университете сгорела обсерватория.

[22] Для измерений яркости на Солнце Буге [4]) использовал изобретенный им гелиометр (у Буге гелиометр имел два объектива, каждый

---

1) Ср. Ф. Араго — Общепонятная астрономия, 1861, т. 3, стр. 424—426.

2) Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des Sciences, т. 15, Paris, 1842, стр. 396 и 465. 12 сентября 1842 г. Краткое изложение доклада Араго имеется в журнале L'Institut, Journal universel des sciences, 10 année, 1842, № 452. (Этот номер отсутствует в библиотеке Казанского университета. Имеющиеся документальные данные недостаточны, чтобы установить, был ли он получен и читал ли его Лобачевский, вообще регулярно просматривавший этот журнал.)

3) Arago — Sur l'éclipse totale du Soleil du 8 juillet 1842. Annuaire pour l'an 1846, publié par le Bureau des Longitudes, Paris, 1845, стр. 271—477.

4) P. Bouguer — Traité d'optique sur la gradation de la lumière. Ed. posthume. Paris, 1760, стр. 90—96. Русский перевод: Бугер Пьер — Оптический трактат о градации света. Изд. АН СССР, 1950, стр. 76—80.

из которых давал свое изображение Солнца). Вуге сначала приводит причины, по которым яркость солнечного диска должна возрастать к его краю до бесконечности, то-есть Буге принимает, что поверхность Солнца равномерно покрыта светящимися точками, ни при каких обстоятельствах не закрывающими друг друга. Однако на следующих страницах он заключает, что это рассуждение не отвечает действительности. В том же 1760 г. Ламберт, рассматривая излучение не точек, а элементов поверхности светила, вывел свой закон освещения, по которому диск светящегося тела должен иметь равномерную яркость. Однако и этот закон верен только для абсолютно черного тела. Измерения Вуге были качественно верны и его результаты намного опередили свою эпоху. Еще в первой половине XIX века Араго и другие астрономы считали, что Вуге ошибся, а Солнце имеет одинаковую яркость по всей поверхности.

[23] Лаплас [1]) исходил из своей теории поглощения света в атмосферах небесных тел и из первого ошибочного допущения Вуге (см. предыдущее примечание). С современной точки зрения результат Лапласа не имеет смысла.

[24] Лобачевский и Кнорр тонко подметили различие в очертаниях краев Солнца и Луны. Объяснение дано совершенно правильное: основная причина, почему солнечный край во время затмения кажется более нежным — быстрое падение яркости Солнца у самого края диска, отчего уменьшается контраст с фоном неба. Кроме того, известную роль в подчеркивании края Луны могут играть его неровности (горы).

В ту эпоху, когда Лобачевский писал свой отчет, среди большинства ученых еще были распространены, восходящие к первой половине XVIII столетия, представления о «теплотворе» (теплороде) Хр. Вольфа, хотя уже Ломоносов считал теплород вымыслом. Нужно напомнить, что на концепции теплорода были построены в начале XIX века фундаментальные сочинения о теплоте Фурье и Карно. С другой стороны, почти все астрономы тогда безоговорочно разделяли упомянутую Лобачевским теорию Солнца, разработанную Уильямом Гершелем в 1801 г., но восходящую еще к 1769 г., к наблюдениям Уильсона над положением тени в солнечных пятнах, когда они подходят к краям диска Солнца [2]).

[25] Трудно сказать, на чем основано утверждение о пропорциональности плотности атмосфер тел солнечной системы их массам при

---

1) La Place — Mécanique céleste, 2 partie, livre 10, chap. 3. Oeuvres, t. 4, 1844, стр. 316—323.

2) W. Herschel — Observations tending to investigate the nature of the Sun. Philosophical transactions of the Royal Society of London, 1801, стр. 265—353.

допущении, что атмосферы сгущаются из мировой среды. Повидимому, Лобачевский рассматривал это просто как вероятную гипотезу.

[26] Сообщение Араго было сделано на заседании Академии Наук 14 июня 1824 г. Свет, исходящий от самосветящихся тел, если эти тела твердые или жидкие, частично поляризован, когда лучи образуют малый угол с поверхностью выхода. Раскаленные газы дают свет, который ни при каких углах наклона не показывает чувствительных следов поляризации; отсюда Араго заключает, что заметная часть света от газов идет изнутри, с некоторой неопределенной глубины. Результаты, полученные по этому методу, подтверждают предположения Боде, Шретера и Гершеля (т. е. что Солнце окружено светящейся газовой атмосферой).

[27] Здесь в тексте описка: вместо упругости должна быть центробежная сила. На экваторе Земли отношение этой силы к силе притяжения составляет только 1/289, но первая из этих сил возрастает пропорционально расстоянию от центра Земли, а вторая — убывает обратно пропорционально квадрату этого расстояния. Следовательно, на расстоянии $\sqrt[3]{289} = 6,61$ радиусов от центра Земли обе силы сравняются и, так как их направления противоположны, там будет предел атмосферы; следовательно, ее высота на экваторе составит 5,61 радиусов Земли, или 35800 *км* = 33500 верст. Лобачевский проделал приближенный расчет.

Фигура атмосфер небесных тел, в частности, для этого предельного случая, была рассмотрена Лапласом в его «Небесной механике» (см. примечание [35]).

[28] Полет Гей-Люссака был совершен 16 сентября 1804 г. На наибольшей высоте 6977 *м* над Парижем (или 7016 *м* над уровнем моря) температура была −9,5°, в это же время в Париже было +30,75°. Отсюда Гей-Люссак выводит падение температуры атмосферы на 1° С в среднем на 173,3 *м* высоты [1]).

Результаты наблюдений Гей-Люссака приводятся во многих книгах (например, у Лапласа), и Лобачевский взял их, очевидно, не из первоисточника (отсутствовавшего в университетской библиотеке). Принимая градиент постоянным, он нашел приведенную в тексте высоту атмосферы и общее понижение температуры (82 × 350 = 28 700 сажен = = 57,4 верст). Однако обычно наблюдаемый градиент температуры больше того, который был получен Гей-Люссаком, и составляет

[1]) Rélation d'un voyage aérostatique fait par M. Gay Lussac le 29 fructidor an 12. Journal de physique, de chimie, d'histoire naturelle et des arts, t. 59, 1804, стр. 454—462.

—0,0098° С на 1 *м*. Равномерное падение температуры атмосферы с высотой соответствует адиабатическому состоянию (которое в действительности никогда не осуществляется во всей атмосфере). Высота адиабатической атмосферы равна только 27,9 *км* (273 : 0,0098 = 27900 *м*), если считать, что на поверхности земли температура равна 0°, а на границе атмосферы она падает до абсолютного нуля (—273° С).

[29] В предположении, что температура убывает с высотой в геометрической прогрессии и с градиентом температуры по Гей-Люссаку, получается, что на высоте 190 *км* температура гораздо ближе к абсолютному нулю, чем это дает Лобачевский. Как он пришел к своему результату, выяснить не удалось.

[30] В своей важной работе [1]) Пулье измерил солнечное излучение при помощи изобретенного им пиргелиометра и нашел, что Солнце посылает на землю (за пределами земной атмосферы) 1,7633 малых калории на 1 *см*^{2} в минуту, т. е. он произвел определение солнечной постоянной. Но все теоретические выводы Пулье опираются на неверный закон излучения Дюлонга и Пти. Вследствие этого Пулье вычислил, что температура Солнца составляет только 1761° С. Пулье измерял актинометром ночное излучение Земли, а затем рассчитал, что вероятнейшее значение температуры мирового пространства равно —142° С. Здесь нет возможности останавливаться на ряде других интересных заключений Пулье.

[31] Фурье [2]) устанавливает три источника тепла на земной поверхности: излучение Солнца, излучение остальных бесчисленных светил и внутреннее тепло Земли. Он впервые заметил, что последний источник дает ничтожно мало тепла. Главный аргумент, что температура мирового пространства должна быть около —40° R (—50° С, то-есть, довольно высока), состоит в том, что если бы земной шар находился в окружающем пространстве, лишенном всякого тепла, то полярные области испытывали бы чрезвычайный холод. Самые низкие температуры в полярных областях (насколько их знал Фурье) должны уже быть близки к температуре мирового пространства.

Фурье пишет, что он не ставит своей целью математическую трактовку предмета, но желает лишь привлечь к нему внимание, как к вопросу натурфилософии. Желание Фурье исполнилось: после него

---

[1]) Pouillet — Mémoire sur la chaleur solaire, sur les pouvoirs rayonnants et absorbantes de l'air atmosphérique et sur la température de l'éspace. Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 7, Paris, 1838, стр. 24—65.

[2]) J. B. Fourier — Mémoire sur les températures du globe terrestre et des éspaces planétaires. Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut de France, t. 7, 1827, стр. 569—604.

Сванберг, Пуассон, Пулье, Лие и другие занялись тем же вопросом о температуре мирового пространства.

[32] Здесь Лобачевский возвращается к теории Солнца Гершеля (см. примечание [24]). Подвижные пятна — это обычные солнечные пятна, возникающие и уничтожающиеся, меняющие свою форму и могущие перемещаться по поверхности Солнца.

[33] «Возвышения», то-есть, протуберанцы (в действительности являющиеся выброшенными на значительную высоту газами хромосферы), наблюдались в Нарбонне тулузскими астрономами Пино и Вуажиро, о чем есть сообщение в отчете Араго (см. примечание [20]) и у И. М. Симонова [1]). Аналогичные наблюдения Шумахера упоминаются там же; Шумахер [2]) пишет, что три возвышенности имели большое сходство с вершинами глетчеров в розовом свете.

Любопытно, что о солнечных горах говорят, в связи с протуберанцами, и другие астрономы, наблюдавшие это затмение.

[34] Лобачевский рассматривает атмосферу Солнца, как газовую среду с постоянной угловой скоростью вращения, равной угловой скорости твердого ядра Солнца.

[35] Фигуры атмосфер небесных тел и, в частности, Солнца, были рассмотрены Лапласом [3]); чтобы сравнить с заключением Лобачевского о сжатии солнечной атмосферы, выведем здесь один из результатов Лапласа, не следуя строго его изложению.

Солнце можно принять за почти точный шар с массой M и угловой скоростью вращения ω. Допустим, что Солнце окружено атмосферой ничтожной массы, вращающейся с той же угловой скоростью ω, и определим форму внешней поверхности атмосферы. Это будет поверхность уровня потенциала Солнца W на границе атмосферы, на переменном расстоянии ρ от центра Солнца:

$$W = \frac{fM}{\rho} + \frac{\omega^2 \rho^2 \cos^2 \varphi}{2} = c = \text{const.};$$

причем здесь f — постоянная тяготения, φ — широта точки поверхности атмосферы относительно солнечного экватора (другая координата — долгота — не входит в уравнение). Первый член представляет потенциал ньютонианского притяжения, второй — потенциал центробежной силы (ибо $\rho \cos \varphi$ есть расстояние переменной точки от оси вращения).

---

1) И. М. Симонов — Записки и воспоминания о путешествии по Англии, Франции, Бельгии и Германии. Казань, 1844, стр. 145.

2) Schumacher — Beobachtung der totalen Sonnenfinsternis auf der Wiener Sternwarte. Astronomische Nachrichten, B. 20, 1842, стр. 1—4.

3) La Place — Mecanique céleste, livre III, chap. 7. Oeuvres, t. II, 1843, стр. 194—197.

Обозначим через ρ_e и ρ_p значения ρ для точек, лежащих на экваторе, соответственно, на полюсе поверхности атмосферы Солнца. Для полюса у нас будет $c = fM/\rho_p$, ибо $\varphi = 90°$. Подставляя это, получим для экватора ($\varphi = 0°$)

$$\frac{\omega^2\rho_e^2}{2} = fM\left(\frac{1}{\rho_p} - \frac{1}{\rho_e}\right),$$

откуда

$$\frac{\rho_e - \rho_p}{\rho_p} = \frac{\omega^2\rho_e^3}{2fM}.$$

Воспользуемся обычной в физике системой единиц CGS и подставим числа: $f = 6{,}7 \cdot 10^{-8}$, $M = 2{,}0 \cdot 10^{33}$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$, где T—оборот Солнца вокруг оси (который Лаплас принимал равным $25^1/_2$ суток и который надо выразить в секундах), или $\omega = \frac{6{,}3}{25^1/_2 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60} = 2{,}9 \cdot 10^{-6}$. Примем далее $\rho_e = 8$ радиусам Солнца, что соответствует радиусу короны в $2°$ (хотя в тексте речь идет, скорее, о диаметре), и мы найдем $\rho_e = 5{,}6 \cdot 10^{11}$. В результате будет

$$\frac{\rho_e - \rho_p}{\rho_p} \approx \frac{1}{190}.$$

Следовательно, сжатие атмосферы даже на столь значительном расстоянии будет мало. Это — следствие медленного вращения Солнца.

[36] Затмение наблюдалось в Пензе утром и видимое направление оси вращения Солнца образовывало с горизонтом угол, сильно отличающийся от 90°.

[37] Литературные указания, относящиеся к отчету Араго о затмении 1842 г., даны в примечании [20]. В записках Симонова (см. примечание [85]) есть описание упомянутого в тексте заседания Парижской Академии Наук; приведем из них две цитаты. Араго начал свой доклад о наблюдениях затмения следующими словами:

> «Эти явления не представляют ничего любопытного для астрономов и мы положили не делать астрономических наблюдений, но так как трудно астроному не заметить времени начала и конца затмения, то мы это и сделали».

Здесь мы снова встречаем отмеченное в примечании [1] характерное разделение наблюдений на астрономические (в нынешнем смысле слова — астрометрические, т. е. относящиеся к положениям небесных тел) и физические. По поводу своих наблюдений короны Араго сказал:

> «Венец оканчивался остроконечиями, загибаясь в них так, я скажу с позволения г. Президента, comme le roue à aubes courbés de Mr. Poncelet, и вот явление, которого мы не понимаем».

Понселе председательствовал на заседании Академии 22 августа 1842 г.; следовательно, тогда Симонов и слышал сообщение Араго. Понселе, в то время академик, прежде был военным инженером и изобрел свое водяное колесо в 1826 г. Колесо Понселе принадлежит к числу подливных (колесо находится над потоком воды); лопасти его, отходя радиально, затем изгибаются навстречу потоку воды. Вода, покидая колесо, обладает очень малой скоростью, так что наибольшая часть живой силы воды обращается в полезную работу.

[38] В описаниях протуберанцев, наблюдавшихся М. В. Ляпуновым и другими астрономами во время полного солнечного затмения 1842 г., нет большого сходства. Это объясняется, вероятно, тем, что в разных местах затмение происходило в различные физические моменты и форма протуберанцев могла меняться. Кроме того, наблюдатели явно не были подготовлены видеть их.

[39] Мысль о влиянии отталкивания Солнца на образование кометных хвостов была высказана еще Кеплером, но построение на ее основе классической теории кометных форм было осуществлено Ф. А. Бредихиным уже после Лобачевского. Лобачевский признает, в принципе, возможность выброса Солнцем частиц, освобождающихся на его поверхности (и только отрицает пригодность такой гипотезы для объяснения солнечной короны). Как теперь известно, Солнце действительно посылает в окружающее пространство поток корпускул.

О наблюдениях Лобачевского над кометой Энке ничего, кроме сказанного в тексте, мы не знаем. Комета Энке прошла перигелий своей орбиты в начале мая 1832 г.

[40] Факт убывания блеска комет верен, но, что касается кометы Галлея, то она в появлении 1910 г. снова достигла значительного блеска.

[41] Наблюдения этих затмений содержатся в редких старинных изданиях, большинства которых нет в библиотеке Казанского университета. При составлении отчета Лобачевский, повидимому, использовал статью Араго, появившуюся перед самым затмением [1]).

В статье Араго (длинное название которой должно было подробно охарактеризовать ее новую и непривычную тему) имеются все приве-

1) Arago — Sur l'éclipse totale du Soleil; sur les phénomènes, qui devront plus particulièrement fixer l'attention des astronomes; sur les questions de physique céléste dont la solution semble dévoir être liée aux observations qui pourront être faites pendant les éclipses totales du Soleil. Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Paris, т. 14, 8 июня 1842 г., стр. 843—861; существенная часть этой статьи появилась также в журнале L'Institut, 10 année 1842, стр. 221—236.

денные Лобачевским и многие другие подробности, по большей части переданные словами самих наблюдателей затмения [1]).

У Лобачевского есть только одна небольшая неточность: Феррер наблюдал венец 6′ шириной, а лучи доходили до 3°.

[42] Кеплер [2]) первый связал корону, видимую во время полных солнечных затмений, с самим Солнцем. Он пишет:

> «Таким образом, очевидно, что, хотя скрывается все Солнце, но воздух (атмосфера — *aër*), окружающий Солнце, чем ближе к Солнцу, тем более сияет...» [3]).
>
> «Или воздух, или даже эфирная субстанция, которая, конечно, не есть ничто, но имеет ту или иную степень плотности, освещенная Солнцем, воспринимает блеск (splendorem concipiat), который должен имитировать (воспроизводить — repraesentat) солнечный свет при закрытом Солнце» [4]).

Еще немного далее Кеплер выдвигает и другое объяснение короны, связанное с лунной атмосферой.

[43] Делиль, бывший впоследствии первым академиком-астрономом Российской Академии Наук, произвел свои опыты, чтобы объяснить светлое кольцо, видимое вокруг Луны при полных солнечных затмениях (солнечную корону) [5]). Упомянем один из опытов Делиля, в котором солнечный диск покрывался каким-либо шаром — деревянным, металлическим, каменным, или даже просто куском черного картона, вырезанным в форме круга — вокруг экрана совершенно ясно было видно светящееся кольцо.

Исследования Фложерга над диффракцией света (за которые он получил премию от Академии Гардского департамента Франции) были основаны на ряде опытов, большей частью новых. Опыт, о котором

1) Ср. также: Араго — Общепонятная астрономия. Перев. Хотинского, т. 3, 1861, стр. 412—414.

2) Ad Vitellionem paralipomena, quibus Astronomiae pars optica traditur, 1604. J. Kepleri Opera omnia, ed. Frisch, t. 2, 1859.

3) Там же, стр. 318.

4) Там же, стр. 319. В этом отрывке отдельно взятое подлинное выражение splendorem concipiat допускает не только наш перевод — «воспринимает блеск», но и «воспламеняется», как в тексте, которым пользовался Лобачевский. Однако, если это слово поставить в фразу Кеплера, она потеряет смысл.

5) Delisle le Cadet — Reflexions sur l'expérience que j'ai rapportée à l'Académie d'un Anneau lumineux semblable à celui que l'on aperçoit autour de la Lune dans les Eclipses totales du Soleil. Histoire de l'Académie royale des sciences, année 1715, Paris, 1718, Mémoires de la Mathématique et de Physique, стр. 166—169.

пишет Лобачевский, является самым первым. Вот он в несколько сокращенном изложении.

Посредине открытого окна подвешен черный шар; тень его падает на белый картон. Когда картон находится рядом с шаром — тень шара представляется как черный круг, диаметр которого немного меньше, чем диаметр шара; вся тень равномерно интенсивна. Круг тени окружен очень узкой полутенью, а полутень, в свою очередь, окружена светящимся кольцом — короной. При удалении экрана тень уменьшается, полутень увеличивается, светящееся кольцо становится шире и бледнеет. Когда экран удален на расстояние, равное 5—6 диаметрам шара — середина тени заметно светлеет, край остается черным; когда расстояние между экраном и шаром достигает 12 диаметров — тень еще больше светлеет, становится похожей на полутень, но продолжает быть окружена таким же черным кольцом. Когда экран удален на 104—105 диаметров, посредине тени получается почти белая точка и она находится в центре маленького черного кольца. При дальнейшем увеличении расстояния остается одна черная точка; когда экран удаляется на 107 диаметров, черная точка исчезает и остается полутень, окруженная широким светящимся кольцом; при этом шар своими краями как раз покрывает Солнце.

На основании этого и трех других опытов, Фложерг пришел к заключению, что если свет проходит около края какого-либо тела, то часть его лучей «погибается» (s'infléchie), входит в тень и освещает ее; явление это не зависит от формы и материала тела, от состояния его поверхности, температуры и т. д., не зависит также и от среды, окружающей тело [1].

Майер проделал такой же опыт, но не получил каких-либо новых результатов. Мы здесь не говорим о его других опытах и не останавливаемся подробнее на взглядах Майера на природу света (он был сторонником теории истечения Ньютона, но с некоторыми изменениями); интересующиеся могут найти это в его статье [2].

Ни одного из этих мемуаров не было в библиотеке Казанского университета, и Лобачевский, несомненно, писал это место отчета не по первоисточникам. С некоторой подробностью опыты Делиля, Фложерга и Майера переданы в обширной энциклопедии физики

---

[1]) Мемуар Фложерга был опубликован в виде четырех сообщений; все изложенное содержится в первом из них: Flaugergues — Mémoire sur la diffraction de la lumière, premier extrait. Journal de physique, de chimie, d'histoire naturelle et des arts, t. 75, 1812, стр. 16—29.

[2]) J. T. Mayer — *Phaenomenorum ab inflexione luminis pendentium ex propriis observationibus et experimentis recensio et comparatio*. Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores, v. 4, ad a. 1816—1818, Gottingae, 1820, Classis mathematicae, стр. 49—80.

Гелера[1]). Оттуда их и мог взять Лобачевский; но любопытно, что, вероятно, он сам обратил расстояния шара от экрана, выраженные Фложергом в диаметрах шара, в видимые угловые диаметры последнего. Действительно, нетрудно, пользуясь таблицами тангенсов, получить такие результаты:

Расстояния в диаметрах шара	Угловые диаметры шара
107	1927″,7
105	1964″,4
12	4°46′19″

они в достаточной мере согласуются с числами Лобачевского.

Многочисленные опыты по диффракции света были произведены и другими авторами в XVIII веке и в начале XIX века; их завершили в свое время блестящие исследования Френеля, вытеснившие из памяти даже современников Лобачевского работы Фложерга и Майера, о которых нет никакого упоминания во многих исторических и монографических сочинениях по физике и специально по учению о свете, изданных начиная с 30-х годов XIX века.

По существу, результаты опытов Фложерга ни в коей мере не могут быть перенесены на масштабы солнечных затмений, несмотря на внешнее сходство условий. При столь большом непрозрачном теле, каким является Луна, теоретически мыслимые диффракционные явления внутри границ лунной тени на Земле, практически будут совершенно отсутствовать. Тень останется темной. Повидимому, это было впервые выяснено варшавским физиком Биске не так давно[2]).

Не лишено интереса, что еще в 1748 г. астроном Тобиас Майер (отец физика Майера, упомянутого Лобачевским), когда он доказывал отсутствие атмосферы на Луне, сослался на опыты, сделанные для объяснения солнечной короны. Он говорил (довольно иронически), что круглый кусок олова, диск дерева или бумаги, даже железный гвоздь и волос могут вызывать подобные явления. Но, как эти тела не обладают атмосферой, так нет нужды предполагать атмосферу на Луне, чтобы понять корону Солнца.

Далее он высказывает то же предположение о короне, что и Лобачевский[3]), который, впрочем, вряд ли читал это: «Возможно, что это наш земной воздух единственно виноват... в отношении светлых

---

[1]) J. S. T. Gehler — Physikalisches Wörterbuch, B. 2, 1830 (стр. 687 — о Делиле, стр. 690—691 — о Фложерге и стр. 707 — о Майере).

[2]) F. Biske — Are diffraction phenomena possible at solar eclipses? The Astrophysical Journal, v. 38, 1913, стр. 192—196.

[3]) См. стр. 451 наст. тома.

полос около тел, когда последние помещаются перед Солнцем; по крайней мере, обратное не показано»[1]).

Хотя в эпоху Лобачевского объяснение солнечной короны диффракцией света далеко не было отвергнуто астрономами и физиками, сам он в конце отчета о затмении от него отказался.

[44] Взгляды Ньютона на природу света вовсе не были односторонними и его нельзя считать только создателем эмиссионной теории (теории вытекания), как это было принято в XIX веке[2]). Он отчетливо представлял себе возможность создания теории, которая объединяла бы преимущества волновой и корпускулярной гипотезы о свете, хотя в действительности это было осуществлено только в наше время. Академик Г. С. Ландсберг пишет[3]):

> «Нельзя не отметить, что современная квантовая теория света (теория фотонов) характеризуется чертами, которые напоминают ньютоново представление о свете даже в большей степени, чем это может показаться с первого взгляда. Корпускулярные свойства света получили экспериментальное обоснование гораздо более серьезное и разнообразное, чем это было во времена Ньютона, а теория „приступов" легкого отражения и легкого прохождения, придуманная Ньютоном для объяснения интерференционных явлений, содержит черты, напоминающие современную концепцию волнового поля, определяющую вероятность нахождения фотона в том или ином месте пространства».

Эмиссионная (корпускулярная теория света) подразумевается Ньютоном уже в определении I «Оптики»[4]) и особенно ясно выражена в вопросе 29[5]) «Не являются ли лучи света очень малыми телами, испускаемыми светящимися веществами?»

[45] Замедление в $3\frac{1}{2}$ секунды в моменте покрытия звезды Луной соответствует перемещению Луны на небе менее 2″. Как раз Дюсежур

---

[1]) См. редкое сочинение, имеющееся в библиотеке Казанского университета: T. Mayer — Beweis dass der Mond keinen Luftkreis habe. Kosmographische Nachrichten und Sammlungen auf das Jahr 1748, Wien, Nürnberg, 1750, стр. 379—419; в частности, стр. 416—417.

[2]) Историю работ Ньютона по оптике можно найти в книге акад. С. И. Вавилова — «Исаак Ньютон», 2-е изд., 1945, главы 5, 6, 7 и 8. Классический, обобщающий труд Ньютона, на который в данном вопросе обычно делаются ссылки: Isaac Newton — Opticks, London, 1704, 3-е изд. 1721; русский перевод: Исаак Ньютон — Оптика, перев. С. И. Вавилова, изд. АН СССР, М. — Л., 1927.

[3]) Г. С. Ландсберг — Оптика. 2-е изд., Гостехиздат, М. — Л., 1947, стр. 576.

[4]) Стр. 14 русского перевода.

[5]) Стр. 288 русского перевода.

дает для изгибания лучей 3″ и не согласен с Лемонье, который доводит изгибание до 13″. Лекселя Деламбр вовсе не упоминает; в итоге просмотра ряда работ Лекселя, а также специальных трудов по вопросу о замедлении моментов покрытий звезд Луной, не удалось найти упоминания о подобных его наблюдениях.

Лобачевский, составляя вторично отчет о затмении, вероятно, написал это место на память, не обращаясь снова к Деламбру (бывшему на руках у М. В. Ляпунова); поэтому отсутствует указание страниц Histoire; вместе с тем, при обращении в дугу $3\frac{1}{2}$ секунд времени опоздания в покрытии звезды, было использовано правило для суточного движения звезд $\left(3\frac{1}{2}^s \times 15 = 52'',5\right)$, после чего получились приведенные в тексте 50″, вместо 2″.

Явление кажущегося перехода звезды через край диска Луны объясняется, с одной стороны, несовершенством телескопов, дающих вследствие сферической и хроматической аберрации расширение лунного диска, с другой стороны — неточностью фокусировки, ибо яркие звезды и темный край Луны (при пепельном свете) не позволяют уверенно наводить на фокус. Возможно, что здесь имеют место и зрительные иллюзии.

Телескопы XVIII века были не слишком хороши, а в самих наблюдениях много противоречий; одни наблюдатели видели звезды внутри края Луны, другие, находившиеся на той же обсерватории и в то же время, — нет.

[46] Деламбр [1]), приводя эту величину, говорит об иррадиации. Явления иррадиации при прохождениях Венеры по диску Солнца проявились очень резко и заметно уменьшили точность наблюдений.

[47] Указанная здесь максимальная величина сжатия — $\frac{1}{40}$ лунного диаметра — соответствует ошибочному расчету 50″ для замедления при наблюдении покрытий звезд Луной (см. примечание [45]). Однако эта ошибка в расчете значения не имеет, так как верный результат только усилил бы заключение Лобачевского.

[48] Декарт считал, что свет распространяется в пространстве путем передачи давления в эфирной среде; при этом давление может сообщаться отдельными импульсами. В этих взглядах только с большой натяжкой можно видеть намек на волновой принцип. С точки зрения Декарта нельзя объяснить одновременную передачу света в двух

---

[1]) Сочинение, цитированное на стр. 446 наст. тома, стр. 585.

противоположных направлениях — два человека не могут видеть друг друга[1]).

Теория света Гюйгенса[2]) много совершеннее, чем у его предшественников. Именем Гюйгенса назван принцип, согласно которому «вокруг каждой частицы» (до которой распространяется световая волна) «должна образоваться волна, центром которой она является»; однако удары в центрах волн совершаются без определенной последовательности и волны следуют не на равных расстояниях. Повидимому, Гюйгенс считал световые волны продольными колебаниями.

В ряде сочинений Эйлер отвергает теорию истечения Ньютона и высказывается в пользу волновой теории. Он связывает различные цвета с продолжительностью световых колебаний, но ни Гюйгенс, ни он еще не сумели использовать важнейший аргумент в пользу волновой теории — явления интерференции, открытые в XVII веке[3]).

Принцип интерференции световых волн был установлен Юнгом в 1801 г., несколько позже он уточнил его и дал самое название «интерференция». «Когда два колебательных движения различного прохождения совпадают либо точно, либо весьма близко по направлению, то их совместное действие является комбинацией движений, принадлежащих каждому в отдельности»[4]).

Френель упоминает не раз имена основателей волновой теории света. В начале его популярной статьи о свете[5]) мы можем прочесть следующий отрывок, сходный с текстом Лобачевского.

> «Волновой принцип, обязанный своим происхождением Декарту и в выводах, из него вытекающих, с большим искусством развитый Гюйгенсом, был принят также Эйлером, а в самое последнее время доктором Томасом Юнгом, которому оптика обязана многими важными открытиями».

---

[1]) Впервые Декарт высказал свои взгляды на природу света в написанном до конца 1632 г., но опубликованном значительно позже сочинении: Descartes — Le Monde ou traité de la lumière, 1664, 1667. Русский перевод: Ренэ Декарт — Трактат о свете. Избранные произведения, перев. В. В. Соколова, 1950, стр. 240—245.

[2]) Huygens — Traité de la lumière, 1690. Русский перевод: Хр. Гюйгенс — Трактат о свете, перев. Фредерикс, 1935, стр. 31.

[3]) См. прекрасный очерк: Акад. С. И. Вавилов — Физическая оптика Леонарда Эйлера (Леонард Эйлер, 1707—1783, сборник статей и материалов к 150-летию со дня смерти. Академия наук СССР, 1935, стр. 29—38).

[4]) Young — On the theory of light and colours. Philosophical transactions of the Royal Society of London, 1802, стр. 34.

[5]) A. Fresnel — De la lumière. Supplement à la traduction française de la cinquième édition du Système de chimie, par Th. Thomson,... par J. Riffault, Paris, 1822, стр. 1. Русский перевод: О. Ж. Френель — О свете, перев. Фредерикс, 1928, стр. 7.

[49] В опыте Френеля [1]), сыгравшем важную роль в обосновании волновой теории, свет от источника, пропущенный через красный светофильтр (чтобы получить свет определенной длины волны), отражался от двух зеркал, составлявших между собой угол, очень близкий к 180°. В зеркалах получаются два изображения источника света, расположенные близко друг к другу. В каждой точке пространства, куда попадает свет источника от обоих зеркал, могут наблюдаться явления интерференции, так как лучи, идущие от обоих изображений источника, когерентны, т. е. имеют постоянную разность фаз в течение времени, достаточного для наблюдения. В точке, где разность длин путей, пройденных светом от обоих изображений источника, составляет четное число полуволн света, будет максимум освещенности; минимум освещенности будет соответствовать разности путей в нечетное число полуволн. В случае точечного источника света какая-нибудь поверхность равной освещенности (например, соответствующая ее максимуму), представит в пространстве часть двуполостного гиперболоида вращения. Фокусами его будут оба изображения источника света: разность расстояний от них до любой точки гиперболоида будет постоянна и равна данному четному числу полуволн света, эта же разность расстояний будет действительной полуосью гиперболоида. Если пересечь гиперболоид любой плоскостью, проходящей через оба изображения источника света, следом на плоскости будет гипербола с теми же фокусами.

Опыт, аналогичный по выводам, был произведен Френелем с непрозрачным телом, помещенным в пучке света; роль фокусов гиперболы (рассматривая построение на плоскости) играли края тела.

Хотя и в этом мемуаре Френель неоднократно подчеркивает значение своих исследований для опровержения теории истечения, но еще яснее он выражается в популярной статье о свете [2]).

> «Но только что приведенного опыта достаточно, чтобы поставить вне сомнения заметную кривизну траекторий, по которым распространяются внешние полосы.
>
> Этот замечательный результат представляется весьма трудно совместимым с принципом испускания; в самом деле, самое естественное объяснение внешних полос с точки зрения этого принципа состояло бы в предположении, что световой поток, коснувшись экрана, испытывает в его близости попеременно расширения и сжатия, которые и порождают темные и светлые

---

1) Fresnel — Mémoire sur la diffraction de la lumière. Annales de chimie et de physique, t. 11, 1819, стр. 337—338, 351. В полном виде в Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut de France, t 5, 1826, стр. 416—418, 432.

2) Соч., цит. в сноске 5) на предыдущей странице.

полосы. Но тогда эти различные пучки — сжатые или расширенные — должны были бы, перейдя за экран, идти по прямой линии, ибо, если в теории Ньютона допускается, что тела могут производить на световые молекулы сильные притяжения и отталкивания, то все же никогда не предполагается, что действия этих сил могут распространяться на расстояния столь значительные, как размеры тех траекторий, которые обладают заметной кривизной на протяжении нескольких метров...» [1]).

[[50]] Хотя указания на явления диффракции света можно найти у Леонардо да Винчи, но более определенные наблюдения были сделаны Гримальди в середине XVII века [2]). В одном из его опытов свет Солнца проходил через малое отверстие в темную комнату, где на пути пучка солнечных лучей ставилось узкое непрозрачное тело, а диффракционные явления наблюдались на экране сзади. Диффракционные полосы, располагавшиеся вне геометрической тени, белые посредине, имели с внутренней стороны синюю кайму, а с внешней — красную. Так как из всех лучей видимого спектра красные обладают наибольшей длиной волны, для них разность длин путей света от краев непрозрачного тела до диффракционной полосы на экране, пропорциональная длине волны, будет наибольшей, а поэтому они всего сильнее уклонятся наружу от геометрического края тени.

[[51]] Речь идет о верхнем слое солнечной атмосферы — так называемой хромосфере, которая кажется розово-красной из-за обилия в ней водорода (в видимом спектре водорода преобладает яркая красная линия). Хромосферу можно без труда наблюдать во время полных солнечных затмений и ее видели многие наблюдатели затмения 1842 г.

[[52]] Протуберанцы (выступы газов хромосферы), описанные М. В. Ляпуновым, наблюдались многими астрономами; см. примечание [[33]].

[[53]] Опыт Юнга [3]) был похож на опыт Гримальди (см. примечание [[50]]), но Юнг, кроме того, закрывал часть потока света, проходившего мимо одного из краев непрозрачного тела, причем тогда немедленно исчезали полосы интерференции внутри тени.

Этот важный для волновой теории опыт и другой, ему аналогичный по результатам, упоминает Френель в своем сочинение «О свете» [4]).

---

[1]) Там же, стр. 26; русский перевод — стр. 35 (здесь немного исправлено).

[2]) Эти исследования Гримальди были опубликованы после его смерти: Grimaldi — Physico-mathesis de lumine, coloribus et iride, 1665.

[3]) Joung — Experiments and calculations relating to physical optics. Philosophical transactions of the Royal Society of London, 1804, стр. 1.

[4]) См. сноску [5]) на стр. 475.

Рассуждения Френеля, кратко приведенные Лобачевским, основываются на видоизмененном принципе Гюйгенса (см. примечание [62]). Далее Лобачевский остроумно и просто опровергает объяснение короны диффракцией солнечного света. Уже тогда укоренившийся термин «интерференция» (взятый с английского выражения Юнга) он переводит русским словом «перекрестывание».

[54] Возражения Пуассона [1]), направленные против волновой теории света, основаны на решении уравнений распространения упругих волн от точечного источника в двух различных средах, каждая из которых однородна. Обе среды разделены плоскостью; колебания в этих средах продольные. Следствия, выведенные Пуассоном для интенсивности отраженного света, не сходятся с опытом; еще более важное возражение заключается в необъяснимости рассеяния света при преломлении: так как скорость волн не зависит от их длины, показатели преломления для разных цветов должны быть одинаковы. Пуассон не отрицает принцип Френеля (дополненный принцип Гюйгенса сложения элементарных колебаний, приходящих в данную точку от всех частей световой волны, см. в примечании [62]), но оспаривает его преимущество. Пуассон пишет, что из этого принципа вытекает необходимость существования, наряду с волной, распространяющейся вперед, также и волны, идущей обратно (чего, конечно, не наблюдается). Исходя из развитой им теории, он считает, что Френель незаконно оперирует с интерференцией всевозможных элементарных волн, ибо колебания на некотором расстоянии от источника света будут распространяться только ортогонально к поверхности основной волны, а не по всем направлениям, как полагал Френель. На некоторых других возражениях мы не останавливаемся, но приведем следующую характерную фразу:

> «В своих исследованиях физики часто руководствуются индукциями, которые мы не можем принять за достаточные доказательства, но которые, тем не менее, очень ценны, потому что они замещают теории, пока те не полностью построены; к тому же науки им [индукциям] обязаны большим числом прекрасных открытий».

Вот заключение письма Пуассона:

> «Я закончу эти заметки, повторяя, что они не направлены ни в коей мере к тому, чтобы посеять сомнения в результатах Ваших опытов, к которым никто не относится справедливее меня; они

[1]) Extrait d'une lettre de M. Poisson à M. Fresnel, Annales de chimie et de physique, t. 22, 1823, стр. 270—280. См. также статью Пуассона, непосредственно предшествующую его письму и связанную с ним: Poisson — Extrait d'un Mémoire sur la propagation du mouvement dans les fluides élastiques. Там же, стр. 242—269.

также не направлены против теории волнений, верность или ошибочность которой, по-моему, могут быть доказаны только строгим анализом, сравнением его во всех следствиях с наблюдениями; но они [заметки] имеют целью доказать, что если эта теория есть истина, можно в настоящий момент уверять, что это наверняка не вследствие тех доводов, которые давались до сих пор в ее поддержку и чтобы объяснить явления, представляемые светом».

Ответ Френеля появился в следующем томе журнала[1]); он направлен, главным образом, в защиту принципа Гюйгенса и его плодотворности; кроме того, в ответе подчеркиваются поперечные колебания световых волн.

Чтобы объяснить явления поляризации, допуская продольные колебания эфира, нужно иметь две различные жидкости, наполняющие одну и ту же часть пространства. Не воспроизводя всей обстоятельной аргументации Френеля, приведем немногие выдержки. Френель пишет, например:

«С помощью одного принципа сложения малых движений, из которого следует принцип интерференции, я нашел общие законы диффракции, которые не смогли бы быть открыты одними наблюдениями».

В другом месте:

«Гипотеза поперечных колебаний в световых волнах не только необходима, чтобы объяснить особенное явление не-интерференции лучей, поляризованных под прямым углом, но еще и для того, чтобы понять самую поляризацию, потому что, если допустить, вместе с Вами, колебания только перпендикулярные к волнам, то-есть направленные по лучам, всё становится подобным вокруг этих лучей, и они должны иметь одинаковые свойства со всех сторон. Я удивлен, что размышление, столь простое, не отняло у Вас надежду представить явления оптики с теми определениями световых волн, которые Вы приняли».

Как общий итог, Френель не без яда замечает, что когда Пуассон достаточно разовьет свои теории, он своими строгими методами придет ко всем выводам, полученным Френелем из его основного принципа.

Теория света Френеля, являясь громадным шагом вперед, все-таки в существенных пунктах требовала дополнений и уточнений, которые и были постепенно сделаны на протяжении всего XIX века. Ее прочной опорой были многочисленные и остроумные опыты, резко противо-

---

1) Т. 23, стр. 32—50 и 113—122.

речившие эмиссионной теории Ньютона. В 1816 году, за семь лет до описанной полемики, академики Пуассон и Араго рассматривали первую работу Френеля о диффракции. Проверяя его выводы, Пуассон нашел, что в центре тени от круглого тела должно быть, на основе волновой теории, светлое пятнышко, как если бы лучи света падали сюда беспрепятственно. В этом Пуассон усмотрел опровержение волновой теории, но Араго сделал опыт, который полностью подтвердил теорию и произвел громадное впечатление. Несколько странно, что академикам тогда не пришли на память опыты Делиля, Маральди и Фложерга (ср. примечание [43]), в которых уже не раз был получен этот результат.

Поперечные колебания в эфире плохо укладывались в умы тогдашних физиков. Но здесь позиция Френеля несомненно была исторически оправдана: об эфире известно было только, что он носитель света, и требовать, чтобы он во всех отношениях подходил под категорию обычных жидкостей — было метафизикой. Позже Стокс показал, что и в жидком эфире возможны поперечные колебания.

[55] К 1842 г. взгляды Френеля временно восторжествовали, и в учении о природе света это было в то время шагом вперед. Но затруднения в теории света этим не исчерпывались, и Лобачевский предусмотрел, что эта победа — не окончательная, что волновая теория не завершена, а природа света далеко не уяснена. Вслед за тем он высказывает глубокую мысль об универсальности сил притяжения и отталкивания. Напомним, что пишет Энгельс по поводу притяжения и отталкивания [1]):

> «Обыкновенно принимается, *что тяжесть есть наиболее всеобщее определение материальности*, т. е. что притяжение, а не отталкивание есть необходимое свойство материи. Но притяжение и отталкивание столь же неотделимы друг от друга, как положительное и отрицательное, и поэтому уже на основании самой диалектики можно предсказать, что истинная теория материи должна отвести отталкиванию такое же важное место, как и притяжению, и что теория материи, основывающаяся только на притяжении, ложна, недостаточна, половинчата».
>
> «Там, где имеется притяжение, оно должно дополняться отталкиванием».

[56] Теория света Коши, постепенно дополнявшаяся, а в некоторых пунктах и изменявшаяся ее автором, содержится в целом ряде мемуаров и заметок, и было бы затруднительно дать ее краткий очерк.

---

1) Ф. Энгельс — Диалектика природы. Госполитиздат, 1948, стр. 195, 196.

Она явилась существенным шагом вперед в развитии теории Френеля; учитывая влияние молекул вещества на частички светоносного эфира, Коши показал, что волновая теория может объяснить дисперсию света — явление, которое оставалось непонятным после работ Френеля. В 1830 г. Коши писал [1]):

> «Гипотеза, которую принял Френель, стала реальностью, несмотря на аргументы и вычисления его знаменитого противника» (т. е. Пуассона, ср. примечание [[54]]).

В начале этого мемуара Коши сообщает:

> «Я первый дал общие уравнения равновесия и движения молекул, подверженных силам взаимного притяжения и взаимного отталкивания, допуская, что эти силы являются функциями расстояний между молекулами».

Там же встречается упоминание о трех системах плоских волн, сопровождающих распространение света.

В 1839 г. Коши ссылается на этот мемуар 1830 года и, между прочим, пишет [2]):

> «Если теплота есть колебательное движение, как всё заставляет этому верить, и если она может распространяться в пустоте, то-есть в эфире, рассматриваемом отдельно, — нужно, чтобы она была одним из колебательных движений, к которым эфир способен. Но, так как колебания, распространяющиеся в эфире, доходят до больших расстояний от центра возбуждения, так что поверхности волн, взятые в ограниченном простирании, могут без чувствительной ошибки рассматриваться как плоскости, эти колебания необходимо сводятся к таким, которые допускаются движениями плоских волн, то-есть к поперечным, или продольным колебаниям. Итак, ввиду того, что поперечные колебания, происходящие без изменения плотности, представляют свет, для представления теплоты остаются только продольные колебания, или, что то же самое, колебания, сопровождаемые изменениями плотности».

Впервые это предположение было высказано Коши в 1836 г. в письме к Амперу [3]).

Лобачевский был прав в своей критике: эта часть теории света Коши оказалась мертворожденной. Пусть в некоторой среде суще-

---

[1]) A. Cauchy — Mémoire sur la théorie de la lumière. Paris, 1830.

[2]) A. Cauchy — Mémoire ou l'on montre comment une seule et même théorie peut fournir les lois de la propagation de la lumière et de la chaleur. Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 9, Paris, 1839, стр. 285.

[3]) Comptes rendus, t. 2, 1836, стр. 207—209.

ствуют только поперечные волны света; при каждом преломлении, или отражении на границе с другой средой, должны возникнуть и продольные волны, которые потребуют себе часть энергии пришедших поперечных волн. Опыт этому противоречит: при прохождении светом границы двух сред энергия световых колебаний не терпит заметной потери.

[57] Это место цитирует акад. С. И. Вавилов, отмечая попытку Н. И. Лобачевского соединить эмиссионную и волновую теории света [1]. Перед этим [2] он говорит о гипотезе Ньютона, по которой световые частицы возбуждают колебания в эфире, находящемся в веществе и около него. Но в XIX веке, после триумфа волновой теории, идея Лобачевского являлась неожиданной и смелой. Из текста видно, что исходная мысль была подана Кнорром, но где-то Лобачевский незаметно переходит к положению собственных воззрений (см. следующее примечание) — может быть, сразу же после первой фразы абзаца, но, может быть, и далее, например, со слов: «Оставалось бы решить, какою силой в эфире...».

[58] Следующая за этим фраза ясно показывает, что высказанный в тексте взгляд на связь теории света и теории теплоты принадлежит самому Лобачевскому (а не Кнорру). «Погонное» и «качательное» движения — поступательное движение и поперечные колебания. Эфир Лобачевского — это не просто носитель колебаний, как у физиков его века, это — поток частиц, которым свойственны волновые колебания. С проницательностью, поистине поразительной, Лобачевский в значительной степени предусмотрел то направление, по которому пошло учение о свете через ряд десятилетий после него.

[59] По наблюдениям О. В. Струве во время затмения в Липецке падение температуры было более значительным.

[60] Приведем это достопримечательное описание Уллоа [3]:

> «Через пять или шесть секунд после погружения [в тень] мы начали наблюдать вокруг Луны весьма яркий круг света, который, казалось, имел быстрое круговое движение, до некоторой степени подобно ракете, вращающейся вокруг своего центра».

---

[1]) С. И. Вавилов — Исаак Ньютон. 2-е изд., 1945 г., стр. 79.

[2]) Там же, стр. 70—78.

[3]) Ulloa — Observations of the total and annular eclipse of the Sun, taken on the 24th of June 1778... Philosophical transactions of the Royal Society of London, 1779, стр. 105—119.

Подобная иллюзия повторялась у некоторых зрителей других затмений и, вероятно, объясняется утомлением и плохой адаптацией глаз, до того направленных на яркий солнечный серп (это подтверждается тем, что корона была замечена не сразу после начала полной фазы затмения).

[61] Отвергнув объяснение солнечной короны при помощи диффракции света у краев Луны, Лобачевский считает недостаточной рефракцию (преломление) солнечных лучей в земной атмосфере.

[62] Принцип Гюйгенса получил у Френеля новую формулировку [1]).

> «Колебания световой волны в каждой ее точке могут рассматриваться как сумма элементарных движений, которые посылают сюда в этот момент времени, действуя отдельно, все части этой волны, взятой в каком-нибудь из ее предшествующих положений».

Добавим, что формулировка принципа Френеля не вполне строга; более строгая формулировка была дана Кирхгофом в 1882 г., но и та не свободна от теоретических недочетов. Тем не менее, для решения многих задач оптики на практике вполне достаточен принцип Гюйгенса в том виде, в каком его применял Френель.

[63] Причина, по которой Луна и планеты нам кажутся светлыми, заключается в том, что мы их наблюдаем на темном фоне ночного неба, между тем как они освещены Солнцем. Лобачевский, в сущности, не пользуется своим рассуждением, что яркость (по терминологии Лобачевского «напряжение света», «сила в освещении») собрания светящихся тел зависит от расстояния до наблюдателя, как бы чувствуя ненадежность вывода.

По поводу его объяснения солнечной короны следует еще раз напомнить, что астрономы не скоро после затмения 1842 г. решили окончательно, что она принадлежит Солнцу. Тем не менее, вполне справедливо мнение Лобачевского, что свет Солнца, рассеиваемый земной атмосферой, значительно повышает отражательную способность Земли, если ее рассматривать из мирового пространства. Альбедо Земли (отношение светового потока, отражаемого Землей во всех направлениях, к потоку солнечного света, падающему на Землю) равно 0,29, тогда как для Луны, лишенной атмосферы и воды, альбедо равно только 0,07.

Характерно упоминание Лобачевским жителей небесных тел, — может быть это не более, чем оборот речи, но и то свидетельствует, что Лобачевский не отрицал обитаемости Вселенной.

---

1) См. напр. сочинение Френеля, приведенное в сноске на стр. 475 наст тома, — стр. 65 подлинника и 56 русского перевода.

[64] О наблюдениях М. В. Ляпунова и его отчете см., кроме текста отчета Н. И. Лобачевского, примечания [6], [7], [10], [11], [12], [14], [52], вводную статью [1]) и приложение 3 [2]).

[65] Отношение значения горизонтальной составляющей земного магнетизма в Пензе к ее значению в Казани может быть найдено по обычному правилу: оно обратно пропорционально квадратам периодов колебаний стрелки. Из наблюдений 1836 г. это отношение получается 1,0918; из наблюдений 1842 г. — 1,0950.

[66] Подобные похолодания и поздние снегопады случались и в последующие годы. Небывалый снегопад имел место в 1916 г.: снег выпал в Казани 1 июня и лежал до 3—4 июня (нового стиля), толщина снегового покрова достигла 20 *см*, а в других местах — до 27 *см* [3]).

[67] В этих высказываниях виден глубокий интерес Лобачевского к природе и сельскому хозяйству своей родины. Непосредственным поводом к его замечаниям могло послужить пребывание на территории Пензенского училища садоводства, где была расположена временная обсерватория Казанской экспедиции.

[68] Упоминание о гористом положении Пензенской губернии не следует понимать буквально. В первой половине XIX века холмы нередко назывались горами. Следы этого словоупотребления сохранились и до сих пор, и, например, возвышенности правого берега Волги иногда в разговоре называются горами. Эти возвышенности, как правильно отмечает Лобачевский, отнюдь не связаны с горными хребтами, например с Уралом (как думали выдающиеся геологи того времени), но имеют эрозионный, размывной характер. Действительно, Свияжск расположен на «останце», вырезанном из правоволжской возвышенности размывом впадающих в Волгу речек.

---

1) Стр. 421 наст. тома.

2) Стр. 494 наст. тома.

3) См. П. Т. Смоляков — Климат Татарии, Казань, 1947, стр. 31.

ЗАМЕТКА В ПЕНЗЕНСКОЙ ГАЗЕТЕ 1842 г. О ЗАТМЕНИИ, ВЕРОЯТНО, ПРИНАДЛЕЖАЩАЯ Н. И. ЛОБАЧЁВСКОМУ

В «Прибавлениях к Пензенским губернским ведомостям» № 28 от 10 июля 1842 г., вскоре после наблюдений казанских ученых над полным солнечным затмением, появилась заметка (без подписи), относительно которой X. Чаликов в 1926 г. [1]) высказал предположение, что она может принадлежать перу Лобачевского. X. Чаликов приводит текст заметки и аргументирует свое мнение, ссылаясь на употребление некоторых чисто технических терминов, на самый стиль заметки и на глубокое понимание происходящего явления. Предположение X. Чаликова кажется очень правдоподобным, и в его пользу можно привести дополнительные соображения.

Ниже следует текст заметки [2]).

> «1842 года 26 июня, происходило в Пензе полное затмение солнца. К сожалению, для наблюдений столь редкого и любопытного явления погода была не совсем благоприятная. За густыми облаками не возможно было видеть ни начала, ни конца общего затмения. Солнце появилось, когда уже часть его была покрыта луною, но в неясном и не резко ограниченном виде. Наблюдения производились в присутствии Ректора Казанского Университета Г. Действительного Статского Советника Лобачевского и Профессора Физики Коллежского Советника Кнорра, Астрономом наблюдателем Кандидатом Ляпуновым, с помощию большой Венской Ахроматической трубы и Брегетова хронометра, принадлежащих Астрономической Обсерватории Казанского Университета. Начало затмения по приблизительно вычисленному

---

[1]) X. Чаликов — Н. И. Лобачевский в Пензе. «Трудовая правда» (Пенза), № 51, 4 марта 1926 г., стр. 3. См. также С. А. Касьянюк — Поездка Н. И. Лобачевского в Пензу для наблюдения полного солнечного затмения 1842 г., «Природа», 1950, № 10, стр. 69—71.

[2]) По точной ее копии, сделанной с подлинного редкого издания Г. С. Карменян, зав. Пензенской обл. библиотекой им. М. Ю. Лермонтова.

состоянию хронометра [1]) определено в 9 ч. 9′22″ среднего Пензенского времени, а конец полного затмения в 9 ч. 12′22″ ср. П. вр. Таким образом, полное затмение продолжалось 2′59″ [2]). Сильное уменьшение света сделалось заметным за несколько минут до начала полного затмения. Впрочем об этом предмете ничего нельзя сказать удовлетворительным образом. Пасмурное время принудило отказаться от всех физических наблюдений, какие предположено было сделать над степенью уменьшения солнечного света и солнечной теплоты. Утвердительно сказать можно только то, что темнота во время полного затмения была совершенно полуночная, и, вероятно, при ясном небе открылись бы многие звезды и для простого глаза. Всего более поразителен был удивительно быстрый переход от этой темноты к свету, когда появился первый луч солнца. С этим появлением все исчезло: дымчатый отлив, каким одеты были все окружающие предметы, особенный вид облаков, мрак, покрывающий восточную часть горизонта, и заря, освещающая противоположную часть неба, одним словом, всё, что явление полного затмения делало столько [3]) величественным и удивительным для всякого внимательного наблюдателя чудес природы».

Описание зрелища полного затмения при облаках на небе, изображение полной фазы замечательны по краткости, точности и картинности [4]). Нельзя допустить, чтобы все это мог написать Кнорр, в ту пору явно не владевший столь свободно художественными средствами русского языка. В той же книжке Ученых записок Казанского университета, где впоследствии появился отчет Лобачевского, есть статья

[1]) Ляпунов, вероятно, еще не закончил обработку своих наблюдений; поэтому поправка хронометра была вычислена только приблизительно.

[2]) Расхождение в 1 секунду с предыдущими моментами начала и конца полной фазы, повидимому, вызвано округлением десятых долей секунд.

[3]) Особенность стиля Лобачевского, ср. стр 439 наст. тома («сколько резким»), стр. 454 («столько теплым»; исправлено в «Журнале министерства» на «столь теплым»).

[4]) Во время полной фазы солнечного затмения небо опоясано со всех сторон кольцом зари, так как воздух освещен за пределами конуса лунной тени, которая движется по земной поверхности с запада на восток со скоростью порядка 1 *км* в секунду. Пока длится полное затмение, ширина кольца зари в разных направлениях горизонта меняется; только в середине полной фазы и к тому же на центральной линии затмения горизонт освещен зарей равномерно со всех сторон. Чем шире конус лунной тени у земной поверхности и, следовательно, длительнее полное затмение, тем уже полоса зари у горизонта и тем ощутительнее темнота. Перед самым концом полной фазы заря поднимается на западе со все нарастающей быстротой, а тень спускается на востоке. Когда край зари домчится по небу до Солнца и промелькнет перед ним, мгновенно блеснет солнечный луч, и полное затмение кончается.

Кнорра «О темных лучах света». Чувствуется, что текст этой статьи был не то написан по-немецки и почти дословно переведен на русский язык, не то ее автор сразу пользовался русскими словами, строя при этом фразы по немецкому образцу. Ляпунов, с другой стороны, был все время занят наблюдениями в телескоп. Он просто не мог одновременно отмечать по хронометру точный момент конца полной фазы и рассматривать окружающий ландшафт.

Если к этому добавить, что Лобачевскому, как ректору и главе экспедиции, было всего естественнее сообщить о наблюдениях затмения, то мы придем к выводу, что он и был автором заметки в «Пензенских губернских ведомостях». Конечно, характерное сокращение «Г.» только перед фамилией Лобачевского и, вероятно, чины участников экспедиции приписала редакция газеты.

ПЕРВЫЕ АСТРОНОМИЧЕСКИЕ НАБЛЮДЕНИЯ Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО

Казанские известия № 21 (среда 6 сентября 1811 г., стр. 1—2) содержат сообщение о наблюдениях кометы 1811 г., произведенных Н. И. Лобачевским и И. М. Симоновым. Сообщение это сделал И. А. Литтров (1781—1840), первый профессор астрономии в Казанском университете, приехавший в Казань в 1810 г., но уже в 1816 г. покинувший ее. История возникновения школы астрономов в Казани и усилия, которые положил Литтров, чтобы основать хоть самую скромную обсерваторию, подробно описаны Н. П. Загоскиным [1]. Одним из первых учеников Литтрова явился 18-летний Н. И. Лобачевский, зарекомендовавший себя еще на студенческой скамье как талантливый астроном, в особенности блестяще овладевший теорией.

На следующий год после прибытия Литтрова в Казань появилась комета, которая впоследствии получила обозначение 1811 I (т. е. первая комета, прошедшая через перигелий своей орбиты в 1811 г.). Это была одна из самых блестящих комет за последние столетия, обладавшая очень ярким, хотя и не слишком длинным, хвостом. Открытая 25 марта 1811 г. Фложергом в Вивье, она прошла через перигелий 12 сентября (нового стиля), как раз тогда, когда она наблюдалась в Казани. В это время она обращала на себя всеобщее внимание.

Еще не совсем угасшие астрологические суеверия связали появление кометы с бурными политическими событиями той эпохи, и комета 1811 I прочно вошла в историю. Считали, в частности, что ее действие проявилось в необычайно высоком качестве вина урожая 1811 г. Именно ее имеет в виду стих Пушкина:

«Вина кометы брызнул ток» [2]

и описанием этой кометы заканчивается второй том «Войны и мира» Л. Н. Толстого.

---

[1] Н. П. Загоскин — История императорского Казанского университета за первые сто лет его существования 1804—1904, т. III, Казань, 1904, глава 5.

[2] «Евгений Онегин», гл. I, XVI.

Но для наблюдения над этим необычайным светилом казанские астрономы располагали ничтожными средствами: у них был только секстант, с которым они измеряли расстояния кометы до звезд и днем наблюдали Солнце для определения поправки обычных стенных часов, которыми они были вынуждены пользоваться при наблюдениях. Загоскин пишет:

> «Наблюдения эти, произведенные Литтровым [1]) при содействии его учеников И. М. Симонова и Н. И. Лобачевского, были обставлены самым примитивным образом и могли представить значение разве только исключительно пропедевтическое; производившиеся с 30 августа через окно комнаты советской канцелярии, при неблагоприятных атмосферных условиях, плохими инструментами, даже без помощи астрономических часов, которые заменялись обыкновенными стенными часами, находившимися в зале советских заседаний [2]) — эти наблюдения не представляли никакого научного значения [„nullius pretii“ [3])], как отозвался об них и сам Литтров в письме к попечителю» [4]).

Это и справедливо и не справедливо. Конечно, в настоящее время значение этих наблюдений только историческое. Но не следует забывать, что в ту эпоху наблюдения комет, вообще, часто страдали большими погрешностями, и с этой точки зрения наблюдения Лобачевского и Симонова, хотя их и немного, вероятно, не хуже наблюдений многих других астрономов. По крайней мере, отсчеты секстанта для расстояний кометы от звезд сходятся между собой неплохо. По этим расстояниям вполне могли быть вычислены координаты кометы на небе (как это и было сделано Литтровым). Что же касается часов, то их роль при наблюдениях комет не так велика — только для отметки момента наблюдений; при умеренной скорости движения кометы ошибка в поправке часов на несколько секунд не могла играть ровно никакой роли.

С наблюдениями кометы 1811 I впервые появилось имя Н. И. Лобачевского в печати. Прямо установить, какие наблюдения принадлежат ему, а какие — Симонову, нельзя: это не указано в тексте. Но легко видеть по моментам часов, что наблюдения идут попарно, с некоторыми перерывами. Очевидно, что наблюдения, сделанные первым наблюдателем, повторялись вторым и, надо полагать, как правило,

---

1) Наблюдения производились Лобачевским и Симоновым — и только в присутствии Литтрова.

2) То-есть заседаний Совета.

3) Никакой цены.

4) Загоскин, т. III, стр. 79. Попечителем Казанского университета был живший в Петербурге престарелый астроном академик С. Я. Румовский.

первым наблюдателем был старший — магистр Н. И. Лобачевский, вторым — студент И. М. Симонов.

Текст заметки написал, несомненно, Литтров; с его немецкого подлинника был сделан (слишком буквальный!) перевод.

В практике астрономов давно принято, что сообщения в печать о наблюдениях, сделанных на той или иной обсерватории, дает ее директор (точно так и поступил Литтров), однако сами наблюдения рассматриваются как научный труд астронома, непосредственно их выполнившего, следовательно, в данном случае мы имеем первую научную работу Н. И. Лобачевского и И. М. Симонова.

Приводим полностью текст заметки [1]).

Казань

Комета, ныне видимая, находится между звездами (*омега* и *пси греч. букв.*) Большой медведицы. Она удаляется уже от солнца. При ее приближении к оному, первый ее наблюдал Г. Фложерк [2]) в Вивие (*) 25 марта (*нового шти.*) сего года; но тогда она была гораздо менее. Можно надеяться, что она будет видима и в Ноябре; свет ее и величина станут в продолжении месяца умножаться; она теперь в Казани уже не заходит, а бывает и днем над горизонтом.

Наблюдения, деланные над сею кометою Гг. Магистром Лобачевским I-м и студ. Симоновым под руководством и в присутствии Г. проф. Литрова здесь сообщаются:

30 Авг./11 Сент. Часы наблюд.	Двойн. высоты верхн. солн. края
$10^h21'46''$	$71°20'0''$
10 24 10	71 40 0
10 25 19	71 50 0
10 26 29	72 0 0
11 5 40	76 25 0

откуда ускорение часов против среднего Казанского времени в $10^h42'$ найдено $5'12'',3$.

[1]) Заметка воспроизведена (без данных наблюдения) в книге «Материалы для биографии Н. И. Лобачевского». Собрал и редактировал Л. Б. Модзалевский. Изд. АН СССР, М. — Л., 1948. Документ № 29, стр. 49.

[2]) Фложерг.

(*) Город во Франции под $44°28'57''$ северной широты и $22°20'55''$ долготы от Парижского [3]) меридиана [*Прим. подлинника*].

[3]) Не от Парижского меридиана, а от меридиана Ферро, лежащего на $20°0'0''$ к западу от Парижа.

КАЗАНСКІЯ ИЗВѢСТІЯ.



№ 21

Среда Сентября 6-го дня 1811 года.

Казань.

Комета, нынѣ видимая, находится между звѣздами (*омега и хи греч. буквы.*) Большой медвѣдицы. Она удаляется уже отъ солнца. При ея приближеніи къ оному, первой ея наблюдалъ Г. Фложергъ въ Визіѣ (*) 25 марта (*новаго штиля*) сего года; но тогда она была гораздо менѣе. Можно надѣяться, что она будетъ видима и въ Ноябрѣ; свѣтъ ея и величина станутъ въ продолженіе мѣсяца уменьшаться; она теперь въ Казани уже не заходитъ, а бываетъ и днемъ надъ горизонтомъ.

(*) Городъ во Франціи подъ 44°. 28'. 27'' сѣверной широты 2°. [illegible] долготы отъ Парижскаго Меридіана.

Наблюденія дѣланныя надъ сею кометою Гг. Магистромъ Лобачевскимъ 1мъ и студ. Симоновымъ подъ руководствомъ и въ присутствіи Г. Проф. Литтрова здѣсь сообщаются:

30 Авг. / 11 Сент. часы наблюд.	двойн. высота верхн. солн. края
10ч. 21'. 46'' ----	71°. 20'. 0''

Первая страница сообщения о наблюдении кометы 1811 г. — первое упоминание в печати имени Н. И. Лобачевского («Казанские известия», № 21 за 1811 г.).

Часы набл.	Расст. от (*Гр. вита*) Больш. медведицы
8ч18′28″	15°7′40″
8 23 2	15 8 0
8 32 6	15 8 10
8 36 33	15 7 50
10 6 28	15 4 40
10 14 8	15 5 0

Часы набл.	Расст. от (*Гр. альфа*) Больш. медведицы
8ч25′16″	20°26′ 0″
8 40 9	20 26 0
8 45 44	20 26 0
10 8 37	20 21 50
10 15 54	20 21 30

31 авг. / 12 сент. Часы наблюд.	Двойн. высоты верх. солн. края
10ч 8′16″	68°40′0″
10 15 46	69 50 0
10 16 49	70 0 0
10 17 59	70 10 0

откуда следует, что ускорение часов против среднего времени для Казани в 10ч18′ будет 4′43″,5.

Часы набл.	Расст. от (*Гр. вита*) Большой медведицы
7ч57′ 8″	14°47′20″
8 2 45	14 47 20
9 56 8	14 44 30
10 0 48	14 45 0

Часы набл.	Расст. от (*Гр. альфа*) Больш. медвед.
7ч59′47″	20° 2′20″
8 11 23	20 1 40
9 43 9	19 58 10
9 49 10	19 58 20
9 14 5[1])	19 58 30

Непостоянная погода не позволила снять ни одних соответственных высот солнца.

(*Сообщено от г. профессора Литрова*).

[1]) Вероятно, должно быть: 10ч14′5″.

ИСТОРИКО-БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ О СОЧИНЕНИИ «ПОЛНОЕ ЗАТМЕНИЕ СОЛНЦА В ПЕНЗЕ 26 ИЮНЯ 1842 ГОДА»

Отчет Н. И. Лобачевского о полном затмении Солнца в Пензе 26 июня/8 июля 1842 г. появился в печати дважды — в «Ученых записках, издаваемых императорским Казанским университетом», 1842, книжка III, Казань, 1843, стр. 51—83 (имеется также в виде отдельного оттиска с самостоятельной нумерацией страниц) и в «Журнале министерства народного просвещения», часть XXXIX, 1843, отд. II, стр. 65—96.

Лобачевский сам сообщает, что его «первый опыт» отчета «сделался добычей пламени в несчастный день для Казани 24 августа». Повидимому, первый текст был написан незадолго до 24 августа 1842 г. К вторичному писанию отчета о затмении Лобачевский, вероятно, приступил не сразу, будучи занят ликвидацией последствий пожара в университете. Может быть даже он стал писать его только после возвращения И. М. Симонова из заграничной командировки — 14 ноября 1842 г.[1]), в связи с рассказами последнего о наблюдениях затмения за границей. Сославшись на сообщения Симонова[2]), Лобачевский пишет через несколько строк о затмении «нынешнего года». Итак, можно утверждать, что отчет был окончен Лобачевским во второй половине ноября или в декабре 1842 г., а скорее всего, и написан целиком в это время. К концу года отчет был представлен, ибо сам Лобачевский пишет:

> «Ординарные профессоры Лобачевский и Кнорр с астрономом-наблюдателем Ляпуновым ездили в город Пензу для наблюдения полного солнечного затмения 26 июня 1842 г. Хотя погода не благоприятствовала в день затмения, однако ж астрономические наблюдения заслуживают доверия, а физические могут идти в сравне-

---

[1]) Н. П. Загоскин — Биографический словарь профессоров и преподавателей императорского Казанского университета (1804—1904), часть I, Казань, 1904, стр. 490.

[2]) См. стр. 439 наст. тома.

ние с подобными на других местах, где астрономы видели то же затмение. В Пензе сделаны тоже наблюдения над силой и направлением земного магнетизма. Подробный отчет об этой поездке и свод всех наблюдений представлены Лобачевским и Ляпуновым»[1]).

Обращаясь к интересному документу, опубликованному Л. Б. Модзалевским[2]) («Отношение Канцелярии министра народного просвещения непременному секретарю Академии Наук П. Н. Фусу с представлением отчета М. В. Ляпунова[3]) о наблюдении солнечного затмения в Пензе, 10 мая 1843 г.»), мы читаем:

«Командированные в Пензу для наблюдения над бывшим в протекшем году полным солнечным затмением, ординарные профессоры Казанского университета Лобачевский, Кнорр и астроном-наблюдатель Ляпунов, возвратясь в Казань, занялись составлением отчетов; но пожар 24 августа лишил профессора Лобачевского и наблюдателя Ляпунова весьма многих книг, записок и бумаг. По приведении всего оставшегося в известность и порядок, составлены ими два отчета: один профессорами Лобачевским и Кнорром, а другой астрономом-наблюдателем Ляпуновым.

Г. министр народного просвещения, получив ныне от г. попечителя Казанского учебного округа сии отчеты, приказал передать первый, заключающий в себе общее описание затмения, в редакцию Журнала министерства для напечатания, а второй, состоящий из астрономических выкладок, в императорскую Академию Наук.

Вследствие сего, препровождая при сем к Вашему превосходительству отчет г. Ляпунова, имею честь...»

Академия Наук постановила 19 мая 1843 г. послать отчет М. В. Ляпунова директору Главной обсерватории[4]). Но в это время Ляпунов сам уже был в Пулкове с инструментами Казанской обсерватории, пострадавшими от пожара (24 августа 1842 г. сгорело здание обсерватории). Весьма вероятно, с согласия Ляпунова Б. Я. Струве, получив отчет о затмении, не стал публиковать его. Причиной тому могла быть ненадежность определенной Ляпуновым географической долготы места

---

[1]) Отчет императорского Казанского университета за 1842 г., составленный профессором Лобачевским (черновик отчета целиком написан рукой Лобачевского). В. Часть ученая, 2. Ученые экспедиции. Центральный гос. Архив Татарской АССР, фонд 977, № 8705а, л. 40.

[2]) Модзалевский, документ № 492, стр. 457—458.

[3]) У Модзалевского ошибочно: Н. И. Лобачевского.

[4]) Модзалевский, стр. 458.

наблюдения затмения в Пензе[1]). Дальнейших сведений об отчете М. В. Ляпунова о затмении мы не имеем.

Любопытно отметить, что в приведенном выше документе говорится о совместном отчете Лобачевского и Кнорра. Между тем, это или ошибка (ибо иначе имя Кнорра как соавтора, конечно, фигурировало бы и в печати в «Журнале министерства народного просвещения») или неточность выражения, возникшая из-за того, что Лобачевский часто говорит в отчете о себе и Кнорре совместно. Сам Кнорр, повидимому, ничего о затмении 1842 года не писал.

То, в сущности, редкое и особенное обстоятельство, что мы располагаем двумя печатными отчетами Лобачевского о затмении 1842 г., позволяет проверить весь текст и, в частности, сверить все числовые данные. Основной текст, каким следует считать опубликованный в «Ученых записках», содержит очень немного искажающих смысл опечаток и, без сомнения, в нем не внесено никаких изменений в рукопись Лобачевского, который, может быть, сам правил корректуры.

Опубликованный в «Журнале министерства народного просвещения» отчет Н. И. Лобачевского подвергся редакционным поправкам стилистического характера. Во многих местах были переставлены слова, заменены выражения. Характерный стиль Лобачевского был редактором почти всюду «причесан»; в результате этого текст получился глаже, но в значительной степени потерял свойственную языку Лобачевского образность. Приведем следующие примеры разночтений в обоих изданиях:

1) В «Ученых записках» Лобачевский пишет: «солнечное затмение в начале заставило народ толковать и беспокоиться». В «Журнале министерства» редактор исправляет: «затмение в начале произвело в народе толки и беспокойство».

2) Лобачевский пишет: «не можем даже сказать, как далеко простирается воздух». Редактор для гладкости вставляет два паразитических слова: «не можем даже сказать *относительно того*, как далеко простирается воздух».

3) Лобачевский пишет: «на комете... атмосфера представляет эллипсоид, вытянутый прочь от солнца». Редактор вычеркивает не необходимое, но очень образное слово «*прочь*».

4) Лобачевский пишет: «чем ближе находимся к *куче* тел... По примеру *скученных* тел... Причиною *грубых* перемен в температуре...». Редактор заменяет «грубые», по его мнению, слова; в «Журнале

---

[1]) Ср. примечание [12] на стр. 461—462 наст. тома.

министерства» напечатано: «чем ближе находимся к *группе* тел,... по примеру *сгруппированных* тел,... Причиною *быстрых* перемен в температуре...».

5) Текст Лобачевского: «Пенза хорошо выбрана местом для садоводства» редактором заменен на следующий: «Местоположение Пензы весьма благоприятно для садоводства».

Существенных изменений в изложение Лобачевского в «Журнале министерства», за очень редкими исключениями, не внесено, но при печатании появились кое-где серьезные опечатки, в одном месте выпало несколько слов, в другом — целая строка.

Приведем некоторые выдержки из документа, опубликованного Модзалевским [1]) («Из статьи Н. И. Иванова „Ученые собрания профессоров Казанского университета“ о докладе Н. И. Лобачевским результатов наблюдений солнечного затмения в Пензе»). Числовые результаты, которые не дают ничего нового, здесь опущены.

«Собрания происходят в зале Физического кабинета. Поныне их было десять. Члены с удовольствием видели, что и посторонние лица, даже некоторые путешественники, принимали участие в их беседах. Бросим беглый взгляд на результаты собраний.

Ректор Университета, заслуженный профессор чистой математики Лобачевский сообщил весьма любопытные известия о поездке, предпринятой им в прошедшем году с профессором физики Кнорром и астрономом-наблюдателем Ляпуновым в Пензу и о произведенных им там астрономических и физических наблюдениях, особенно над полным солнечным затмением, бывшим 26-го июня 1842 года. [...]

Во время затмения небо покрылось облаками, однако ж астрономические наблюдения над началом и концом полного затмения могли быть сделаны с достаточною верностью. Температура воздуха в продолжение затмения понизилась на 1°,2 Р [2]). Вокруг солнца виднелся светлый венец, которого вид менялся в своем очертании, может статься, от расположения в облаках. Одушевленный, превосходный свой рассказ г. Лобачевский пополнил описаниями многих известных наблюдений над солнечными затмениями, сделанными как прежде, так и в последнее время; присоединил собственные исследования, как надлежит объяснять явления, замечаемые при полном солнечном затмении;

---

1) Модзалевский, стр. 458—460. Статья опубликована в «Северной Пчеле» 3 июня 1843 г., № 121, на стр. 483—484.

2) Неверно, должно быть 1°,8.

представил доводы, почему возвышения на лунном крае, показавшиеся во время полного затмения и окрашенные розовым цветом, не надобно почитать солнечными горами. Почти всеми астрономами принятое мнение, что светлое кольцо вокруг солнца должно происходить от погибания лучей близ луны, кажется г. Лобачевскому не вполне основательным, потому что подобное действие тел на свет еще не известно физикам и не может быть соглашено ни с какой теорией. Г. Лобачевский находит более вероятным, что явление совершается собственно в нашей воздушной атмосфере. Таким образом, возможно понять и все особенные явления, разнствующие по месту наблюдения, в последнее и прежние затмения, как например, снопы лучей в светлом венце, различное направление и кривизну, примеченную в лучах кольца вокруг луны. — В высокой степени занимательное и превосходно изложенное повествование г. Лобачевского доставило собранию самый приятный вечер».

И. М. Симонов в 1844 г. упоминает об отчете Лобачевского в следующих словах:

«В Пензе наблюдали полное солнечное затмение 1842 года два профессора имп. Казанского университета Лобачевский и Кнорр и астроном Казанской обсерватории Ляпунов. Из подробного и любопытного описания этих прекрасных наблюдений, изданного г-м профессором Лобачевским, видно, что в Пензе полное солнечное затмение сопровождалось почти теми же явлениями, какие замечены были Киевскими наблюдателями [1]) в Чернигове.» [2]).

Отчет Н. И. Лобачевского о затмении 1842 г. иногда отмечался в позднейшей литературе, вплоть до последних лет

В 1893 г., на праздновании столетия со дня рождения Лобачевского, профессор А. В. Васильев произнес большую блестящую речь, напечатанную в юбилейном издании Казанского университета и вскоре переведенную в разных странах на иностранные языки. Останавливаясь на различных этапах научной деятельности Лобачевского, А. В. Васильев говорил о его поездке в Пензу для наблюдения солнечного затмения и цитировал взгляды Лобачевского на солнечную корону и на теорию света [3]).

---

[1]) Пр оф. В. Ф. Федоровым и его спутниками, см. стр. 424 наст. тома.

[2]) И. М. Симонов — Записки и воспоминания о путешествии по Англии, Франции, Бельгии и Германии, Казань, 1844, стр. 150.

[3]) 1793—1893. Празднование императорским Казанским университетом столетней годовщины дня рождения Н. И. Лобачевского. Казань, 1894, Речь проф. А. В. Васильева, стр 125—126.

В 1943 г. акад. С. И. Вавилов цитирует из отчета Лобачевского то место (стр. 449 наст. тома), где Лобачевский пишет об объединении эмиссионной и волновой теории света [1]). Н. И. Идельсон в своем очерке «Лобачевский — астроном» посвящает отчету Лобачевского о затмении V раздел, в котором особо отмечает глубокие мысли Лобачевского о сущности физических теорий и о трудностях, с которыми сталкивается теория света [2]).

Отчет Н. И. Лобачевского о полном затмении Солнца в Пензе 26 июня 1842 г. перепечатан Л. Б. Модзалевским по тексту «Ученых записок» [3]). Им введена новая орфография. В тексте опечаток мало (в том числе в заглавии), но имеются стилистические отклонения от подлинника, хотя и не очень важные и обычно взятые из «Журнала министерства народного просвещения» (между прочим, Модзалевский везде писал *Невтон*, тогда как в «Журнале министерства» — *Ньютон*, а сам Лобачевский в своем отчете в «Ученых записках» писал, в согласии с английским произношением, — *Нютон* и лишь один раз там фигурирует Невтон, причем это наверное описка или опечатка). Кроме этого, у Л. Б. Модзалевского есть только одна серьезная погрешность. Именно (см. стр. 453 наст. тома), Лобачевский говорит об отражении света на планетах в различных направлениях, и указывает что эта мысль не может быть допущена даже для *металлических* зеркал. В «Журнале министерства» слово «металлических» совершенно напрасно заменено на «*математических*» и так же у Модзалевского [4]).

Наконец, специально путешествию Н. И. Лобачевского в Пензу для наблюдения полного солнечного затмения посвящены статья Х. Чаликова, появившаяся в 1926 г., и статья С. А. Касьянюка, опубликованная в 1950 г.; см. о них в приложении 1 [5]).

---

[1]) С. И. Вавилов — Исаак Ньютон, 2-е изд., 1945, стр. 79.

[2]) См. сноску [2]) на стр. 421 наст. тома.

[3]) Модзалевский, стр. 463—478.

[4]) Модзалевский, стр. 477.

[5]) Стр. 485 наст. тома.

Редактор *И. Н. Бронштейн.*
Техн. редактор *С. Н. Ахламов.*
Отв. корректор *Г. Н. Нелидова*

Подписано в печать 24/X 1951 г.
Бумага $70 \times 108/_{16}$.
Тираж 5 000 экз. 16,375 бум. л.
42,813 печ. л. + 12 вклеек.
30,24 уч.-изд. листа. Т-07291. Заказ № 2823.
Цена 18 руб. 15 коп. Переплет 3 руб.

4-я типография им. Евг. Соколовой
Главполиграфиздата
при Совете Министров СССР,
Ленинград, Измайловский пр., 29.